스트랩다운 관성항법시스템의 주행 중 정렬을 위한 강인 관측기 구성

Robust Observer Design for SDINS In-Flight Alignment

유 명 종, 이 장 규, 박 찬 국, 심 덕 선
(Myeong-Jong Yu, Jang Gyu Lee, Chan Gook Park, and Duk-Sun Shim)

Abstract : The nonlinear observers are proposed for a nonlinear system. To improve the characteristics such as stability, convergence, and H_∞ filter performance criterion, we utilize an H_∞ filter Riccati equation or a modified H_∞ filter Riccati equation with a freedom parameter. Using the Lyapunov function method, the characteristics of the observers are analyzed. Then the in-flight alignment for a strapdown inertial navigation system(SDINS) is designed using the proposed observer. And the additive quaternion error model is especially used to reduce the uncertainty of the SDINS error model. Simulation results show that the observer with the modified H_∞ filter Riccati equation effectively improves the performance of the in-flight alignment.

Keywords : robust observer, H_∞ filter, stability, convergence, strapdown inertial navigation system

I. 서론

스트랩다운 관성항법시스템에서 오차를 추정하기 위하여 주로 사용되는 필터는 간접 되먹임 칼만필터이며 간접 되먹임 칼만필터는 일반적으로 확장형 칼만필터로 알려져 있다[1]-[7]. 확장형 칼만필터는 시스템의 비선형성이 작은 경우와 초기 오차가 작은 경우에만 사용이 가능하며 그렇지 않은 경우에는 쉽게 발산하는 특성을 가진다. 이런 문제점을 개선하기 위하여 많은 연구가 있었다[1][8][9][10][11]. 필터의 성능을 개선하기 위하여 중요한 특성은 필터의 안정성 정도(degree of stability)이며 안정성 정도의 개선은 추정오차의 수렴성의 개선과 직접적인 관계를 가진다. 특히, 참고문헌[9]에서는 공정잡음과 측정잡음이 존재하지 않은 비선형 시스템에 대하여 리카티 방정식에 미리 선정된 안정성정도(prescribed degree of stability)를 도입하여 필터의 안정성을 개선하는 방법을 제안하였다. 그러나 이 방법은 스트랩다운 관성항법시스템과 같이 공정잡음과 측정잡음이 존재하는 비선형 시스템에 대하여 적용 할 수 없다. 따라서 이러한 비선형 시스템에 대하여 필터의 안정성 정도를 개선 할 수 있는 새로운 필터 해석 및 구성 방법이 요구되어왔다. 또한 기존의 연구 결과에서 확장형 칼만필터의 안정성 정도는 리카티 방정식의 공정잡음과 관련된 항의 하한에 의존한다. 그러나 스트랩다운 관성항법시스템에서 위치를 상태변수로 사용하는 경우에 리카티 방정식에서 공정잡음과 관련된 항의 하한은 0이 되므로 필터의 최소 안정성 정도는 보장할 수 없었다. 따라서 필터의 안정성과 수렴성을 개선하기 위하여 일정한 안정성 정도를 보장할 수 있는 필터가 요구되어 왔다.

스트랩다운 관성항법시스템에서 필터를 구성하기 위하여 시스템의 오차모델이 필요한데 유도된 오차모델은 일반적으로 2차 이상의 고차 항을 생략한다. 따라서 자세오차가 큰 경우 큰 모델 오차를 유발 할 수 있다. 이 경우 오차를 추정하기 위하여 사용된 필터의 성능은 저하된다.[5]-[7] 따라서 무시된 오차 항을 고려할 수 있는 필터가 역시 요구되어 왔다.

본 논문에서는 스트랩다운 관성항법시스템과 같이 리카티 방정식에서 공정잡음과 관련된 항의 하한이 0인 경우에도 최소 안정성 정도를 보장하며 오차 모델을 유도 할때 발생되는 2차 이상의 고차 오차 항을 반영할 수 있는 두 가지 비선형 관측기를 제시한다. 하나는 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기이며, 다른 하나는 자유 매개변수를 가진 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기이다. 본 연구에서는 관측기의 중요한 특성으로 안정성 정도뿐만 아니라 추정오차의 수렴 범위 및 선형 H_∞ 필터의 성능 지수 등을 고려하고 리아프노프 함수를 사용하여 구성된 비선형 관측기의 이러한 특성들을 해석하고 비교하며, 관측기의 특성을 개선시키기 위하여 수정된 H_∞필터 리카티 방정식에 사용된 자유 매개 변수의 범위를 제시한다. 그리고 제시된 비선형 관측기와 모델 불확실성을 감소시킬 수 있는 스트랩다운 관성항법시스템의 합형 쿼터니언 오차모델을 이용하여 주행 중 정렬 방법인 속도 보정형 스트랩다운 관성항법시스템을 구성하고 성능을 분석한다.

II. 강인 비선형 관측기 구성

다음과 같은 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(t)w(t) \tag{1}$$

접수일자 : 2001. 2. 15., 수정완료 : 2001. 5. 29.
유명종, 이장규 : 서울대학교 전기 컴퓨터공학부(mjyu@asignc3.snu.ac.kr/jgl@asri.snu.ac.kr)
박찬국 : 광운대학교 제어계측공학과(cgpark@daisy.kwangwoon. ac.kr)
심덕선 : 중앙대학교 전자전기공학부(dshim@jupiter.cie.cau.ac.kr)
※ 본 논문은 국방과학연구소 및 서울대학교 자동제어특화연구센터의 연구비 지원에 의한 연구 결과입니다.

$$y(t) = h(x(t)) + v(t) \tag{2}$$

여기서 $x(t)$는 상태변수, $y(t)$는 측정치, $w(t)$는 공정잡음 그리고 $v(t)$는 측정잡음이다. 위의 시스템에 대한 비선형 관측기는 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + K(t)[y(t) - h(\hat{x}(t))] \tag{3}$$

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1} \tag{4}$$

여기서 $P(t)$는 리카티 방정식의 해이며, R은 측정잡음과 관련된 양의 대칭 한정행렬이다. 비선형 관측기에서 사용될 리카티 방정식은 이 절의 마지막에 제시한다.

