

계면균열을 갖는 반무한체에 접합된 직교이방성 층의 좌굴

정경문*, 범현규**

Buckling of an Orthotropic Layer Bonded to a Half-Space with an Interface Crack

Kyoung Moon Jeong* and Hyeon Gyu Beom**

ABSTRACT

The buckling of an orthotropic layer bonded to an orthotropic half-space with an interface crack subjected to compressive load under plane strain is analyzed. General solution to the stability equations describing the buckling behavior of both the layer and the half-space is expressed in terms of displacement functions. The displacement functions are represented by the solution of Cauchy-type singular integral equations, which are numerically solved. Numerical results of the critical buckling loads are presented for various geometric parameters and material properties of both the layer and half-space.

Key Words : Orthotropic(직교이방성), Interface crack(계면균열), Half-space(반무한체), Composite material(복합 재료), Delamination(층간박리), Buckling load(좌굴하중)

1. 서론

복합재료를 적층시켜 만든 구조물은 제조과정이나 저속의 축방향 충격 때문에 자주 발견되는 층간박리로 인하여 여러 가지의 손실을 가져온다. 이러한 손실은 비록 인장강도에 영향을 주지 못하더라도 압축하중을 받는 복합재료 구조의 하중수행능력을 크게 감소시킨다. 층간박리가 충분히 크면, 적층판은 비교적 작은 압축하중에서 좌굴이 발생한다. 결국, 층간박리는 좌굴 후 진전하게 되어 재료의 안정성에 손상을 준다. 따라서 이러한 층간박리의 존재로 인한 강도의 감소에 대한 이해가 복합재

료 구조의 설계에 아주 중요하다.

적층된 구조물의 압축강도에 대한 층간박리의 영향에 대해서는 많은 연구가들이 수행해왔다⁽¹⁻⁴⁾. 그들은 보(beam)와 평판의 고전적인 구조역학이론(classical structural mechanics theory)을 적용하여 좌굴하중을 평가하였다. 그러나 고전적인 구조이론에서는 전단변형을 무시하였고 균열선단에서의 응력집중을 나타낼 수가 없다. 그러므로, 탄성학의 평형방정식과 균열선단에서의 정확한 경계조건을 이용한 해석이 필요하다.

Dorris와 Nemat-Nasser⁽⁵⁾와 Keer 등⁽⁶⁾은 Kirchhoff 응력의 Janmann rate에 대한 평형방정식을 층과 반

... 2001년 5월 21일 접수

* 전남대학교 기계공학과 대학원

** 전남대학교 기계공학과 정회원

무한체에 적용하여 좌굴하중을 평가하였다. 또한 층과 반무한체 사이의 원형균열⁽⁷⁾과 계면균열⁽⁸⁾에 대하여 각각 좌굴하중을 계산하였다. 최근에는 Wang과 Takao⁽⁹⁾는 계면균열이 있는 반무한체에 접합된 등방성 층에 대한 좌굴을 해석하였다. 실제로 적층구조에서 박리된 층이 반무한체와 다른 재료특성을 갖기 때문에 좌굴하중에 대한 층의 재료특성에 대한 영향이 중요하다. 최근까지의 연구는 층과 반무한체의 재료가 같거나 다른 등방성 재료로 이루어진 구조에 대하여 좌굴을 평가하였다.

본 연구의 목적은 좌굴된 상태의 평형조건을 층과 반무한체에 각각 적용하여 좌굴하중에 미치는 직교이방성의 영향에 대하여 해석하고자 한다. 계면균열을 갖는 직교이방성 층이 등방성 또는 직교이방성 반무한체의 재료로 접합되었을 때, 재료의 직교이방성의 영향과 계면균열의 크기가 좌굴하중에 미치는 영향을 해석한다.

2. 문제의 수식화

평면 변형률 하에 계면균열을 갖는 반무한체에 접합된 직교이방성 층의 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 두께 h 를 갖는 직교이방성 층은 계면균열 $2a$ 를 제외하고 반무한체에 완전하게 접합되어있다. 적층구조는 자유표면과 평행하게 균일한 압축변형률 ϵ_0 를 받고 있다. Fig. 1에서 괄호 안의 1과 2는 각각 층과 반무한체를 나타내며 앞으로 사용하게 될 수식에서 상첨자로 표기하였다.

직교이방성 재료에 대한 응력-변위관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(i)} &= C_{11}^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + C_{12}^{(i)} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial y} \\ \sigma_{yy}^{(i)} &= C_{12}^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + C_{22}^{(i)} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial y} \\ \sigma_{xy}^{(i)} &= C_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} \right), \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $i=1, 2$ 는 각각 직교이방성 층과 반무한체를 나타내고, σ_{ij} 는 응력, u 와 v 는 x, y 방향의 미소변위이고, C_{ij} 는 직교이방성 재료의 강성계수이다. 탄성 안정성(elastic stability)^(10,11)을 이용하여 좌굴된 상태의 평형조건은 미소변위 증분과 압축하중, $P^{(i)}$ 으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

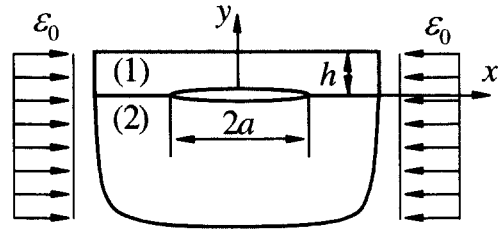


Fig. 1 Geometry of an orthotropic layer bonded to a half-space with interface crack

$$\begin{aligned} C_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} + C_{66}^{(i)} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial y^2} \\ + (C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)}) \frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial x \partial y} - P^{(i)} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} = 0 \\ C_{66}^{(i)} \frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial x^2} + C_{22}^{(i)} \frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial y^2} \\ + (C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)}) \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x \partial y} - P^{(i)} \frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (i=1, 2) \quad (2)$$

