

완전비선형 Boussinesq 방정식을 이용한 쇄파대의 파랑변형 모의 Surf Zone Wave Transformations Simulated by a Fully Nonlinear Boussinesq Equation

윤종태* · 김종무*

Jong Tae Yoon* and Jong Moo Kim*

요 旨 : Wei et al.의 완전비선형 Boussinesq 방정식을 4차의 Adams predictor-corrector 기법을 사용하여 차분하고 면 내부조파기법과 스폰지 경계층을 사용하였으며 쇄파구조를 추가하였다. 면 내부조파기법을 사용해 목적파를 잘 제한할 수 있었다. 비선형성이 부각되는 고립파의 천수실험을 통해 완전비선형 모형의 정확성을 확인할 수 있었고 해저평방으로 인한 규칙파의 변형을 모의해 보았다. 쇄파 수치실험을 통해 적용된 쇄파구조의 특성을 확인해 보았고 수중천퇴에 대한 이차원 파랑전파 수치실험을 통해 비선형 모형의 중요성을 확인하였다.

핵심용어 : 완전비선형 Boussinesq 방정식, Adams predictor-corrector 기법, 면 내부조파기법, 쇄파구조, 고립파, 수치실험

Abstract □ A fully nonlinear Boussinesq equation of Wei et al. is finite differenced by Adams predictor-corrector method. A spatially distributed source function and sponge layers are used to reduce the reflected waves in the domain and wave breaking mechanism is included in the equation. The generated waves are found to be good and the corresponding wave heights are very close to the target values. The shoaling of solitary wave and transformation of regular wave over submerged shelf were simulated successfully. The characteristics of breaking mechanism was identified through the numerical experiment and the results of two dimensional wave propagation test over the spherical shoal showed the importance of nonlinear wave model.

Keywords : fully nonlinear Boussinesq equation, Adams predictor-corrector method, spatially distributed source, wave breaking mechanism, solitary wave, numerical study

1. 서 론

Boussinesq형 방정식들은 파랑변형을 나타내는 수학적 모형의 하나로서 파랑의 비선형성과 분산성이 고려되어, 내재된 가정에 따른 적용범위 내에서는 상당히 정확한 모형이다. Peregrine(1967)은 수면변위와 수심평균 유속을 사용하여 변수심에 대한 식을 발표하였고 Freilich and Guza(1984)와 Elgar and Guza(1985)는 Peregrine의 방정식을 각 주파수에 대한 식으로 나타내어 파랑 스펙트럼의 발달을 연구하였다. Liu et al.(1985)과 Rygg(1988)는 수중천퇴(shoal)에 의한 굴절계산에 Boussinesq의 방정식을 사용하였다.

이러한 일반 Boussinesq 방정식들은 약분산성(weak dispersion)과 약비선형(weak nonlinearity)가정 때문에 그 적용대상이 천해역과 비선형 효과가 작은 경우로 제한되었다. 일반 Boussinesq 방정식의 분산관계식은 선형 분산 관계식과 비교하여 천해에서는 비교적 일치하지만 중간수심에서부터 심해로 갈수록 그 오차가 커져 파랑의 분산성을 제대로 모의 할 수가 없다. 이러한 단점을 보완하기 위해 Madsen et al.(1991)과 Nwogu(1993)는 확장형 Boussinesq 방정식을 발표하였다. Madsen et al.은 모형의 정확도 내에서는 영이 되는 항을 사용하여, 운동량 방정식에서 고차항의 정도를 높임으로써 보다 향상된 선형모형을 유도하였다. 이에 비해 Nwogu(1993)는 임의 수심에서의 유속

*경성대학교 건설·환경공학부(Department of Civil and Environmental Engineering, Kyungung University, Pusan 608-736, Korea)

을 새로운 종속변수로 선택하여 새롭게 지배방정식을 유도하였는데 연속방정식과 Euler 방정식으로부터의 유도과정에 일관성이 잘 유지되고 있다. 유속이 정의되는 수심은 분산관계식이 가장 정확히 나타나는 값으로 결정한다. 두 방법이 유도과정은 다르지만 분산관계식의 정확도에서는 비슷한 정도를 보여주고 있고, 심해역까지로의 확장은 한계가 있지만, 중간수심 영역에선 일반 Boussinesq 모형에 비해 훨씬 더 향상된 분산성을 보여준다. Wei and Kirby (1995)는 Nwogu의 방정식에 대해 고차의 수치모형을 발표하고 이를 이용해 방정식의 특성을 분석하였다.

확장형 Boussinesq 방정식은 분산성에 있어서는 그 정확도가 많이 향상되었지만 비선형성에 있어서는 여전히 약 비선형이라는 가정을 안고 있다. 파가 해안을 향해 전파해 오면 천수 현상에 의해 파고가 증가하게 되고 결국 쇄파가 일어나게 되는데, 파고와 수심비로 나타내어지는 이러한 비선형성이 강하게 나타나는 쇄파대 전후에서의 파랑은 약비선형 모형으로 정확히 모의되지 않는다. 따라서 파형경사가 급해지거나 쇄파가 일어나는 곳에서까지 파랑을 정확히 모의하기 위해서는 비선형성에 대한 모형의 확장이 필요하다. Wei *et al.*(1995)은 Nowgu의 방정식에서처럼 특정수심에서의 유속을 변수로 선택하여 Boussinesq 방정식을 유도하였는데, 자유수면 경계조건의 비선형성을 그대로 유지하므로써 모형의 비선형성을 확장하였다.

장파영역의 파랑에 대한 비선형 모형의 개발은 수십년에 걸쳐 진행되어 왔다. Su and Gardner(1967)는 비선형 갈릴리안 불변계(Galilean-invariant)에 대한 KdV 방정식과 Burgers 방정식을 유도하였고 Mei(1989)는 수심평균 유속과 섭동법을 사용하여 약비선형 가정이 없이 일정한 수심에 대한 Boussinesq 방정식을 유도하였다.