$\hat{z}(t)$는 (5)와 같이 상태변수의 선형조합으로 구성된다.

$$\hat{z}(t) = L(t)\hat{x}(t) \tag{5}$$

추정오차를 (6)과 같이 정의하면, 추정오차의 미분방정식은 (7)과 같다.

$$\zeta(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) = {} & (A(t) - K(t)C(t))\zeta(t) + B(t)w(t) \\ & + \varphi(x(t), \hat{x}(t)) - K(t)\chi(x(t), \hat{x}(t)) - K(t)v(t)\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t))$, $C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t))$이다. 함수 $f(x)$, $h(x)$와 추정 값의 함수 값, $f(\hat{x})$, $h(\hat{x})$의 차는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x(t)) - f(\hat{x}(t)) = A(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \varphi(x(t), \hat{x}(t))$$

$$h(x(t)) - h(\hat{x}(t)) = C(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \chi(x(t), \hat{x}(t))$$

여기서 $\varphi(x(t), \hat{x}(t))$와 $\chi(x(t), \hat{x}(t))$는 추정오차의 2차 이상 고차 항들이며 오차가 큰 경우 이들 항들이 모델오차를 유발하기 때문에 필터의 성능은 저하된다. 일반적으로 확장형 칼만필터에서는 이들 항들을 무시하여 사용하였으나 본 논문에서는 이들을 불확실성(uncertainty)으로 고려한다. 따라서 구성된 비선형 관측기에 사용될 리카티 방정식은 확장형 칼만필터의 리카티 방정식을 직접 사용하는 것보다 추정오차의 2차 이상 고차 항들을 불확실성으로 고려할 수 있는 아래의 두 가지 리카티 방정식을 사용하였다. 하나는 (8)과 같은 H_∞필터 리카티 미분방정식을 사용하였으며, 다른 하나는 (8)을 수정하여 (9)와 같이 구성된 방정식을 사용하였다.

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) = {} & A(t)P(t) + P(t)A(t)^T - P(t)[C(t)^T R^{-1} C(t) \\ & - \gamma^{-2} L(t)^T L(t)]P(t) + B(t)QB(t)^T\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) = {} & (A(t) + \alpha I)P(t) + P(t)(A(t) + \alpha I)^T \\ & - P(t)[C(t)^T R^{-1} C(t) - \gamma^{-2} L(t)^T L(t)] \\ & P(t) + B(t)QB(t)^T\end{aligned} \tag{9}$$

여기서 γ는 H_∞필터에 사용되는 특정 값(prespecified level)이고 α는 자유 매개 변수이며 Q는 공정잡음과 관련된 양의 대칭 한정행렬이다.

III. 강인 비선형 관측기 구성

본절에서는 리아프노프 함수를 사용하여 공정잡음과 측정잡음이 있는 비선형 관측기에 대하여 안정성 정도, 추정오차의 수렴 범위 및 선형 H_∞필터의 성능 지수 등을 해석한다. 적용된 리카티 방정식에 따라 두 가지 경우를 나누어 해석하고 중요한 특성들을 비교한다. 본 절에서 사용된 기호 $\|\cdot\|$는 실수 벡터(real vector)에 대하여서는 유클리디안 노옴(Euclidian norm)을 의미하며 실수 행렬(real matrix)에 대하여서는 스펙트럴 노옴(spectral norm)을 의미한다.

(1)과 (2)로 구성된 시스템은 아래 가정1-가정5를 만족한다고 가정한다.

가정1: 리카티 미분방정식인 (8) 혹은 (9)의 해, $P(t)$는 대칭행렬이며 한정(bounded) 되어 있다.

$$p_1 I \le P(t) \le p_2 I, \quad \forall t$$

여기서 p_1, p_2는 양의 실수이다. 그리고 p_1은 $P(t)$의 하한(lower bound)이고, p_2는 $P(t)$의 상한(upper bound)이다.

가정2: 공정잡음 w와 측정잡음 v는 다음의 관계가 성립한다.

$v, w \in L_2$이고 $v, w \in L_\infty$이다.

가정3: $L(t)^T L(t)$는 아래와 같이 한정되어 있다.

$$l_1 I \le L(t)^T L(t) \le l_2 I, \quad \forall t$$

여기서 l_1, l_2는 양의 실수이다.

가정4: $C(t)$는 한정되어 있다.

$$\|C(t)\| \le c_2$$

여기서 c_2는 양의 실수이다.

가정5: 비선형 항들이 아래와 같이 한정되기 위하여 양의 실수 $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, k_\varphi, k_\chi > 0$이 존재한다.

$$\|\varphi(x(t), \hat{x}(t))\| \le k_\varphi \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2, \quad \|\zeta\| \le \varepsilon_\varphi$$

$$\|\chi(x(t), \hat{x}(t))\| \le k_\chi \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2, \quad \|\zeta\| \le \varepsilon_\chi$$

따름정리1[9]: 가정4-가정5가 만족하면 추정오차, $\|\zeta\| \le \varepsilon$에 대하여 (10)의 부등식을 만족하는 실수 ε, $k > 0$이 존재한다.

$$\begin{aligned}(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(t)[\varphi(x(t), \hat{x}(t)) \\ - K\chi(x(t), \hat{x}(t))] \le k\|x(t) - \hat{x}(t)\|^3\end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $\varepsilon = \min(\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi)$, $\Pi(t) = P^{-1}(t)$, $rI \le R$,

$k = \frac{k_\varphi}{p_1} + \frac{c_2 k_\chi}{r}$

1. H_∞ 필터 리카티 방정식을 이용한 강인 비선형 관측기

(3)에서 (5)까지와 (8)을 이용하여 비선형 관측기를 구성한다. 리아프노프 함수을 이용하여 관측기의 특성을 구해보면 아래와 같다. 리아프노프 함수를 (11)과 같이 선택한다.