여기서 체력(body force)은 무시하고, 압축하중, $P^{(i)}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \frac{E_{11}^{(1)}}{1 - \nu_{21}^{(1)} \nu_{12}^{(1)}} \epsilon_0 \\ P^{(2)} &= \frac{E_{11}^{(2)}}{E_{11}^{(1)}} \left(\frac{1 - \nu_{21}^{(1)} \nu_{12}^{(1)}}{1 - \nu_{21}^{(2)} \nu_{12}^{(2)}} \right) P^{(1)} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 E 와 ν 는 탄성계수와 Poisson 비를 나타낸다. 식 (2)에서 하중 P 가 영(zero)이 되면 좌굴 전 상태의 평형방정식 ($\sigma_{ij,j} = 0$)이 된다. 미분방정식을 풀기 위해 변위함수 $\phi^{(i)}(x, y)$ 를 도입하여 변위를 다음과 같이 가정한다^(8,9).

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= - \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial x \partial y} \\ v^{(i)} &= \left(\frac{C_{11}^{(i)} - P^{(i)}}{C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)}} \right) \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{C_{66}^{(i)}}{C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)}} \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (2)에 대입하면, 첫 번째 방정식은 자동적으로 만족하고, 두 번째 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_1^{(i)} \frac{\partial^4 \phi^{(i)}}{\partial x^4} + a_2^{(i)} \frac{\partial^4 \phi^{(i)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi^{(i)}}{\partial y^4} = 0 \quad (5)$$

여기서 $a_1^{(i)}$ 과 $a_2^{(i)}$ 는 다음과 같다.

$$a_1^{(i)} = \frac{(C_{66}^{(i)} - P^{(i)})(C_{11}^{(i)} - P^{(i)})}{C_{22}^{(i)}C_{66}^{(i)}} \quad (6)$$

$$a_2^{(i)} = \frac{C_{66}^{(i)} - P^{(i)}}{C_{22}^{(i)}} + \frac{C_{11}^{(i)} - P^{(i)}}{C_{66}^{(i)}} - \frac{(C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)})^2}{C_{22}^{(i)}C_{66}^{(i)}}$$

식 (5)의 미분방정식을 풀기 위해 변위함수 $\phi^{(i)}(x, y)$ 는 다음과 같이 가정한다.

$$\phi^{(i)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f^{(i)}(y, t) \cos(tx) dt, \quad (i=1, 2) \quad (7)$$

식 (7)을 식 (5)에 대입하면 변위함수 $\phi^{(i)}(x, y)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (A_1 e^{t a_{11} y} + B_1 e^{t a_{12} y} + C_1 e^{-t a_{11} y} + D_1 e^{-t a_{12} y}) \cos(tx) dt$$

$$\phi^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (A_2 e^{t a_{21} y} + B_2 e^{t a_{22} y}) \cos(tx) dt \quad (8)$$

여기서 미지의 함수, A, B, C, D 의 하첨자 1과 2는 각각 층과 반무한체를 나타낸다. 그리고 a_{ij} , ($i, j=1, 2$)는 압축하중, $P^{(i)}$ 와 재료상수의 함수로 이루어지고 다음과 같다.

$$a_{11} = \sqrt{\frac{a_2^{(i)} + \sqrt{(a_2^{(i)})^2 - 4a_1^{(i)}}}{2}} \quad (9)$$

$$a_{12} = \sqrt{\frac{a_2^{(i)} - \sqrt{(a_2^{(i)})^2 - 4a_1^{(i)}}}{2}}$$

식 (8)을 식 (4)에 대입하고, 직교이방성 재료에 대한 응력-변위 증분 관계를 이용하여 층($i=1$)과 반무한체($i=2$)에 대한 변위와 응력 증분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^2 (A_i a_{11} e^{t a_{11} y} + B_i a_{12} e^{t a_{12} y} - C_i a_{11} e^{-t a_{11} y} - D_i a_{12} e^{-t a_{12} y}) \sin(tx) dt$$

$$v^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^2 (A_i \beta_i e^{t a_{11} y} + B_i \gamma_i e^{t a_{12} y} + C_i \beta_i e^{-t a_{11} y} + D_i \gamma_i e^{-t a_{12} y}) \cos(tx) dt$$

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^3 (A_i a_{1a} e^{t a_{11} y} + B_i a_{1b} e^{t a_{12} y} - C_i a_{1a} e^{-t a_{11} y} - D_i a_{1b} e^{-t a_{12} y}) \cos(tx) dt$$

$$- C_i a_{1a} e^{-t a_{11} y} - D_i a_{1b} e^{-t a_{12} y}) \cos(tx) dt$$

$$\sigma_{yy}^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^3 (A_i a_{1c} e^{t a_{11} y} + B_i a_{1d} e^{t a_{12} y} - C_i a_{1c} e^{-t a_{11} y} - D_i a_{1d} e^{-t a_{12} y}) \cos(tx) dt$$

$$\sigma_{xy}^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^3 C_{66}^{(i)} [A_i (a_{11}^2 - \beta_i) e^{t a_{11} y} + B_i (a_{12}^2 - \gamma_i) e^{t a_{12} y} + C_i (a_{11}^2 - \beta_i) e^{-t a_{11} y} + D_i (a_{12}^2 - \gamma_i) e^{-t a_{12} y}] \sin(tx) dt$$