비선형 파랑모형은 Green and Naghdi(1976)가 제안한 박류이론(fluid sheet)을 이용하여 유도할 수도 있는데 적분 보존법칙에서 내부흐름을 다항근사법으로 표현한다. 결과적으로 흐름장을 근사적으로 표현할 수밖에 없지만 비선형 자유수면 경계조건은 엄밀히 만족한다. Demirbilek and Webster(1992)는 Green and Naghdi의 방법을 사용하여 천해 파랑모형을 유도하였는데 많은 수치실험을 행하였지만 실험치 및 해석해와의 비교 결과를 제시하지 않았다.

적절한 수치기법을 개발하여 원래의 비선형 포텐셜 흐름문제를 직접 푸는 것도 비선형 파랑을 모의하는 좋은 방법이 된다. Grilli *et al.*(1989)과 Grilli(1993)는 경계요소법을 사용하여 해를 구하였는데 그 결과는 실험치와 놀

라우리만큼 일치하여 Wei *et al.*(1995)은 자신들의 비선형 모형의 검증과정에 이들의 계산결과를 사용하였다.

Boussinesq 방정식을 수치해석하는 과정에서 많이 겪는 어려움 중의 하나는 입사경계의 정확한 처리이다. 계산영역 내에서 발생하는 반사파가 입사경계로 진행했을 경우 그 제원을 미리 알 수가 없으므로 일반적으로 반사파의 위상속도 및 파향을 가정하여 해석한다. 하지만 이러한 근사적 처리는 연산시간이 클 경우 과도한 오차의 누적을 가져와 연산자체가 불가능해진다. Wei and Kirby(1995)는 조파경계에서 근사적 방사경계조건을 사용하여 타원형 천퇴에 대한 파랑변형을 계산하였는데 이 경우에도 반사파의 양이 많아지면 연산이 중단되었다.

Israeli and Orszag(1981)가 제안한 스폰지 경계층은 진행해 오는 파를 강제 감쇄시킬 수가 있으므로 방사조건 대신 스폰지층을 사용하면 연산시간에 따른 안정성 문제를 피할 수 있다. 이 경우엔 파를 경계가 아닌 내부에서 조파해 주어야 하는데 Larsen and Dancy(1983)는 엇갈린 격자(staggered grid)에 대해 선(line source) 내부조파기법을 사용하여 Boussinesq 방정식을 해석하였다. 하지만 선 내부조파기법은 엇갈린 격자가 아닐 경우 적용이 안 되는 경우가 많으므로 Wei *et al.*(1999)은 원천항(source terms)을 포함한 선형화된 방정식의 해를 구하여 원천항수가 공간적으로 분포되는 면 내부조파기법을 발표하였다.

한편 Boussinesq 방정식에 쇄파구조를 도입하기 위한 시도가 계속되어 왔는데 Heitner and Housner(1970)는 운동량 보존식에 가상 점성항(artificial viscosity term)을 추가하여 쓰나미를 해석하였고, Zelt(1991)는 와점성으로 표현되는 쇄파구조를 사용하여 고립파의 쇄파를 모의하였으나 운동량이 보존되지 못하는 단점이 있었다. Shaffer *et al.*(1993)과 Madsen *et al.*(1997)은 롤러 근사(roller-based approximation)를 사용한 쇄파구조를 제안하였고, Kennedy *et al.*(2000)은 와점성 형태의 쇄파모형에서 쇄파의 시작 및 종료에 대한 기준을 자연현상에 보다 부합되도록 개선하였다.

본 연구에서는 Kirby *et al.*(1998)의 완전비선형 Boussinesq 수치모형 FUNWAVE 1.0을 이용하여 쇄파대를 포함한 천해역에서의 파랑변형을 수치모의 하였다. 스폰지 경계층 및 면 내부조파기법이 사용되었고 쇄파구조는 Kennedy *et al.*(2000)의 와점성모형이 사용되었다. 수치실험을 통해 선형파 및 비선형파의 조파구조를 확인한 후 해저지형 변화에 따른 천수 및 쇄파실험을 통해 완전비선형 Boussinesq 모형의 특성을 분석하였다. 수중천퇴에 대한 실험에서는

완경사방정식의 계산결과와 비교하여 비선형 모형의 중요성을 검토하였다.

2. 모형의 구조

2.1 지배방정식

Wei *et al.*(1995)의 완전비선형 Boussinesq 방정식에 내부조파를 위한 원천항 $f(x, y, t)$ 와 와점성항 F_{br}, G_{br} 및 스폰지층에서의 감쇄항 F_{sp}, G_{sp} 를 추가한 후 정리하면 다음과 같이 연속방정식과 운동량방정식으로 표현된다.

$$\eta_t = E'(\eta, u, v) \tag{1}$$

$$[U(u)]_t = F'(\eta, u, v) + [F_1(v)]_t \tag{2}$$

$$[V(v)]_t = G'(\eta, u, v) + [G_1(u)]_t \tag{3}$$

여기서

$$E' = E(\eta, u, v) + \gamma E_2(\eta, u, v) + f(x, y, t) \tag{4}$$

$$F' = F(\eta, u, v) + \gamma [F_2(\eta, u, v) + F^t(\eta, u, v_t)] + F_{br} + F_{sp} \tag{5}$$

$$G' = G(\eta, u, v) + \gamma [G_2(\eta, u, v) + G^t(\eta, u, v_t)] + G_{br} + G_{sp} \tag{6}$$

그리고 함수들은 다음과 같다.