$$V(\zeta(t)) = \zeta^T(t)\ \Pi(t)\zeta(t) \tag{11}$$

여기서 $\Pi(t) = P^{-1}(t)$. 가정1로부터 (12)의 리아프노프 함수 관계는 성립한다.

$$\frac{1}{p_2}||\zeta(t)||^2 \le V(\zeta(t)) \le \frac{1}{p_1}||\zeta(t)||^2 \tag{12}$$

식(12)는 $V(\zeta(t))$가 양의 한정(positive definite)이고 decrescent임을 의미한다. (11)의 리아프노프 함수를 시간에 대해서 미분하면 (13)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &= \zeta^T(t)\ \Pi(t)\zeta(t) + \zeta^T(t)\ \dot{\Pi}(t)\zeta(t) \\ &+ \zeta^T(t)\Pi(t)\dot{\zeta}(t)\end{aligned} \tag{13}$$

(7)과 (8)을 이용하여 (13)을 정리하면 (14)가 된다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &= \zeta^T(t)\ [-\gamma^{-2}L(t)^TL(t)]\zeta(t) \\ &+ w^TQ^{-1}w - s^Ts + v^TR^{-1}v \\ &- \eta^TR^{-1}\eta + 2\varphi^T\Pi\zeta - 2(K(t)\chi)^T\Pi\zeta\end{aligned} \tag{14}$$

여기서 $s=(\sqrt{Q})^{-1}w-(B(t)\sqrt{Q})^T\Pi\zeta$, $\eta=v+C(t)\zeta$, $Q=\sqrt{Q}\sqrt{Q}^T$. (14)에서 s^Ts와 $\eta^TR^{-1}\eta$는 양의 값이므로 따름정리 1.를 이용하면 (14)는 (15)와 같은 부등호(inequality) 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &\le \zeta^T\ [-\gamma^{-2}L(t)^TL(t)]\zeta \\ &+ 2k||\zeta||^3 + w^TQ^{-1}w + v^TR^{-1}v\end{aligned} \tag{15}$$

추정오차가 $||\zeta|| \le \varepsilon_2$을 만족하면 (16)은 (15)로부터 구해진다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &\le \zeta^T[-\gamma^{-2}L(t)^TL(t)]\zeta + 2k||\zeta||^3 \\ &+ w^TQ^{-1}w + v^TR^{-1}v \\ &\le (-\gamma^{-2}l_1 + 2k||\zeta||)||\zeta||^2 \\ &+ w^TQ^{-1}w + v^TR^{-1}v \\ &\le \left(\frac{-\gamma^{-2}l_1p_{1a}}{2}\right)V + w^TQ^{-1}w + v^TR^{-1}v\end{aligned} \tag{16}$$

여기서 $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon, \frac{\gamma^{-2}l_1}{4k})$, p_{1a}는 (8)에서 구해진 해의 하한이다. α_a를 (17)과 같이 선택하면 (18)의 관계가 성립한다.

$$\alpha_a = \frac{\gamma^{-2}l_1p_{1a}}{2} \tag{17}$$

$$\dot{V}(\zeta(t)) \le -\alpha_aV(t) + w^TQ^{-1}w + v^TR^{-1}v \tag{18}$$

(17)은 안정성 정도를 나타내는 계수이며 확장형 칼만필터와 달리 공정잡음과 관련된 항의 하한에 의존하지 않는다. 따라서 본 논문에서는 기존의 H_∞필터 리카티 미분방정식에서 가정 3의 l_1을 도입함으로서 비록 공정잡음과 관련된 $B(t)QB(t)^T$항의 하한이 0이어도 구성된 관측기는 최소한 (17)과 같은 안정성 정도를 보장 할 수 있음을 보였다.

(18)을 적분하면 (19)는 얻어지며 이 식으로부터 (20)이 구해진다.

$$\begin{aligned}V(\zeta(t)) &= \zeta(t)^T\Pi(t)\zeta(t) \le e^{-\alpha_at}\zeta(0)^T\Pi(0)\zeta(0) \\ &+ \alpha_a^{-1}(\mu^{-1}d_w^2 + \gamma^{-1}d_v^2)\end{aligned} \tag{19}$$

여기서 d_w는 w의 상한, d_v는 v의 상한, μ는 Q의 하한 그리고 γ는 R의 하한이다.

$$\begin{aligned}||\zeta(t)||^2 &\le \frac{p_{2a}}{p_{1a}}e^{-\alpha_at}||\zeta(0)||^2 \\ &+ \alpha_a^{-1}\pi_{1a}^{-1}(\mu^{-1}d_w^2 + \gamma^{-1}d_v^2)\end{aligned} \tag{20}$$

여기서 π_{1a}는 (8)에서 구해진 $\Pi(t)$의 하한, p_{2a}는 (8)에서 구해진 $P(t)$의 상한이다. (20)은 추정 오차가 지수적으로 (21)의 수렴집합으로 수렴함을 의미한다.

$$D_a = [\ \zeta \in R\ |\zeta^T(t)\zeta(t) \le \alpha_a^{-1}\pi_{1a}^{-1}(\mu^{-1}d_w^2 + \gamma^{-1}d_v^2)] \tag{21}$$

(20)에서 $\alpha_a^{-1}\pi_{1a}^{-1}(\mu^{-1}d_w^2 + \gamma^{-1}d_v^2)$항을 제외하면 확장형 칼만필터에서 공정잡음과 측정잡음이 없는 경우에 대하여 해석한 기존의 결과와 동일한 표현이 주어진다[9]. 또한, 구성된 비선형 관측기를 H_∞필터 가격함수 측면에서 그 특성을 해석하면 다음과 같다. (16)을 다시 정리하면 (22)와 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &\le -\frac{\gamma^{-2}l_1}{2}||\zeta||^2 + w^TQ^{-1}w + v^TR^{-1}v \\ &\le -\frac{\gamma^{-2}l_1}{2l_2}\zeta^T\ [L(t)^TL(t)]\zeta \\ &+ w^TQ^{-1}w + v^TR^{-1}v\end{aligned} \tag{22}$$