($i=1, 2$) (10)

여기서 위 식의 계수들은 다음과 같다.

$$C_2 = 0, \quad D_2 = 0$$

$$a_{1a} = a_{11} (C_{11}^{(i)} + \beta_i C_{12}^{(i)}), \quad a_{1b} = a_{12} (C_{11}^{(i)} + \gamma_i C_{12}^{(i)})$$

$$a_{1c} = a_{11} (C_{12}^{(i)} + \beta_i C_{22}^{(i)}), \quad a_{1d} = a_{12} (C_{12}^{(i)} + \gamma_i C_{22}^{(i)})$$

$$\beta_i = \frac{a_{11}^2 C_{66}^{(i)} - C_{11}^{(i)} + P^{(i)}}{C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)}}, \quad \gamma_i = \frac{a_{12}^2 C_{66}^{(i)} - C_{11}^{(i)} + P^{(i)}}{C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)}}. \quad (11)$$

미지의 함수 $A_i, B_i, C_i, D_i, A_2, B_2$ 는 다음과 같은 계면에서의 연속조건과 $y=h$ 에서의 경계조건에 의해 결정된다.

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, h) = 0, \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x, h) = 0, \quad |x| < \infty$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{yy}^{(2)}(x, 0), \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad |x| < \infty$$

$$u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0), \quad v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0), \quad |x| > a$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{yy}^{(2)}(x, 0) = 0, \quad |x| < a$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0, \quad |x| < a \quad (12)$$

식 (10)을 식 (12)에 대입하면 다음과 같다.

$$A_1 a_{1c} e^{t a_{11} h} + B_1 a_{1d} e^{t a_{12} h} - C_1 a_{1c} e^{-t a_{11} h} - D_1 a_{1d} e^{-t a_{12} h} = 0$$

$$A_1 (a_{11}^2 - \beta_1) e^{t a_{11} h} + B_1 (a_{12}^2 - \gamma_1) e^{t a_{12} h} + C_1 (a_{11}^2 - \beta_1) e^{-t a_{11} h} + D_1 (a_{12}^2 - \gamma_1) e^{-t a_{12} h} = 0$$

$$A_1 a_{1c} + B_1 a_{1d} - C_1 a_{1c} - D_1 a_{1d} = A_2 a_{2c} + B_2 a_{2d}$$

$$C_{66}^{(1)} [A_1 (a_{11}^2 - \beta_1) + B_1 (a_{12}^2 - \gamma_1) + C_1 (a_{11}^2 - \beta_1) + D_1 (a_{12}^2 - \gamma_1)] = C_{66}^{(2)} [A_2 (a_{21}^2 - \beta_2) + B_2 (a_{22}^2 - \gamma_2)]$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^2 [A_1 a_{11} + B_1 a_{12} - C_1 a_{11} - D_1 a_{12} - A_2 a_{21} - B_2 a_{22}] \sin(tx) dt = 0$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^2 [A_1 \beta_1 + B_1 \gamma_1 + C_1 \beta_1 + D_1 \gamma_1 - A_2 \beta_2 - B_2 \gamma_2] \cos(tx) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^3 (A_2 \alpha_{2c} + B_2 \alpha_{2d}) \cos(tx) dt &= 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^3 [A_2 (\alpha_{21}^2 - \beta_2) + B_2 (\alpha_{22}^2 - \gamma_2)] \sin(tx) dt &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 미지함수 보다 방정식의 수가 더 많으므로 두 개의 새로운 미지함수⁽¹²⁾를 이용한다.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{d}{dx} [u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0)] \\ f_2(x) &= \frac{d}{dx} [v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0)] \end{aligned} \quad (14)$$

Fig. 1에서 $f_1(x)$ 와 $f_2(x)$ 는 계면에서 균열을 제외한 접합 면에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad |x| > a \quad (15)$$

식 (10)의 변위를 식 (14)에 대입하고 식 (15)을 이용하면 Fourier 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} t^2 [A_1 \alpha_{11} + B_1 \alpha_{12} - C_1 \alpha_{11} - D_1 \alpha_{12} \\ - A_2 \alpha_{21} - B_2 \alpha_{22}] &= F_1(t) \\ t^2 [A_1 \beta_1 + B_1 \gamma_1 + C_1 \beta_1 + D_1 \gamma_1 - A_2 \beta_2 - B_2 \gamma_2] &= F_2(t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $F_1(t)$ 와 $F_2(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{1}{t} \int_0^a f_1(\xi) \cos(t\xi) d\xi \\ F_2(t) &= \frac{1}{t} \int_0^a f_2(\xi) \sin(t\xi) d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

식 (13)의 처음 네 개의 방정식과 식 (16)으로부터 6개의 미지함수는 $f_1(x)$ 와 $f_2(x)$ 의 항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 R_{11}(t) + D_1 R_{12}(t) \\ B_1 &= C_1 R_{21}(t) + D_1 R_{22}(t) \\ A_2 &= C_1 R_{31}(t) + D_1 R_{32}(t) \\ B_2 &= C_1 R_{41}(t) + D_1 R_{42}(t) \\ C_1 &= \frac{1}{t^2 \Delta} [F_1(t) R_{62}(t) - F_2(t) R_{52}(t)] \\ D_1 &= \frac{1}{t^2 \Delta} [F_2(t) R_{51}(t) - F_1(t) R_{61}(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Delta = R_{51}(t) R_{62}(t) - R_{61}(t) R_{52}(t)$$

여기서 $R_{ij}(t)$, ($i = 1, \dots, 6; j = 1, 2$)는 부록에 나타내었다.