$$U = u + h[b_1 h u_{xx} + b_2 (hu)_{xx}] \tag{7}$$

$$V = v + h[b_1 h v_{yy} + b_2 (hv)_{yy}] \tag{8}$$

$$E = -\frac{1}{K}[(\Lambda u)_x + (\Lambda v)_y] - \{a_1 h^3 (u_{xx} + v_{yy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xx} + (hv)_{yy}]\}_x - \{a_1 h^3 (u_{xy} + v_{yy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xy} + (hv)_{yy}]\}_y \tag{9}$$

$$F = -g\eta_x - (uu_x + vv_y) \tag{10}$$

$$G = -g\eta_y - (uv_x + vu_y) \tag{11}$$

$$F_1 = -h[b_1 h v_{xy} + b_2 (hv)_{xy}] \tag{12}$$

$$G_1 = -h[b_1 h u_{xy} + b_2 (hu)_{xy}] \tag{13}$$

$$E_2 = -\left\{ a_1 h^2 \eta + \frac{1}{6} \eta (h^2 - \eta^2) (u_{xx} + v_{yy}) \right\}_x - \left\{ \left[a_2 h^2 \eta - \frac{1}{2} \eta (h + \eta) \right] [(hu)_{xx} + (hv)_{yy}] \right\}_x - \left\{ \left[a_1 h^2 \eta + \frac{1}{6} \eta (h^2 - \eta^2) \right] (u_{xy} + v_{yy}) \right\}_y$$

$$-\left\{ \left[a_2 h \eta - \frac{1}{2} \eta (h + \eta) \right] [(hu)_{xy} + (hv)_{yy}] \right\}_y \tag{14}$$

$$F_2 = -\left\{ \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) [u(u_x + v_y)_x + v(u_x + v_y)_y] \right\}_x - \{ (z_\alpha - \eta) [u[(hu)_x + (hv)_y]_x + v[(hu)_x + (hv)_y]_y] \}_x - \frac{1}{2} \{ [(hu)_x + (hv)_y + \eta(u_x + v_y)]^2 \}_x \tag{15}$$

$$G_2 = -\left\{ \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) [u(u_x + v_y)_x + v(u_x + v_y)_y] \right\}_y - \{ (z_\alpha - \eta) [u[(hu)_x + (hv)_y]_x + v[(hu)_x + (hv)_y]_y] \}_y - \frac{1}{2} \{ [(hu)_x + (hv)_y + \eta(u_x + v_y)]^2 \}_y \tag{16}$$

$$F^t = \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 [(u_t)_x + (v_t)_y] + \eta \{ [h(u_t)]_x + [h(v_t)]_y \} \right\}_x \tag{17}$$

$$G^t = \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 [(u_t)_x + (v_t)_y] + \eta \{ [h(u_t)]_x + [h(v_t)]_y \} \right\}_y \tag{18}$$

여기서 γ 가 1일 경우 완전 비선형 Boussinesq 방정식이 되고 $\gamma=0$ 이 되면 Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식이 된다. 그리고 $K=1, \Lambda=h+\eta$ 이다.

2.2 면 내부조파함수

Larsen and Dancy(1983)는 영역내부의 조파선을 따라 질량이 더해지고 빠지는 내부조파구조를 사용하였고, 영역의 경계에서는 스폰지 경계층을 사용하여 주파수와 방향에 상관없이 외부로 향하는 파를 강제 감쇄시킴으로써 Boussinesq 방정식을 모의하였다. 이 기법은 단일 격자에서 질량이 가감되는 엇갈린 격자에서는 잘 적용되지만, 일반 격자에서는 고주파수대에서의 잡음으로 인하여 연산이 어렵게 되는 경우가 많다. Wei *et al.*(1999)은 일반 격자에서의 내부조파기법으로서 공간적으로 원천함수가 분포되는 면 내부조파기법을 개발하여 이러한 문제를 해결하였다.

일정수심 h 의 해역에서 진폭 a_0 의 파를 조파하는 경우를 생각하자. 파향은 x 축과 θ 의 각을 가지고 각주파수는 ω 이다(Fig. 1).

조파역의 중심이 y 축에 평행하다고 두면 원천함수 $f(x, y, t)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x, y, t) = g(x)s(y, t) \tag{19}$$

여기서 $g(x)$ 는 Gauss 분포형의 함수이고 $s(y, t)$ 는 원천

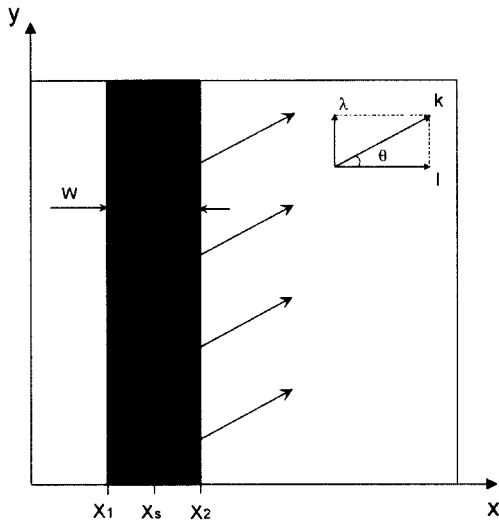


Fig. 1. Source function definition in computational domain.