(22)를 적분하고 정리하면 (23)이 얻어진다.

$$\begin{aligned}J &= \frac{||L\zeta||_2^2}{||w||_{2\ Q^{-1}}^2 + ||v||_{2\ R^{-1}}^2 + \zeta(0)^T\Pi(0)\zeta(0)} \\ &< \gamma^2\mu_a^{-1} = \gamma_a^2\end{aligned} \tag{23}$$

여기서 $\mu_a = \frac{l_1}{2l_2}$이다. (23)의 J는 일반적으로 H_∞필터에서 사용하는 가격함수이다[12]-[16]. (23)에서 μ_a는 1보다 작다. 따라서 구성된 비선형 관측기를 H_∞필터 가격함수 측면에서 구해보면 γ_a는 항상 γ보다 크게된다. 이것은 구성된 비선형 관측기가 비선형 시스템을 선형화하는 과정에서 발생하는 불확실성에 대하여 강인성을 가진다는 것을 의미한다. 또한 (23)은 제시된 관측기가 공정잡음과 측정잡음에 대하여서도 강인성을 가짐을 보여준다.

2. 수정된 H_∞ 필터 리카티 방정식을 이용한 강인 비선형 관측기

(1)에서 (5)까지 그리고 (9)에 의해 구성된 비선형 관측기의 특성을 분석하면 다음과 같다. 리아프노프 함수를 (11)과 같이 선택한다. (7), (9) 그리고 (13)을 이용하면 (24)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &= -2\alpha V+\zeta^T(t)[-\gamma^{-2}L(t)^TL(t)]\zeta(t)\\ &+ w^TQ^{-1}w-s^Ts+v^TR^{-1}v-\eta^TR^{-1}\eta\\ &+ 2\varphi^T\Pi\zeta-2(K(t)\chi)^T\Pi\zeta\end{aligned} \tag{24}$$

여기서 $s=(\sqrt{Q})^{-1}w-(B(t)\sqrt{Q})^T\Pi\zeta$, $\eta=v+C(t)\zeta$. (24)에서 s^Ts와 $\eta^TR^{-1}\eta$는 양의 값이다. 그러므로 따름정리 1.를 이용하면 (24)는 (25)와 같은 부등호(inequality) 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &\le -2\alpha V+\zeta^T[-\gamma^{-2}L(t)^TL(t)]\zeta\\ &+ 2k\|\zeta\|^3+w^TQ^{-1}w-s^Ts\\ &+ v^TR^{-1}v-\eta^TR^{-1}\eta\end{aligned} \tag{25}$$

추정오차가 $\|\zeta\|\le\varepsilon_3$을 만족하면 (25)는 (26)을 만족한다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t)) &\le -2\alpha V+(-\gamma^{-2}l_1+2k\|\zeta\|)\|\zeta\|^2\\ &+ w^TQ^{-1}w+v^TR^{-1}v\\ &\le -(2\alpha_1+\frac{\gamma^{-2}l_1p_{1b}}{2})V\\ &+ w^TQ^{-1}w+v^TR^{-1}v\end{aligned} \tag{26}$$

여기서 $\varepsilon_3=\min(\varepsilon,\frac{\gamma^{-2}l_1}{4k})$, α_1은 $[0,\ t]$구간에서 α의 최소 값이며 p_{1b}는 (9)에서 구해진 해의 하한이다. a_b를 (27)과 같이 선택하면 (26)은 (28)과 같다.

$$a_b=2\alpha_1+\frac{\gamma^{-2}l_1p_{1b}}{2} \tag{27}$$

$$\dot{V}(\zeta(t)) \le -a_bV(t)+w^TQ^{-1}w+v^TR^{-1}v \tag{28}$$

(27)은 안정성 정도를 나타내는 계수이다. 식(27)을 적분하면 (29)가 얻어지며 이 식으로부터 식(30)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}V(\zeta(t)) &= \zeta(t)^T\Pi(t)\zeta(t)\le e^{-a_bt}\zeta(0)^T\Pi(0)\zeta(0)\\ &+ a_b^{-1}(\mu^{-1}d_w^2+r^{-1}d_v^2)\end{aligned} \tag{29}$$

여기서 d_w는 w의 상한, d_v는 v의 상한, μ는 Q의 하한 그리고 r는 R의 하한이다.

$$\begin{aligned}\|\zeta(t)\|^2 &\le \frac{p_{2b}}{p_{1b}}e^{-a_bt}\|\zeta(0)\|^2\\ &+ a_b^{-1}\pi_{1b}^{-1}(\mu^{-1}d_w^2+r^{-1}d_v^2)\end{aligned} \tag{30}$$

여기서 π_{1b}는 (9)에서 구해진 $\Pi(t)$의 하한, p_{2b}는 (9)에서 구해진 $P(t)$의 상한이다. 추정오차는 지수 적으로 (31)의 수렴집합으로 수렴한다.

$$D_b=[\zeta\in R\,|\zeta^T(t)\zeta(t)\le a_b^{-1}\pi_{1b}^{-1}(\mu^{-1}d_w^2+r^{-1}d_v^2)] \tag{31}$$