식 (13)의 나머지 네 개의 적분방정식과 식 (16), (17)과 (18)를 이용하여 단순한 수식조합을 수행하면 다음과 같은 제 2종 제차(homogeneous) Cauchy 특이적분방정식(singular integral equations)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_1 f_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{f_2(\xi)}{\xi - x} d\xi \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a [f_1(\xi) K_{11}(\xi, x) + f_2(\xi) K_{12}(\xi, x)] d\xi = 0 \\ - \omega_2 f_2(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^x \frac{f_1(\xi)}{\xi - x} d\xi \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a [f_1(\xi) K_{21}(\xi, x) + f_2(\xi) K_{22}(\xi, x)] d\xi = 0 \\ \int_{-a}^a f_1(\xi) d\xi = 0, \quad |x| < a. \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 ω_1 과 ω_2 는 재료상수와 압축하중으로 이루어진 알고 있는 함수이고, 커널(kernel) K_{ij} , 또한, 알고 함수이며 부록에 나타내었다.

식 (19)의 특이적분방정식을 풀기 위해서는 수치해석이 필요하다. Gauss-Chebyshev 적분공식을 적용하면 적분방정식은 제차 연립 방정식으로 바뀌어진다. 그 때, 좌굴하중 P_{cr} 을 계산할 수 있다.

3. 수치 해석

식 (19)의 적분방정식을 계산하기 위하여 변수 치환 $\xi = as, x = at$ 와 $f_1^*(s) = f_1(as)$, $f_2^*(s) = f_2(as)$, $K_{ij}^*(s, t) = aK_{ij}(as, at)$ 의 관계를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_1 f_1^*(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_2^*(s)}{s - t} ds \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [f_1^*(s) K_{11}^*(s, t) + f_2^*(s) K_{12}^*(s, t)] ds = 0 \\ - \omega_2 f_2^*(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_1^*(s)}{s - t} ds \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [f_1^*(s) K_{21}^*(s, t) + f_2^*(s) K_{22}^*(s, t)] ds = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 f_1^*(s) ds = 0, \quad |d| < 1 \quad (20)$$

여기서 상첨자 *는 변환 후의 양을 나타낸다. Cauchy 특이적분과 관련된 Muskhelishvili의 이론⁽¹³⁾을 토대로, 식 (20)의 일반해는 복소함수의 형태로 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$f_1^*(s) + if_2^*(s) = \frac{g_1^*(s) + ig_2^*(s)}{(1-s^2)^{1/2+i\gamma}} \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{1 - \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \right)$$

식 (21)의 실수부와 허수부를 분리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽⁹⁾.

$$f_1^*(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} [g_1^*(s) \cos \theta - g_2^*(s) \sin \theta] \quad (22)$$

$$f_2^*(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} [g_1^*(s) \sin \theta + g_2^*(s) \cos \theta]$$

여기서 θ 는 $\theta = -\gamma \ln(1-s^2)$ 이다. 식 (22)를 식 (20)에 대입하고, 다음과 같은 Gauss-Chebyshev 적분공식을 적용한다.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(s)}{\sqrt{1-s^2}} \frac{ds}{(s-t)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \psi(s_i) \frac{1}{(s_i-t_k)} \quad (23)$$

$$s_i = \cos \left(\pi \frac{2i-1}{2n} \right), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$t_k = \cos \left(\pi \frac{k}{n} \right), \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

식 (20)에서 $f_1^*(t)$ 와 $f_2^*(t)$ 는 다음과 같이 근사화시킬 수 있다.

$$f_i^*(t_k) = \frac{1}{2} [f_i^*(s_k) + f_i^*(s_{k+1})], \quad (i=1, 2) \quad (24)$$

$f_1^*(t)$, $f_2^*(t)$ 와 K_{ij}^* 의 대칭(symmetry)을 이용하면 식 (20)은 $2m$ 개의 미지수, $g_1^*(s_i)$ 와 $g_2^*(s_i)$, ($i=1, 2, \dots, m$)을 갖는 $2m$ 개의 제차연립 방정식(homogeneous system of equations)으로 줄어들고 s_i 와 t_k 는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$s_i = \cos \left(\pi \frac{2i-1}{4m} \right), \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$t_k = \cos \left(\pi \frac{k}{2m} \right), \quad (k=1, 2, \dots, m-1) \quad (25)$$

본 논문에서는 제차연립 방정식은 나타내지 않았다. 식 (20)은 제차연립 방정식으로 바뀌어지고, $2m$ 개의 미지수, $g_1^*(s_i)$ 와 $g_2^*(s_i)$, ($i=1, 2, \dots, m$)에 대한 유용해(nontrivial solution)가 존재하기 위해서는 행렬식(determinant)이 영(zero)이 된다는 조건을 이용하면 좌굴하중 P_{cr} 를 구할 수 있다.