함수의 크기를 나타내는 입력시계열이다.

$$g(x) = \exp[-\beta(x-x_s)^2] \quad (20)$$

$$s(y,t) = D \sin(\lambda y - \omega t) \quad (21)$$

여기서 β 는 원천함수의 형상계수이고 x_s 는 원천함수 중심의 x 위치이다. D 는 원천함수의 크기, $\lambda = k \sin \theta$ 는 y 방향의 파수이다. 단순진행파의 경우 원천함수의 크기 D 는 다음 식으로 주어진다.

$$D = \frac{2\alpha_0 \cos \theta (\omega^2 - \alpha_1 g k^4 h^3)}{\omega k l [1 - \alpha(kh)^2]} \quad (22)$$

여기서 $\alpha = -0.39$, $\alpha_1 = \alpha + 1/3$ 그리고 k 는 적분상수로서 다음과 같다.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) \exp(-ilk) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}} \exp\left(-\frac{l^2}{4\beta}\right) \quad (23)$$

여기서 $l = k \cos \theta$ 는 x 방향 파수이다. 형상계수 β 는 이론적으론 어떤 값이던 취할 수 있다.

2.3 스폰지층의 감쇄함수

스폰지 경계층에서의 감쇄함수는 다음과 같다.

$$F_{sp} = -w_1(x,y)u + w_2(x,y)(u_{xx} + u_{yy}) + w_3(x,y) \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \quad (24)$$

$$G_{sp} = -w_1(x,y)v + w_2(x,y)(v_{xx} + v_{yy}) + w_3(x,y) \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \quad (25)$$

여기서 w_1, w_2, w_3 는 각각 Newton의 냉각법칙, 점성감쇄 그리고 스폰지 여파로 인한 감쇄구조를 나타낸다(Israeli and Orszag, 1981). w 의 일반형태는 다음과 같다.

$$w_i(x,y) = c_i \omega f(x) \quad (26)$$

여기서 $c_i (i=1,2,3)$ 는 각 감쇄구조에 해당하는 상수이다. $f(x)$ 는 스폰지 경계층의 시작점 x_s 에서부터 마지막 점 x_e 에 걸쳐 단조 증가하는 함수로서 0과 1사이의 값을 가진다.

$$f(x) = \frac{\exp[(x-x_s)/(x_e-x_s)] - 1}{\exp(1) - 1}, \quad x_s < x < x_e \quad (27)$$

스폰지 경계층의 두께는 파장의 2~3배를 사용한다.

2.4 쇄파구조

쇄파로 인한 파고의 감쇄 뿐만 아니라 부서지는 파의 파형을 제대로 나타내기 위해서는 감쇄구조가 시·공간적으로 제한되게 작용해야 하고 특히 파의 전면에 작용해야 한다. 본 연구에서는 Zelt(1991)의 와점성 모형과 유사하면서 쇄파의 시작 및 종료를 실제 현상에 보다 부합하도록 확장한 Kennedy *et al.*(2000)의 방법을 사용한다. 운동량의 혼합 개념을 적용한 쇄파식은 다음과 같다.

$$F_{br} = \frac{1}{h+\eta} \left([v\{(h+\eta)u_\alpha\}_x]_x + \frac{1}{2} [v\{(h+\eta)u_\alpha\}_y + v\{(h+\eta)v_\alpha\}_x]_y \right) \quad (28)$$

$$G_{br} = \frac{1}{h+\eta} \left([v\{(h+\eta)v_\alpha\}_y]_y + \frac{1}{2} [v\{(h+\eta)u_\alpha\}_y + v\{(h+\eta)v_\alpha\}_x]_x \right) \quad (29)$$

시간과 위치의 함수인 와점성계수 ν 는 Zelt(1991)의 공식과 유사한 형태로 주어진다.

$$\nu = B \delta_b^2 (h+\eta) \eta_i \quad (30)$$

여기서 δ_b 는 혼합거리 계수이다. 갑작스러운 감쇄구조의 시작으로 인한 수치적 불안정성을 피하기 위해 B 는 다음과 같이 0과 1사이에서 점진적으로 변하는 값을 가진다. 와점성계수를 상수로 취급하면 쇄파되는 파랑의 비대칭성을 자연스럽게 모의할 수가 없다.

$$B = \begin{cases} 1, & \eta_i \geq 2\eta_i^* \\ \frac{\eta_i}{\eta_i^*} - 1, & \eta_i^* < \eta_i \leq 2\eta_i^* \\ 0, & \eta_i \leq \eta_i^* \end{cases} \quad (31)$$

매개변수 η_i^* 는 쇄파의 시작과 정지를 결정한다. η_i 를 쇄파의 시작을 나타내는 변수로 선택하므로써 실제현상에서 관찰되듯이 파의 전반부에서 감쇄가 일어나는 현상을 구현할 수 있다. 본 연구에서의 쇄파는 η_i 가 어떤 주어진 초기값을 초과할 경우 쇄파가 시작되고 이후엔 η_i 가 이 값 아래로 떨어져도 쇄파가 계속되는 구조를 취하고 있다. 그러므로 η_i^* 는 초기치 $\eta_i^{(i)}$ 에서부터 시간이 지남에 따라 최종값 $\eta_i^{(F)}$ 로 줄어드는 구조를 취하고 있다.

$$\eta_i^* = \begin{cases} \eta_i^{(F)}, & t \geq T^* \\ \eta_i^{(i)} + \frac{t-t_0}{T^*}(\eta_i^{(F)} - \eta_i^{(i)}), & 0 \leq t-t_0 < T^* \end{cases} \quad (32)$$

여기서 T^* 는 쇄파지속시간, t_0 는 쇄파의 시작시간 그리고 $t-t_0$ 는 쇄파연령이 된다. $\eta_i^{(i)}$, $\eta_i^{(F)}$, T^* 의 값들은 각각 $0.35\sqrt{gh} \sim 0.65\sqrt{gh}$, $0.08\sqrt{gh} \sim 0.15\sqrt{gh}$ 그리고 $2\sqrt{h/g} \sim 5\sqrt{h/g}$ 의 값들을 가진다(Wei *et al.*, 1999).