또한, 구성된 비선형 관측기를 H_∞필터 가격함수 측면에서 그 특성을 해석하기 위하여 (26)을 다시 정리하면 (32)와 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta,t) &\le -2\alpha_1V-\frac{\gamma^{-2}l_1}{2}\|\zeta\|^2\\ &+ w^TQ^{-1}w+v^TR^{-1}v\\ &\le -(\frac{2\alpha_1}{l_2p_{2b}}+\frac{\gamma^{-2}l_1}{2l_2})\zeta^T[L(t)^TL(t)]\zeta\\ &+ w^TQ^{-1}w+v^TR^{-1}v\\ &= -\frac{\gamma^{-2}l_1}{2l_2}\mu_c\zeta^T[L(t)^TL(t)]\zeta\\ &+ w^TQ^{-1}w+v^TR^{-1}v\end{aligned} \tag{32}$$

여기서 $\mu_c=(\frac{4\alpha_1}{\gamma^{-2}l_1p_{2b}}+1)$, p_{2b}는 (9)에서 구해진 해의 상한이다. H_∞필터 가격함수를 표현하는 (33)은 (32)를 적분하고 정리하면 얻어진다.

$$\begin{aligned}J &= \frac{\|L\zeta\|_2^2}{\|w\|_{2\ Q^{-1}}^2+\|v\|_{2\ R^{-1}}^2+\zeta(0)^T\Pi(0)\zeta(0)}\\ &< \gamma^2\mu_b^{-1}=\gamma_b^2\end{aligned} \tag{33}$$

여기서 $\mu_b=\mu_a\mu_c$이다. 구성된 비선형 관측기를 H_∞필터 가격함수 측면에서 구해보면 가격함수 J는 새로이 구해진 γ_b^2보다 작게 된다.

수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기의 특성이 자유 매개 변수 값에 따라 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기와 다르다는 것을 알 수 있다. 따라서 관측기의 성능을 개선시키기 위하여 적당한 α_1 값의 범위를 정하는 것이 중요하다. 본 논문에서는 관측기의 안정성 정도, 추정오차의 수렴 범위 및 선형 H_∞필터의 성능 지수 등 세 가지 관점에서 α_1의 값을 결정한다. 먼저 H_∞필터 가격함수 측면에서 비교한다. 특히, 선형 H_∞필터 성능 지수의 특정 값(prespecified level)은 공정잡음, 측정잡음 및 초기 추정오차를 포함하는 잡음들의 에너지에 대한 추정오차의 에너지 비를 의미한다. 따라서 같은 잡음들에 대하여 필터 성능 지수의 특정 값이 작을수록 추정오차를 줄일 수 있음을 의미한다. 어떤 양의 α_1에 대해서도 (32)의 μ_c는 항상 1보다 크다. 따라서 $\mu_a<\mu_b$는 항상 성립한다. 그러므로 (23)과 (33)에서 $\gamma_b^2<\gamma_a^2$는 항상 만족한다. 즉, 어떤 양의 α_1에 대해서도 H_∞필터 가격함수 측면에서 자유 매개 변수를 가진 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기의 성능이 그렇지 않은 경우보다 좋아진다.

추정오차의 수렴성 및 안정성 정도의 관점에서 비교하면 다음과 같다. (17)과 (27)의 비를 구해보면 (34)와 같다.

$$\frac{\alpha_b}{\alpha_a}=\frac{2\alpha_1+\frac{\gamma^{-2}l_1p_{1b}}{2}}{\frac{\gamma^{-2}l_1p_{1a}}{2}}=\frac{4\alpha_1\gamma^2}{l_1p_{1a}}+\frac{p_{1b}}{2p_{1a}} \tag{34}$$

(34)에서 $\alpha_1\geq\frac{l_1p_{1a}}{4\gamma^2}$ 이 만족하면 항상 $\alpha_b>\alpha_a$는 만족된다. 즉 자유 매개 변수의 도입으로 관측기의 안정성 정도가 개선된다.

마지막으로 (21)과 (31)을 이용하여 추정오차의 최대 값의 크기를 비교하면 식(35)와 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_b^T\zeta_b}{\zeta_a^T\zeta_a}&=\frac{\alpha_a\pi_{1a}}{\alpha_b\pi_{1b}}=\frac{\gamma^{-2}l_1p_{1a}\pi_{1a}}{(4\alpha_1+\gamma^{-2}l_1p_{1b})\pi_{1b}}\\&=\frac{p_{1a}\pi_{1a}}{(\frac{4\alpha_1}{\gamma^{-2}l_1}+p_{1b})\pi_{1b}}\end{aligned} \tag{35}$$

여기서 $\zeta_a^T\zeta_a$는 (21)의 추정오차 범위에서 최대 값이다. 그리고 $\zeta_b^T\zeta_b$는 (31)의 추정오차 범위에서 최대 값이다. $0<p_{1a}\pi_{1a}\leq1$ 그리고 $0<p_{1b}\pi_{1b}\leq1$의 관계가 성립한다는 사실을 사용하면 $\alpha_1\geq\frac{l_1p_{2b}}{4\gamma^2}$의 범위에서 항상 $\zeta_b^T\zeta_b<\zeta_a^T\zeta_a$는 만족된다. 즉 자유 매개 변수를 사용함으로써 추정오차의 최대 값의 크기를 줄일 수 있다.

지금까지 H_∞필터 리카티 방정식 및 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기를 제시하고 리아프노프 함수를 사용하여 구성된 비선형 관측기의 수렴성, 안정성, 추정오차의 수렴 경향 및 H_∞필터 성능지수 등을 해석하였다. H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기의 경우 기존의 확장형 칼만필터와 달리 리카티 방정식에서 공정잡음과 관련된 $B(t)QB(t)^T$항의 하한이 0인 경우에도 (17)과 같은 최소 안정성 정도를 가짐을 보였다. 그리고 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기는 관측기의 중요한 특성들을 개선시킬 수 있음을 보였다.

IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서 제시된 비선형 관측기의 성능을 분석하기 위하여 속도 보정형 스트랩다운 관성항법시스템을 구성하였다. 특히, 필터를 구성하기 위하여 사용된 오차모델은 모델링 오차를 줄이기 위하여 합형 쿼터니언 오차 모델을 사용하였다[6][7]. 스트랩다운 관성항법시스템에서 항법좌표계(N, E, D)를 기준으로 한 시스템 방정식은 (36)-(40)과 같이 위치[위도: L, 경도: l, 고도: h], 속도 및 자세방정식으로 구성된다[3]-[7].

$$\dot{L}=\frac{v_N}{R_m+h} \tag{36}$$

$$\dot{l}=\frac{v_E}{(R_t+h)\cos L} \tag{37}$$

$$\dot{h}=-v_D \tag{38}$$

$$\dot{v^n}=C_b^nf^b-[2w_{ie}^n+w_{en}^n]\times v^n+g^n \tag{39}$$

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q*[w_{nb}^b] \tag{40}$$

여기서 첨자 i는 관성좌표계, n은 항법좌표계, e는 지구좌표계, b는 항체좌표계를 각각 의미한다. C_b^n은 자세 변환행렬, v는 속도, q는 쿼터니언, f^b는 가속도계 출력, w_{nb}^b는 자이로 출력으로부터 계산된 각 속도, g^n는 중력, R_m는 지구 장반경, R_t는 지구 단반경, $w_{en}^n=[\rho_N\ \ \rho_E\ \ \rho_D]^T$ 그리고 $w_{in}^n=w_{ie}^n+w_{en}^n$이다. 이들 방정식들을 이용하고 오차모델을 유도 할 때 오차의 2차 이상 고차 항들을 무시하고 유도된 오차모델은 (41)-(45)와 같이 위도오차(δL), 경도오차(δl), 고도오차(δh), 속도오차($\delta v^n=[\delta v_N\ \delta v_E\ \delta v_D]^T$) 및 합형 쿼터니언 오차(Additive Quaternion Error) 모델(δq)로 구성된다 [3]-[7].

$$\delta\dot{L}=\frac{R_{mm}\rho_E}{R_m+h}\delta L+\frac{\rho_E}{R_m+h}\delta h+\frac{1}{R_m+h}\delta v_N \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{l}&=\frac{\rho_N}{\cos L}(\tan L-\frac{R_{tt}}{R_t+h})\,\delta L\\&-\frac{\rho_N\sec L}{R_t+h}\delta h+\frac{\sec L}{R_t+h}\delta v_E\end{aligned} \tag{42}$$

$$\delta\dot{h}=-\delta v_D \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{v^n}&=-2[C_b^nf^b]\times Y^T\delta q+2C_b^nf^bQ_b^n\delta q-[2w_{ie}^n\\&+w_{en}^n]\times\delta v^n+C_b^n\delta f^b+v^n\times(2\delta w_{ie}^n+\delta w_{en}^n)+\delta g^n\end{aligned} \tag{44}$$

$$\delta\dot{Q}=M\delta Q+\frac{1}{2}(U\delta\omega_{ib}^b-Y\delta\omega_{in}^n) \tag{45}$$

여기서 δf^b는 가속도계 오차, δw_{ib}^b는 자이로 오차, δg^n는 중력오차, $R_{mm}=\frac{\partial R_m}{\partial L}$, $R_{tt}=\frac{\partial R_t}{\partial L}$,

$$M\equiv\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}0&-\omega_X&-\omega_Y&-\omega_Z\\\omega_X&0&\omega_Z&-\omega_Y\\\omega_Y&-\omega_Z&0&\omega_X\\\omega_Z&\omega_Y&-\omega_X&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-\omega_N&-\omega_E&-\omega_D\\\omega_N&0&-\omega_D&\omega_E\\\omega_E&\omega_D&0&-\omega_N\\\omega_D&-\omega_E&\omega_N&0\end{bmatrix}\right\},$$

$$Y=\begin{bmatrix}-\tilde{q}_1&-\tilde{q}_2&-\tilde{q}_3\\\tilde{q}_0&\tilde{q}_3&-\tilde{q}_2\\-\tilde{q}_3&\tilde{q}_0&\tilde{q}_1\\\tilde{q}_2&-\tilde{q}_1&\tilde{q}_0\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}-\tilde{q}_1&-\tilde{q}_2&-\tilde{q}_3\\\tilde{q}_0&-\tilde{q}_3&\tilde{q}_2\\\tilde{q}_3&\tilde{q}_0&-\tilde{q}_1\\-\tilde{q}_2&\tilde{q}_1&\tilde{q}_0\end{bmatrix}.$$

또한, 측정방정식의 오차모델은 (46)과 같다.

$$y(t)=C(t)\ x(t)+v(t) \tag{46}$$

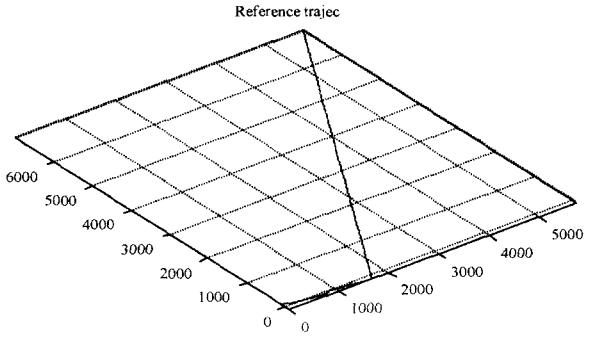

그림 1. 기준 궤적.
Fig. 1. Reference trajectory.

여기서 $C(t)=[0_{3\times3},\ I_{3\times3},\ 0_{3\times10}]$

상태변수는 위치(3개), 속도(3개), 자세(4개), 가속도계 바이어스(3개) 및 자이로 바이어스(3개)인 16차로 구성하였다.