4. 결과 및 토론

4.1 직교이방성 층/등방성 반무한체

층의 좌굴하중에 대한 수치해석은 이분법(bisection method)을 적용하였다. 식 (25)에서 m 이

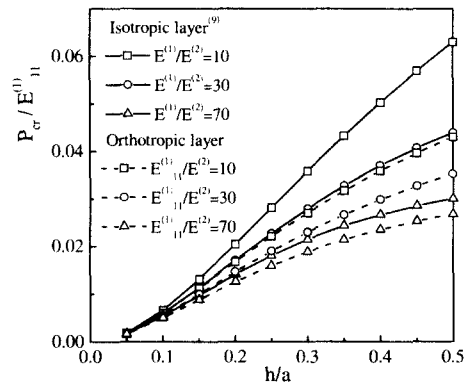


Fig. 2 Variation of buckling load with geometrical parameter, h/a

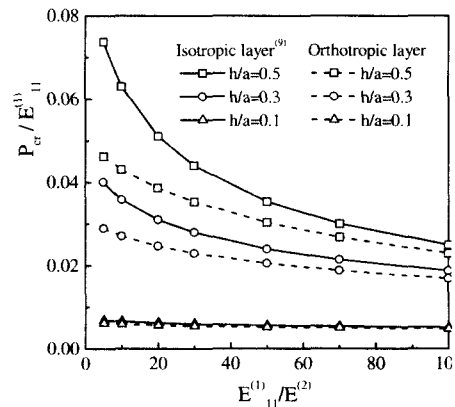


Fig. 3 Variation of buckling load with modulus ratio, $E_{11}^{(1)}/E_{22}^{(2)}$

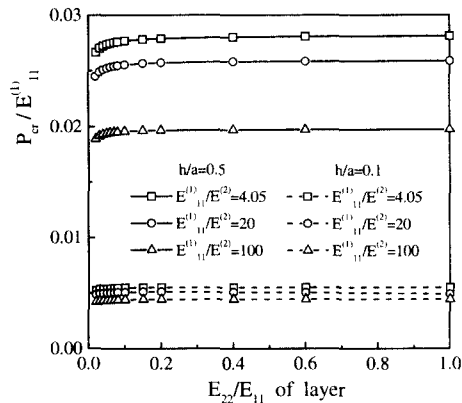


Fig. 4 The effect of E_{22} for orthotropic layer

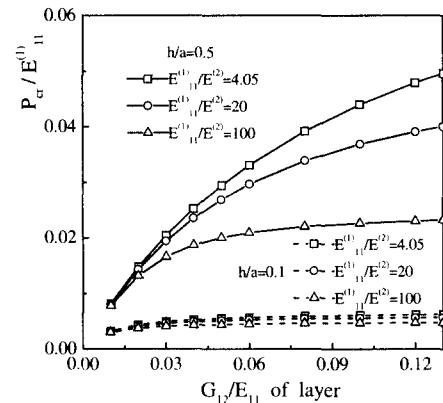


Fig. 5 The effect of G_{12} for orthotropic layer

증가하면서 수렴하는 결과를 얻었다. $m=30$ 일 때 10^{-5} 에서 수렴하여 모든 해석에서 이 값을 적용하였다. 식 (1)의 직교이방성 재료의 물성치를 등방성재료로 가정하여 Wang과 Takao⁽⁹⁾의 해석과 동일한 결과를 얻음으로써 본 연구에서 얻은 해석 결과의 타당성을 검증하였다. 직교이방성 층의 재료는 E-glass/epoxy이고 재료물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{11} &= 3.861 \times 10^4 \text{ MPa}, & E_{22} &= 8.274 \times 10^3 \text{ MPa} \\ G_{12} &= 4.137 \times 10^3 \text{ MPa} & & (26) \\ \nu_{12} = \nu_{13} &= 0.26, & \nu_{32} &= 0.41 \end{aligned}$$

등방성 반무한체의 Poisson 비는 0.3으로 Wang과 Takao⁽⁹⁾의 해석과 일치시켰다. Figs. 2와 3은 직교이방성 층/등방성 반무한체의 좌굴하중과 등방성 층/등방성 반무한체의 좌굴하중⁽⁹⁾을 기하학적 변수(h/a)와 강성비 ($E_{11}^{(1)}/E^{(2)}$)에 따라 비교하였다.

$E_{11}^{(1)}$ 과 $E^{(2)}$ 는 각각 직교이방성 층과 등방성 반무한체의 탄성계수이다. 층의 두께가 증가하거나 균열의 크기가 작아지면서 직교이방성 층과 등방성 층에 대한 좌굴하중의 차이가 증가하였다(Fig. 2). 또한, Fig. 3에서 h/a 가 0.1인 경우에는 재료특성과 강성비에 거의 의존하지 않지만, 강성비가 감소하면서 재료특성에 따라 좌굴하중의 차이가 증가하고, 강성비가 증가하면서 재료특성에 의존하지 않는다.

Figs. 4와 5는 직교이방성 층의 E_{22} 와 G_{12} 의 영향을 세 개의 다른 강성비 ($E_{11}^{(1)}/E^{(2)}$)와 기하학적 변수(h/a)에 따라서 나타내었다. 기하학적 변수가

$h/a=0.1$ 인 경우, 즉, 층의 두께가 작거나 계면균열의 크기가 두께에 비하여 클 때 직교이방성 층의 E_{22} 와 G_{12} 는 좌굴하중에 거의 영향을 주지 않는다. 그리고 h/a 가 커지면서 강성비에 따라 좌굴하중의 차이가 더 증가하였다. 직교이방성 층의 E_{22}/E_{11} 이 0.1이하이고, h/a 의 값이 증가할 때 강성비가 감소하면서 좌굴하중에 미치는 영향이 크다는 것을 알 수 있다(Fig. 4). 직교이방성 층의 G_{12}/E_{11} 이 0.05이상이고 강성비가 100일 때 층의 G_{12} 의 영향에 거의 의존하지 않는다. 그러나 h/a 가 크고 G_{12} 가 감소하면서 좌굴하중은 급격하게 감소한다(Fig. 5). 따라서 직교이방성이 좌굴에 미치는 영향은 h/a 와 재료 물성치 변화에 매우 큰 영향을 받는다.