3. 수치기법

Boussinesq 방정식에서 1계 공간미분항을 2차의 정확도로 차분화하면 방정식의 분산항과 수학적으로 동일한 형태의 차분오차가 발생한다. 대부분의 수치기법들은(Abott *et al.*, 1984; Nwogu, 1993) 이런 오차항을 2차 차분식에 역대입하여 해석해왔다. Wei and Kirby(1995)는 모든 차분오차가 방정식의 분산항들보다는 작아지도록 차분화하여 이런 문제를 피하였다. 즉 1계 공간미분항은 4차의 정확도로 차분화하고 분산항은 2차의 정확도로 차분화한다. 그리고 시간적분에는 4차의 Adams Predictor-Corrector 기법을 사용하였다. 본 연구에서도 비선형 항들을 추가한 식에 대하여 동일한 수치기법을 적용하였다. 1계 공간미분 및 시간미분을 고차 차분함으로써 차분오차가 분산항과 같은 형태가 되는 것을 피할 수 있고 역대입과 같은 과정은 필요하지 않다.

3.1 시간차분

시공간 교차미분항 및 비선형 시간미분 항들을 식 (2), (3) 처럼 우변으로 정리해 놓으면 좌변의 차분은 삼중대각행렬을 형성하게 된다. 격자망은 엇갈린 격자가 아닌 일반격자를 사용하고 $x=i\Delta x$, $y=i\Delta y$, $t=n\Delta t$ 로 표현하고 n 은 현재의 기지 시간준위를 나타낸다(Fig. 2). Predictor 단계는 3차 양해법의 Adams-Bashforth 기법을 사용한다.

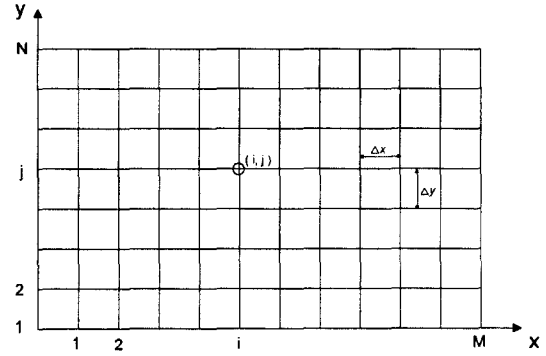


Fig. 2. Definition for computational domain.

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{12}[23(E')_{i,j}^n - 16(E')_{i,j}^{n-1} + 5(E')_{i,j}^{n-2}] \quad (33)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{12}[23(F')_{i,j}^n - 16(F')_{i,j}^{n-1} + 5(F')_{i,j}^{n-2}] \\ + \frac{\Delta t}{12}[23((F_1)_i)_i^n - 16((F_1)_i)_i^{n-1} + 5((F_1)_i)_i^{n-2}] \quad (34)$$

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{12}[23(G')_{i,j}^n - 16(G')_{i,j}^{n-1} + 5(G')_{i,j}^{n-2}] \\ + \frac{\Delta t}{12}[23((G_1)_i)_i^n - 16((G_1)_i)_i^{n-1} + 5((G_1)_i)_i^{n-2}] \quad (35)$$

$\{\eta, u, v\}_{i,j}^{n+1}$ 의 추정치가 결정되면 이를 이용하여 $n+1$, n , $n-1$, $n-2$ 시간 준위에서의 $\{E', F', G'\}_{i,j}$ 를 계산한 후 다음의 4차 Adams-Moulton Corrector 기법을 적용한다.

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{24}[9(E')_{i,j}^{n+1} + 19(E')_{i,j}^n - 5(E')_{i,j}^{n-1} + (E')_{i,j}^{n-2}] \quad (36)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{24}[9(F')_{i,j}^{n+1} + 19(F')_{i,j}^n - 5(F')_{i,j}^{n-1} + (F')_{i,j}^{n-2}] \\ + \frac{\Delta t}{24}[9((F_1)_i)_i^{n+1} + 19((F_1)_i)_i^n - 5((F_1)_i)_i^{n-1} + ((F_1)_i)_i^{n-2}] \quad (37)$$

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{24}[9(G')_{i,j}^{n+1} + 19(G')_{i,j}^n - 5(G')_{i,j}^{n-1} + (G')_{i,j}^{n-2}] \\ + \frac{\Delta t}{24}[9((G_1)_i)_i^{n+1} + 19((G_1)_i)_i^n - 5((G_1)_i)_i^{n-1} + ((G_1)_i)_i^{n-2}] \quad (38)$$

Corrector 단계는 연속되는 계산결과에 오차가 허용치 이내에 들 때까지 반복된다. 오차는 η, u, v 모든 변수에 대해 다음과 같이 결정된다.

$$\Delta f = \frac{\sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^*|}{\sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1}|} \quad (39)$$

여기서 $f = (\eta, u, v)$ 이고 f^{n+1} 은 현재의 결과, 그리고 f^n 는 전 단계의 계산치이다. 반복은 모든 Δt 가 10^{-4} 이내에 들 때까지 계속된다.

3.2 공간차분

1계 공간 미분에 대해서는 다음의 5점 차분법을 사용한다.

$$(e_x)_{1,j} = \frac{1}{12\Delta x}(-25e_{1,j} + 48e_{2,j} - 36e_{3,j} + 16e_{4,j} - 3e_{5,j}) \quad (40)$$

$$(e_x)_{2,j} = \frac{1}{12\Delta x}(-3e_{1,j} - 10e_{2,j} + 18e_{3,j} - 6e_{4,j} + e_{5,j}) \quad (41)$$

$$(e_x)_{i,j} = \frac{1}{12\Delta x}[8(e_{i+1,j} - e_{i-1,j}) - (e_{i+2,j} - e_{i-2,j})] \quad (42)$$

$$(e_x)_{M-1,j} = \frac{1}{12\Delta x}(3e_{M,j} + 10e_{M-1,j} - 18e_{M-2,j} + 6e_{M-3,j} - e_{M-4,j}) \quad (43)$$

$$(e_x)_{M,j} = \frac{1}{12\Delta x}(25e_{M,j} - 48e_{M-1,j} + 36e_{M-2,j} - 16e_{M-3,j} + 3e_{M-4,j}) \quad (44)$$

여기서 $e = (\eta, u, v)$, $Mk = M - k$ ($k=1,2,3,4$) 그리고 M 은 x 방향으로의 격자점 수이다.