시뮬레이션에 사용된 관성측정기는 중급 정도의 성능이며, 주요오차는 자이로 바이어스(3 deg/hr), 자이로 척도계수오차(500 ppm), 가속도계 바이어스오차(1000 ug) 및 척도계수오차(200 ppm)를 고려하였으며 자이로 바이어스와 가속도계 바이어스는 랜덤상수로 가정하였다. 관성센서들의 출력은 일반적으로 관성측정기에서 많이 사용하는 A/F(Analog to Frequency) 변환기를 통하여 얻었다. 시뮬레이션을 위하여 본 논문에서는 큰 초기 자세오차를 가진 시스템을 고려한다. 따라서 수평축 자세오차는 10도, 기수각 오차는 30도를 각각 가정하였다. 기준 궤적은 그림 1과 같다. 초기에 시스템의 가관측성을 증가시키기 위하여 기수각 자세를 세 번 변화시킨 후 10m/sec의 속도로 직진하는 항해궤도이다.

시뮬레이션은 확장형 칼만필터(e.k.), H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기(h.n.o.)와 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기(m.h.n.o.)를 이용하여 각각 수행하였으며 모든 필터는 간접 되먹임 방식으로 구현하였다. 관측기를 구성할 때 (8)과 (9)의 $L(t)$는 (47)과 같이 구성하였으며, γ는 3.0, 그리고 자유 매개 변수 α는 다음과 같이 구간별로 $200>t\geq0$에 대하여 0.0042, $450>t\geq200$에 대하여 0.0012 그리고 $t\geq450$에 대하여 0.00005625를 각각 선택하였다.

$$L(t)=\begin{bmatrix} 0.001I_{3\times3} & 0 & 0 \\ 0 & 1I_{3\times3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.01I_{10\times10} \end{bmatrix} \tag{47}$$

시뮬레이션을 수행하기 전에 앞에서 제시한 식들과 필터 구성 변수들로부터 3절에서 제시한 가정들이 만족되는지 확인하였다. 일반적으로 확장형 칼만필터와 달리 H_∞필터 리카티 방정식을 사용하는 비선형 관측기들의 경우에 가정 1을 만족하도록 최소 γ을 선택한다. 그리고 A/F(Analog to Frequency) 변환기를 통하여 얻어지는 자이로와 가속도계의 출력으로부터 구해지는 공정잡음은 백색잡음보다는 가정 2의 잡음에 속한다. 측정잡음 또한 가정 2를 만족한다. (46)과 (47)로부터 가정 4와 가정 3이 각각 만족됨을 알 수 있다. 관성항법시스템의 경우 가정 5는 만족된다. 따라서 가정들이 모두 만족됨을 알 수 있다.

시뮬레이션은 몬테칼로 방식으로 1000초 동안 수행하였고, 수행한 시뮬레이션 횟수는 20회이며, 관측기의 갱신 주기는 0.1초이다. 기수각 오차의 시뮬레이션 결과는 그림 2와 같으며 1000초 후의 기수각 오차는 표 1과 같이 주어진다. 또한 위치오차는 그림 3과 같으며 1000초 후의 위치오차는 표 1과 같다. 시뮬레이션에서 비록 H_∞필터 리카티 방정식을 가진 비선형 필터의 성능은 확장형 칼만필터의 성능과 유사하다. 그러나 3절에서 해석한 바와 같이 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 필터는 확장형 칼만필터 보다 여러 가지 장점을 가진다. 즉, 비선형 관측기는 최소의 안정성 정도가 보장되며, 공정잡음, 측정잡음 및 비선형 시스템을 선형화하는 과정에서 발생하는 불확실성에 대하여 강인성을 가진다. 그러나, 일반적으로 관성항법시스템에 사용된 확장형 칼만필터는 최소한의 안정성뿐만 아니라 강인성도 보장하지 못한다. 그림 2, 그림 3 그리고 표 1로부터 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 관측기의 성능과 확장형 칼만필터의 성능을 비교하면 다음과 같다. 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 관측기는 확장형 칼만필터 보다 기수각 오차는 약 1.0도 개선되고 위치오차는 약 30%정도 감소하였다. 또한 그림에서와 같이 제안된 관측기의 경우 확장형 칼만필터 보다 자세오차의 수렴성이 개선되며 위치오차의 증가 속도는 느리며 일정하게 한정됨을 보여준다. 따라서 위의 결과들로부터 수정된 H_∞필터

표 1. 1000초 후 필터에 따른 수직축 자세오차 및 위치오차.
Table 1. Position error and heading error after 1000 seconds according to the filters.

	e.k.	h.n.o.	m.h.n.o.
수직축 자세오차 (arcmin)	105	100	45
위치오차(C.E.P.) (m)	76	78	55

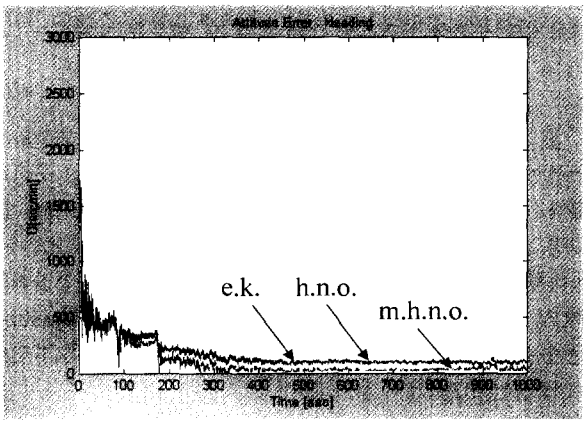

그림 2. 기수각 오차.
Fig. 2. Heading error.

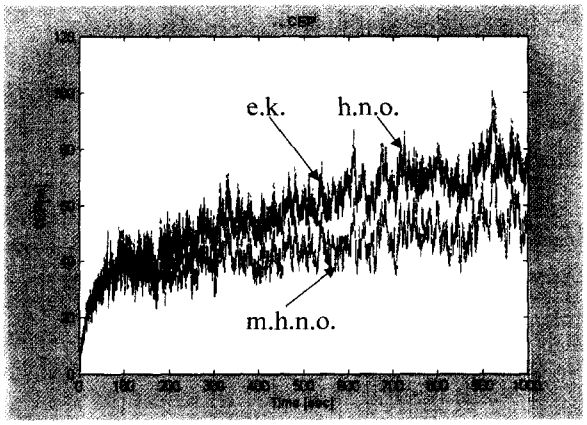

그림 3. 위치오차(C.E.P.).
Fig. 3. Position error(C.E.P.).