4.2 직교이방성 층/직교이방성 반무한체

층과 반무한체가 직교이방성 재료이고 접합면에 계면균열이 존재하는 경우를 생각하자. 직교이방성 재료의 반무한체는 E-glass/epoxy로 이전단락에서 물성치를 나타내었다. 직교이방성 층의 재료는 AS4/3501-6 graphite/epoxy이고 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{11} &= 1.565 \times 10^5 \text{ MPa}, & E_{22} &= 1.041 \times 10^4 \text{ MPa} \\ G_{12} &= 7.102 \times 10^3 \text{ MPa} & & (27) \\ \nu_{12} = \nu_{13} &= 0.31, & \nu_{32} &= 0.49 \end{aligned}$$

Figs. 6과 7은 직교이방성 재료로 층과 반무한체가 접합되었을 때의 무차원화된 좌굴하중을 기하학적 변수(h/a)와 강성비 ($E_{11}^{(1)}/E_{11}^{(2)}$)에 따라 비교하였다.

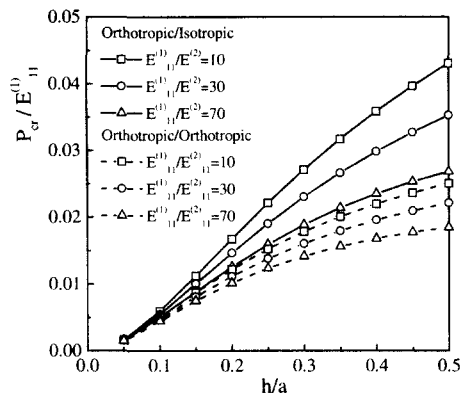


Fig. 6 Variation of buckling load with geometrical parameter, h/a

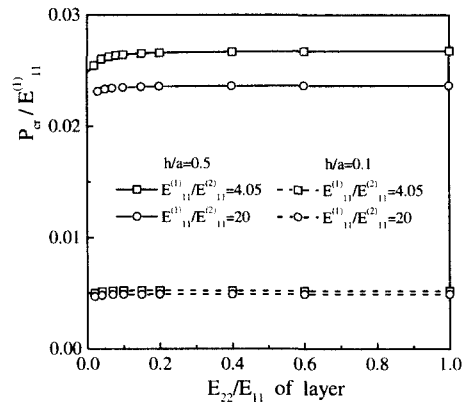


Fig. 8 The effect of E_{22} for orthotropic layer

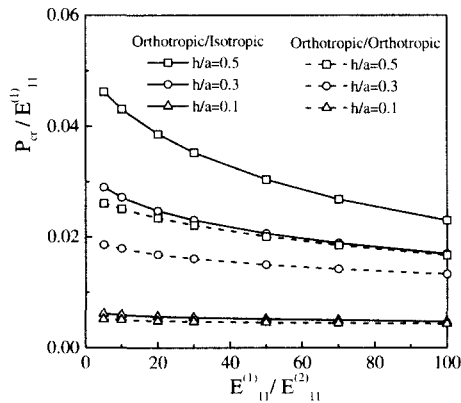


Fig. 7 Variation of buckling load with and modulus ratio, $E_{11}^{(1)}/E_{11}^{(2)}$

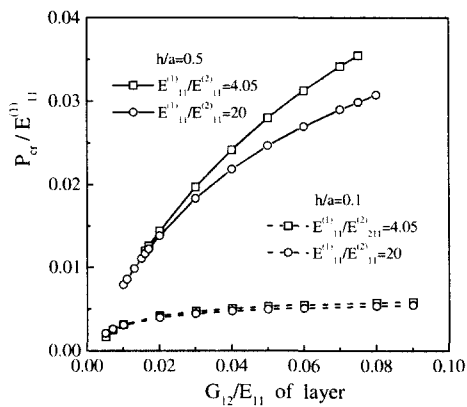


Fig. 9 The effect of G_{12} for orthotropic layer

$E_{11}^{(1)}$ 과 $E_{11}^{(2)}$ 는 각각 직교이방성 층과 반무한체의 탄성계수이다. 층과 반무한체에 대하여 직교이방성의 강성비를 무차원화시킬 때 11방향의 강성비 ($E_{11}^{(1)}/E_{11}^{(2)}$)만을 변화시키고, 다른 강성비 E_{22}/E_{11} 과 G_{12}/E_{11} 은 (26)과 (27)의 불성치로 계산하였다. h/a 가 증가하거나 강성비가 감소하면서 직교이방성 층/직교이방성 반무한체의 경우가 직교이방성 층/등방성 반무한체의 경우보다 좌굴변형이 쉽게 발생하였다.

Figs. 8과 9는 직교이방성 층/직교이방성 반무한체의 경우로서 기하학적 변수(h/a)에 따라 두 개의 다른 강성비에 대하여 직교이방성 층의 E_{22}/E_{11} 과 G_{12}/E_{11} 이 좌굴하중에 미치는 영향을 나타내었

다. $E_{11}^{(1)}/E_{11}^{(2)} = 4.05$ 는 AS4/3501-6 graphite/epoxy와 E-glass/epoxy의 11방향의 탄성계수의 비이다. $h/a=0.1$ 인 경우에 좌굴하중은 강성비와 직교이방성의 영향에 거의 의존하지 않는다. 직교이방성 층의 E_{22}/E_{11} 이 0.1이하이고, h/a 의 값이 증가할 때 강성비가 감소하면서 좌굴하중에 미치는 영향이 크다는 것을 알 수 있다(Fig. 8). h/a 가 크고 G_{12} 가 감소하면서 좌굴하중은 급격하게 감소한다(Fig. 9). 따라서 직교이방성이 좌굴하중에 미치는 영향은 h/a 와 재료 불성치 변화에 민감하다는 것을 알 수 있다.