2계 공간미분항에 대해서는 3점 차분법을 사용한다.

$$(e_{xx})_{i,j} = \frac{e_{i+1,j} - 2e_{i,j} + e_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad i = 2, 3, \dots, M-1 \quad (45)$$

교차 차분의 경우엔 다음과 같다.

$$(e_{xy})_{i,j} = \frac{e_{i+1,j+1} + e_{i-1,j-1} - e_{i-1,j+1} - e_{i+1,j-1}}{4\Delta x\Delta y} \quad (46)$$

3.3 경계조건

완전반사의 경우 경계에 수직인 방향의 유속은 항상 영이다. 경계에서의 수면변위 및 접선속도는 이론적으로는 지배방정식에서 얻어질 수 있지만 수치적으로 대단히 번거롭고 불안정하게 된다. Wei and Kirby(1995)는 대신 수면변위 및 접선유속의 법선방향 미분이 영이라는 조건을 사용하였다. 이 식은 단순하여 취급하기도 편리하고 일반 Boussinesq 방정식 및 확장형 Boussinesq 방정식의 정도 내에서는 정확하다. 이 경우 우측 경계($i=M$)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$u_{M,j} = 0 \quad (47)$$

$$(\eta_x)_{M,j} = 0 \quad (48)$$

$$(v_x)_{M,j} = 0 \quad (49)$$

식 (48), (49)에 5점 차분법을 적용하면 다음과 같다.

$$e_{M,j} = \frac{1}{25}(48e_{M-1,j} - 36e_{M-2,j} + 16e_{M-3,j} - 3e_{M-4,j}) \quad (50)$$

여기서 $e = (\eta, v)$ 이다.

4. 수치실험 및 결과

4.1 주기별 조파실험

Fig. 3과 같은 영역에 대해 파를 내부조파하여 전파시 키므로써 먼 내부조파기법 및 스폰지 경계층의 거동을 Boussinesq 방정식을 선형화시킨 모형을 사용하여 확인해 보았다. 연산영역은 $L_x=50$ m, 수심은 $h=50$ m이고 원천함수의 중심은 $x_s=25$ m에 위치해 있다. 파의 감쇄를 위한 5m폭의 스폰지층을 양 경계에 설정하였다. 주기는 $T=0.5$ s, 10 s, 2.0 s를 사용하였고 파고는 0.05 m, $\Delta x=0.02$ m, $\Delta t=0.02$ s이다. Fig. 4는 100 s후의 수면 형상이다. 세

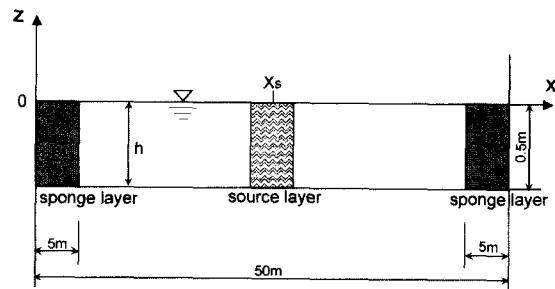


Fig. 3. The computational domain used to illustrate the source function method for generating monochromatic wave.

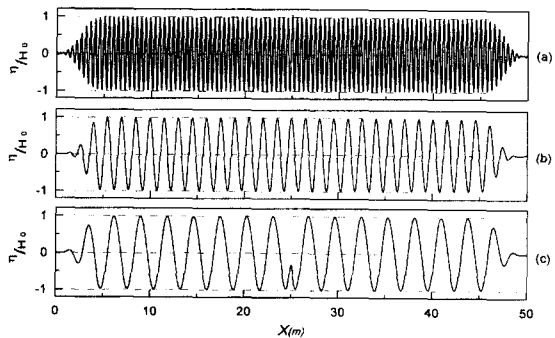


Fig. 4. Snapshots of surface elevation at $t = 100$ s; (a) $T = 0.5$ s, (b) $T = 1.0$ s, (c) $T = 1.5$ s.

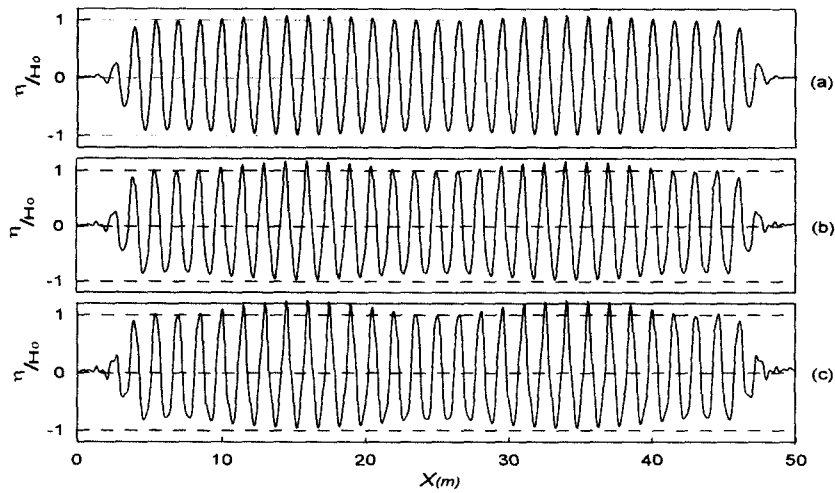


Fig. 5. Snapshots of surface elevation at $T = 1.0$ s; (a) $H/h = 0.1$, (b) $H/h = 0.2$, (c) $H/h = 0.3$.