리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기는 확장형 칼만필터와 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기보다 관성항법시스템에서 위치오차 및 자세오차를 줄이는데 효과적임을 알 수 있다.

V. 결론

스트랩다운 관성항법시스템을 위하여 H_∞필터 리카티 방정식 및 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기를 제시하였다. 리아프노프 함수를 사용하여 구성된 비선형 관측기의 수렴성, 안정성, 추정오차의 수렴 경향 및 H_∞필터 성능지수 등을 해석하였다. 해석 결과는 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기가 특성이 개선됨을 보였다. 그리고 제시된 관측기와 모델링 오차를 줄이기 위해 합형 쿼터니언 오차모델을 사용하여 속도 보정형 관성항법시스템을 구성하였으며, 시뮬레이션을 수행한 결과는 수정된 H_∞필터 리카티 방정식을 사용한 비선형 관측기가 큰 초기 자세오차를 가진 관성항법시스템에서 자세오차 및 위치오차를 줄이는데 효과적임을 보였다.

참고문헌

[1] R. G. Brown and P. Y. C. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

[2] J. A. Farrell and M. Barth, *The Global Positioning System & Inertial Navigation*, Prentice-Hall, 1999.

[3] G. M. Siouris, Aerospace Avionics System: *A Modern Synthesis*, Academic Press, 1993.

[4] A. Weinreb and I. Y. Bar-Itzhack, "The Psi-ang error equation in strapdown inertial navigation systems," IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 14, no. 3, pp. 539-542, May, 1978.

[5] D. Chung, J. G. Lee, G. C. Park, and H.-W. Park, "Strapdown INS error model for multiposition alignment," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 1362-1366 Oct., 1996.

[6] M.-J. Yu. J. G. Lee, and H.-W. Park, "Comparision of SDINS In-Flight alignment using equivalent error models," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 35, no. 3, pp. 1046-1054 July, 1999.

[7] M.-J. Yu. H.-W. Park, and C. B. Jeon, "Equivalent nonlinear error models of strapdown inertial navigation system," *In Preceedings of the AIAA 1997 GNC Conference*, Aug., 1997; AIAA Paper 97-3536.

[8] M. Boutayeb and D. Aubry, "A strong rracking extended kalman observer for nonlinear discrete-time systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 8, pp. 1550-1556, Aug., 1999.

[9] K. Rief, F. Sonnemann, and R. Unbehauen, "An EKF-Based nonlinear observer with a prescribed degree of stability," *Automatica*, vol. 34, no. 9, pp. 1119-1123, 1998.

[10] K. Rief. S. Gunther, E. Yaz, and R. Unbehauen, "Stochastic stability of the discrete-time extended kalman filter," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 4, pp. 714-728, April, 1999.

[11] K. Rief, F. Sonnemann, and R. Unbehauen, "Nonlinear state observer using H_∞-Filtering riccati design," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 203-208, January, 1999.

[12] K. M. Nagpal and P. P. Khargonekar, "Filtering and smoothing in an H_∞ setting," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, no. 2, pp. 152-166, Feb., 1991.

[13] U. Shaked and Y. Theodor, "H_∞-Optimal estimation: a tutorial," *Proc. of the 31st Conf. Dec. and Contr.*, pp. 2278-2286, Dec., 1992.

[14] M. Green and D. J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, 1996.

[15] B. Hassibi, A. H. Sayed, and T. Kailath, "Linear estimation in krein spaces-Part II: applications," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 41, no. 1, pp. 34-49, Jan., 1996.

[16] X. Yu and C. S. Hsu, "Reduced order H_∞ filter design for discrete time-variant systems," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 7, pp. 797-809, 1997.

유 명 종

1987년 경북대학교 공대 전자공학과 졸업. 1990년 동 대학원 석사. 1990년~현재 국방과학연구소 선임연구원. 1998년~현재 서울대학교 공대 전기 컴퓨터공학부 박사과정 재학 중. 관심분야는 관성항법시스템, 오차 모델링, 강인 필터링 등.

이 장 규

1971년 서울대학교 공대 전기공학과 졸업. 1974년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(석사). 1977년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(공학박사). 1977년~1981년 The Analytic Sciences Corporation 연구원(Technical Staff). 1981년~1982년 Charles Draper Laboratory 연구원(Technical Staff). 1982년~현재 서울대학교 전기 컴퓨터공학부 교수. 1994년~현재 서울대학교 자동제어 특화연구센터 소장. 관심분야는 관성항법시스템, 계수식별, 강인필터링, 자율주행항체(AVG), 표적 추적 시스템 등.

박 찬 국

1985년 서울대학교 제어계측공학과 졸업. 1987년 동 대학원 석사. 1993년 동 대학원 박사. 1993년 서울대학교 제어계측신기술연구센터 박사후 연구원. 1994년~현재 광운대학교 제어계측공학과 조교수/부교수. 1998년 미국 UCLA 기계항공공학과 방문연구원. 1997년~현재 제어자동화시스템 공학회 논문지 편집위원. 연구관심분야는 관성항법시스템 개발, GPS/INS 결합기법, 저급 IMU 응용, 칼만필터 설계.

심 덕 선

1984년 서울대학교 제어계측공학과 졸업, 1986년 동 대학원 석사, 1993년 University of Michigan 항공우주공학과 졸업(공학박사), 1994년 1월~1995년 1월 University of Michigan 전기 및 컴퓨터공학과 Post-doc, 1995년 3월~현재 중앙대학교 전자전기공학부 부교수, 관심분야는 견실 제어, 관성항법시스템, GPS, 지능교통시스템 등.