직교이방성 반무한체에 대한 강성계수 E_{22} 와 G_{12} 의 영향이 좌굴하중에 미치는 영향은 직교이방성 층의 강성계수에 대한 결과(Figs. 8과 9)와 유사함을 보였다.

5. 결론

직교이방성 층과 반무한체 사이의 계면균열에 대한 좌굴하중을 평가하였다. 좌굴에 대한 평형방정식을 층과 반무한체에 각각 적용하여 직교이방성 층과 반무한체의 강성비와 기하학적 변수에 따라 좌굴에 미치는 영향을 해석하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

(1) 직교이방성 재료가 등방성 재료보다 더 낮은 값에서 좌굴을 발생하였다. 특히, 층과 반무한체의 강성비가 작거나 h/a 가 큰 경우에 재료특성이 좌굴에 미치는 영향은 더 큰 차이를 보였다.

(2) 직교이방성의 강성비 E_{22}/E_{11} 은 0.1이상에서는 좌굴하중에 영향을 주지 않는다. G_{12}/E_{11} 은 h/a 가 큰 경우에 대하여 좌굴하중에 미치는 영향이 아주 크게 작용하였다.

(3) 직교이방성 층과 직교이방성 반무한체 사이의 계면균열에 대한 좌굴을 등방성 반무한체에 접합된 등방성 층이나 직교이방성 층으로 근사화 시킨다면 기대되지 않는 파괴가 발생하는 결과를 초래할 수 있다.

후 기

이 논문은 2000년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. Chai, H., Babcock, C. D., and Knauss, W. G., "One-Dimensional Modeling of Failure in Laminated Plates by Delamination Buckling," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, pp.1069-1083, 1981.
2. Bottega, W. J., and Maewal, A., "Delamination Buckling and Growth in Laminates," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 184-189, 1983.
3. Peck, S. O., and Springer, G. S., "The Behavior of Delaminations in Composites Plates-Analytical and Experimental Results," *J. Comp. Mater.*, Vol. 25, pp. 907-929, 1991.
4. Kutlu, Z., and Chang, F. K., "Modeling Compression Failure of Laminated Composites Containing Multiple Through-the-Width Delaminations," *J. Comp. Mater.*, Vol. 26, pp. 350-387, 1992.

5. Dorris, J. F., and Nemat-Nasser, S., "Instability of a Layer on a Half Space," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 47, pp. 304-312, 1980.
6. Keer, I. M., Nemat-Nasser, S., and Oranaratnachai, A., "Surface Instability and Splitting in Compressed Brittle Elastic Solids Containing Crack Arrays," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 761- 767, 1982.
7. Madenci, E., and Westmann, R. A., "Local Delamination Buckling in Layered Systems," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 47, pp. 157-166, 1991.
8. Wang, W. X., Shen, W., Takao, Y., Shen, Z., and Chen, P., "An Analysis of Compressive Stability of Elastic Solids Containing a Crack Parallel to the Surface," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 40, pp. 1023- 1033, 1991.
9. Wang, W. X., and Takao, Y., "Load Buckling of a Layer Bonded to a Half-Space With an Interface Crack," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 62, pp. 64-70, 1995.
10. Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, London, 1968.
11. Flügge, W., *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1972.
12. Erdogan, F., and Gupta, G. D., "Layered Composites with an Interface Flaw," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, pp. 1089-1107, 1971.
13. Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, (Revised translation from Russian; edited by J.R.M. Radok), P. Noordhoff, Holland, 1958.
14. 정경문, 범현규, "반무한체에 접합된 두 등방성 층의 좌굴 해석," *대한기계학회논문집 A권*, 제 24권, 제 8호, pp. 2108-2114, 2000.
15. Hwang, S. F., "The Buckling of an Orthotropic Layer on a Half-Space," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 40, pp. 711-721, 1998.

부 록

직교이방성 재료의 강성계수는 다음과 같다.

$$C_{11} = E_{11} \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{\Delta}, \quad C_{22} = E_{22} \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{\Delta}$$

$$C_{66} = G_{12}$$

$$C_{12} = E_{11} \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{\Delta} = E_{22} \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}$$

여기서 E 는 탄성계수이고, ν 는 Poisson 비이다.

식 (18)에서 $R_{ij}(t)$, ($i, j = 1, \dots, 6$; $j = 1, 2$), 는 다음과 같다.

$$R_{11}(t) = \frac{1}{\Delta_1} [a_{1c}(\alpha_{12}^2 - \gamma_1) + \alpha_{1d}(\alpha_{11}^2 - \beta_1)] e^{-2t\alpha_{11}h}$$

$$R_{12}(t) = \frac{2}{\Delta_1} \alpha_{1d}(\alpha_{12}^2 - \gamma_1) e^{-t(\alpha_{11} + \alpha_{12})h}$$

$$R_{21}(t) = \frac{-2}{\Delta_1} \alpha_{1c}(\alpha_{11}^2 - \beta_1) e^{-t(\alpha_{11} + \alpha_{12})h}$$

$$R_{22}(t) = \frac{-1}{\Delta_1} [a_{1c}(\alpha_{12}^2 - \gamma_1) + \alpha_{1d}(\alpha_{11}^2 - \beta_1)] e^{-2t\alpha_{11}h}$$