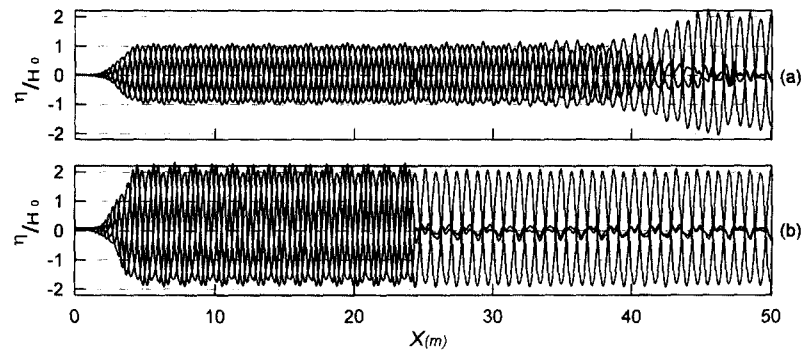


Fig. 6. Snapshots of surface elevation; (a) $t_i = 40$ s, (b) $t_i = 200$ s.

경우 모두 원하는 파(target wave)를 잘 조파한 것을 확인할 수 있다. 스폰지층에서의 파고 감쇄 또한 잘 기능하여 각각 $200T$, $100T$, $67T$ 시간의 연산을 수행하면서 안정성과 관련된 문제는 발생하지 않았고, 조파된 내부파 또한 특별한 교란이 없이 안정적인 것을 결과에서 확인할 수 있다.

4.2 진폭별 조파실험

Boussinesq 방정식이 가지는 장점은 천해의 파랑변형에서 나타나는 비선형성을 고려할 수 있다는 점이다. 본 실험에서는 이를 확인하기 위해 진폭을 변화시켜 비선형파의 조파기능을 확인하였다. 실험조건은 주기별 발생실험과 동일하고 다만 진폭을 $H/h=0.1$, 0.2 , 0.3 으로 변화시켰다. 주기는 10 s로 하였고 결과는 Fig. 5에 나타내었다.

앞서 선형모형의 계산결과와 달리 파형이 더 이상 대

칭적이 아님을 확인할 수 있다. 파봉은 $\eta/a_0=1$ 보다 위에 위치하고 파곡은 $\eta/a_0=-1$ 에 못 미치는 값을 보여준다. 또한 파봉은 보다 예리해지고 파곡은 보다 평탄한 형상을 보여 주는데 이러한 것들은 비선형파의 전형적인 특성이 다. 진폭이 커질수록 이러한 효과가 현저하게 나타남을 알 수 있다.

4.3 반사 및 흡수실험

반사파를 모의해 보기 위해 앞서의 실험과 달리 좌측 경계에 흡수경계를 두고 우측경계에서 완전반사조건을 두어 계산해 보았다. 우측 경계에서 완전 반사로 인하여 정상파가 발생되게 하기 위해 원천함수의 중심을 $x_s=24.4$ m로 하였다. $\Delta t=0.01$ s를 사용하고 연산시간을 200 s로 한 외에는 연산조건은 앞 절의 실험들과 동일하다. Fig. 6은 $t_i=40$ s, 200 s에서의 연산결과로서 $t=t_i$, $t=t_i+T/4$, $t=t_i+T/$

2 그리고 $t=t_i+3T/4$ 에서의 수면형상을 중첩하여 나타낸 것이다. 초기엔 파가 조파되어 양쪽으로 전파해 간다. 이후 좌측경계에서 흡수가 일어나고 우측경계에서 파의 반사가 일어나면 세 가지 파열이 형성된다. 하나는 조파되어 좌측으로 진행하는 파랑이고 두 번째는 조파선 우측으로 진행하는 파랑 그리고 마지막은 반사경계에서 반사된 후 다시 좌측으로 진행하는 파랑이다. 최종적인 형태는 조파점을 경계로 좌측은 진행파 우측은 정상파가 되는데 이를 $t=200$ s의 연산결과에서 확인할 수 있다. 진폭 또한 조파선에서 반사경계까지의 거리가 26.6 m(17파장)로서 위상이 동일하므로 초기 진폭의 약 2배가 되어야 하는데 연산 결과 또한 만족스러운 값을 보여주고 있다.

4.4 고립파의 천수실험

파고 0.12 m를 가지는 고립파에 대한 천수실험을 행하였다. 계산 대상해역은 전체 길이가 $125d_s$ 로서 수심 d_s 를 가지는 $25d_s$ 거리구간, 경사를 가진 $10d_s$ 구간, 그리고 수심 d_f 를 가지는 나머지 구간으로 이루어져 있다(Fig. 7).

$d_f/d_s=0.6137, 0.5, 0.451$ 의 세 경우에 대해 계산하였고 $\Delta t=0.1, \Delta x=0.25$ 를 사용하였다. 계산결과는 시간에 따른 고립파의 변형을 Fig. 8에 나타내었다. Fig. 8은 완전비선형 모형의 계산결과이다. 세 경우 모두에 공통된 현상을 몇 가지 확인할 수 있다. 먼저 첫 평지에서는 파형의 변화가 없이 진행한다. 파가 사면에 도달하면 수심의 감소가 시작되어 파고가 커지기 시작하고 파형 또한 전면부의 경사가 급해지기 시작한다. 또한 약간의 반사파가 발생한다. 다시 평지로 진입하면 앞에서 진행하는 질량이 몇 개의 고립파로 분열되면서 파고가 계속 커지는 형태를 보여준다.