$$R_{31}(t) = \frac{1}{\Delta_2} [a_{11}R_{11}(t) + a_{12}R_{21}(t) + a_{13}]$$

$$R_{32}(t) = \frac{1}{\Delta_2} [a_{21}R_{12}(t) + a_{22}R_{22}(t) + a_{23}]$$

$$R_{41}(t) = \frac{1}{\Delta_2} [a_{31}R_{11}(t) + a_{32}R_{21}(t) + a_{33}]$$

$$R_{42}(t) = \frac{1}{\Delta_2} [a_{41}R_{12}(t) + a_{42}R_{22}(t) + a_{43}]$$

$$R_{51}(t) = \alpha_{11}R_{11}(t) + \alpha_{12}R_{21}(t) - \alpha_{21}R_{31}(t) - \alpha_{22}R_{41}(t) - \alpha_{11}$$

$$R_{52}(t) = \alpha_{11}R_{12}(t) + \alpha_{12}R_{22}(t) - \alpha_{21}R_{32}(t) - \alpha_{22}R_{42}(t) - \alpha_{12}$$

$$R_{61}(t) = \beta_1R_{11}(t) + \gamma_1R_{21}(t) - \beta_2R_{31}(t) - \gamma_2R_{41}(t) + \beta_1$$

$$R_{62}(t) = \beta_1R_{12}(t) + \gamma_1R_{22}(t) - \beta_2R_{32}(t) - \gamma_2R_{42}(t) + \gamma_1$$

$$\Delta_i = \alpha_{ic}(\alpha_{i2}^2 - \gamma_i) - \alpha_{id}(\alpha_{i1}^2 - \beta_i), \quad (i = 1, 2)$$

$$a_{11} = -\alpha_{2d}(\alpha_{11}^2 - \beta_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} + \alpha_{1c}(\alpha_{22}^2 - \gamma_2)$$

$$a_{12} = -\alpha_{2d}(\alpha_{12}^2 - \gamma_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} + \alpha_{1d}(\alpha_{22}^2 - \gamma_2)$$

$$a_{13} = -\alpha_{2d}(\alpha_{11}^2 - \beta_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} - \alpha_{1c}(\alpha_{22}^2 - \gamma_2)$$

$$a_{21} = a_{11}$$

$$a_{22} = a_{12}$$

$$a_{23} = -\alpha_{2d}(\alpha_{12}^2 - \gamma_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} - \alpha_{1d}(\alpha_{22}^2 - \gamma_2)$$

$$a_{31} = \alpha_{2c}(\alpha_{11}^2 - \beta_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} - \alpha_{1c}(\alpha_{21}^2 - \beta_2)$$

$$a_{32} = \alpha_{2c}(\alpha_{12}^2 - \gamma_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} - \alpha_{1d}(\alpha_{21}^2 - \beta_2)$$

$$a_{33} = \alpha_{2c}(\alpha_{11}^2 - \beta_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} + \alpha_{1c}(\alpha_{21}^2 - \beta_2)$$

$$a_{41} = a_{31}$$

$$a_{42} = a_{32}$$

$$a_{43} = \alpha_{2c}(\alpha_{12}^2 - \gamma_1) \frac{C_{66}^{(1)}}{C_{66}^{(2)}} + \alpha_{1d}(\alpha_{21}^2 - \beta_2)$$

식 (19)에서 ω_1 , ω_2 와 커널(kernel), K_{ij} ,는 다음과 같다.

$$\omega_1 = \frac{Q_{11}^{\infty}}{Q_{12}^{\infty}}, \quad \omega_2 = \frac{Q_{22}^{\infty}}{Q_{21}^{\infty}}$$

$$K_{11}(\xi, x) = \frac{1}{Q_{12}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{11}(t) - Q_{11}^{\infty}] \cos(t\xi) \cos(tx) dt$$

$$K_{12}(\xi, x) = \frac{1}{Q_{12}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{12}(t) - Q_{12}^{\infty}] \sin(t\xi) \cos(tx) dt$$

$$K_{21}(\xi, x) = \frac{-1}{Q_{21}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{21}(t) - Q_{21}^{\infty}] \cos(t\xi) \sin(tx) dt$$

$$K_{22}(\xi, x) = \frac{-1}{Q_{21}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{22}(t) - Q_{22}^{\infty}] \sin(t\xi) \sin(tx) dt$$

여기서 $Q_{ij}(t)$ 와 Q_{ij}^{∞} 는 다음과 같다.

$$Q_{11}(t) = \frac{1}{\Delta} [N_{11}(t)R_{62}(t) - N_{21}(t)R_{61}(t)]$$

$$Q_{21}(t) = \frac{1}{\Delta} [N_{21}(t)R_{51}(t) - N_{11}(t)R_{52}(t)], \quad (i = 1, 2)$$

$$Q_{ij}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t), \quad (i, j = 1, 2)$$

$$N_{11}(t) = \alpha_{1c}R_{11}(t) + \alpha_{1d}R_{21}(t) - \alpha_{1c}$$

$$N_{12}(t) = \alpha_{1c}R_{12}(t) + \alpha_{1d}R_{22}(t) - \alpha_{1d}$$

$$N_{21}(t) = (\alpha_{11}^2 - \beta_1)R_{11}(t) + (\alpha_{12}^2 - \gamma_1)R_{21}(t) + (\alpha_{11}^2 - \beta_1)$$

$$N_{22}(t) = (\alpha_{11}^2 - \beta_1)R_{12}(t) + (\alpha_{12}^2 - \gamma_1)R_{22}(t) + (\alpha_{12}^2 - \gamma_1)$$