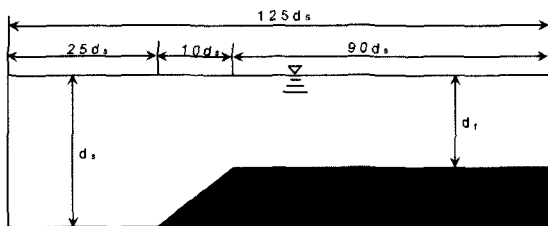


Fig. 7. Bottom topography.

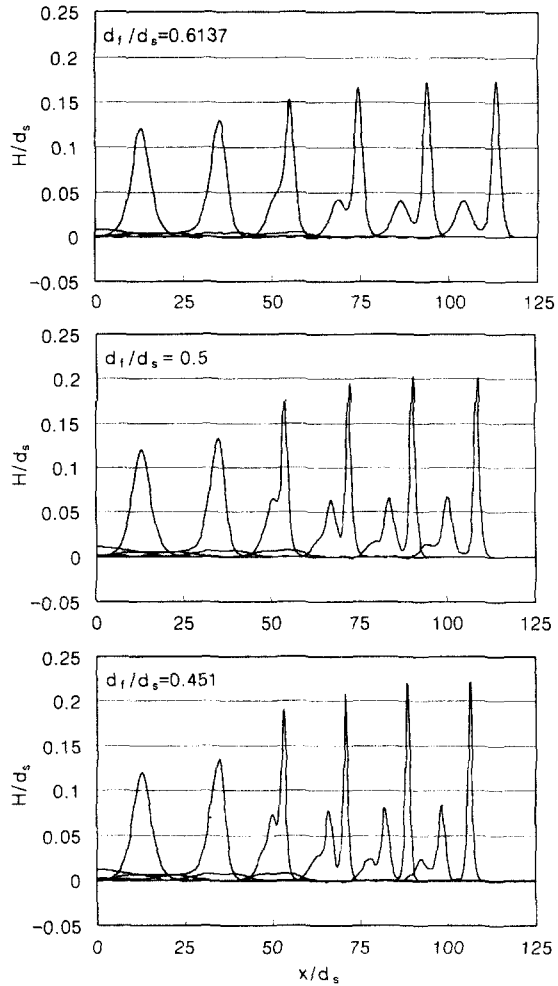


Fig. 8. The propagation of a solitary wave height.

수심 d_f 평지에서의 주 고립파의 파고를 다른 계산결과와 Table 1에 비교하였다.

Johnson(1973)의 변수수에 대한 KdV 방정식의 해석해 계산치, Green-Naghdi 이론에 따른 수치해(Ertekin and Wehausen, 1986) 그리고 Kennedy and Fenton(1997)의 LPA (local polynomial approximation)에 의한 수치해와 비교하였다.

Table 1. Heights of leading solitary wave arising from the propagation onto a shelf of a solitary wave of initial height $H/d_s=0.12$.

d_f/d_s	LPA	Green-naghdi	KdV	Nwogu's boussinesq	Fully nonlinear boussinesq
0.1637	0.1745	0.168	0.181	0.179	0.174
0.5	0.1988	0.184	0.207	0.209	0.201
0.4510	0.2120	0.190	0.220	0.230	0.221

이 중 가장 정확한 해는 자유수면 경계조건에서 아무런 가정을 도입하지 않은 LPA가 가장 정확한 모형이다. Green-Naghdi 이론에 의한 결과는 전체적으로 파고가 과소산정되었고 KdV 방정식은 반사가 고려되지 않아 일관되게 파고가 과대산정 되어있다. Boussinesq 방정식을 사용한 결과는 Nwogu의 확장형 모형의 경우 LPA에 비해 파고를 과대산정하였고 완전 비선형모형은 $d/d_s=0.6137$, 0.5의 경우엔 LPA와 아주 가까운 값을 보여주고 $d/d_s=0.451$ 의 경우 과대산정된 값을 나타내었다.

완전비선형모형의 비선형성의 정도가 LPA보다 치수가 낮음을 고려할 때 연산결과는 만족스럽고, 또한 확장형 Boussinesq 모형으로 비선형과의 천수를 모의하기엔 한계가 있음을 알 수 있다. $d/d_s=0.6137$, 0.451인 경우의 수심은 KdV 특성수심으로서 이론적으로 각각 2개 및 세 개의 고립파로 분열되는 조건인데 이러한 고립파들의 생성 또한 잘 모의되었다.

4.5 해저 평봉(submerged shelf) 상에서의 파랑전파

Fig. 9와 같은 해저지형에 대한 규칙파의 전파를 수치 실험하여 실험치와(Kennedy and Fenton, 1997) 비교하였다. $\Delta x=0.25$, $\Delta t=0.006$ 을 사용하였고 $T=1.897$, 2.846, 3.795 세 경우에 대해 수치 모의하였다. 입사파고는 $H/d=0.1$ 이고 $x/d=-56.6$ 에서 조파되었다.

계산결과는 수치계산결과의 위상에 맞추어 실험치와 비교하였다(Fig. 10). 전체적으로 천수로 인하여 파고가 증가하였고 주 파랑의 사이에 작은 파봉이 형성되는 것을 볼 수 있다. $T=1.897$ 의 경우 실험치와 가장 가까운 결과를 보여주지만 천수현상으로 인한 파고의 증가가 실험치보다 작았고 다른 경우들은 일반적인 경향은 일치하지만 실험치와 비교하여 오차가 비교적 크게 나타났다.

4.6 쇄파 실험

Sato *et al.*(1989)은 일정경사를 가진 해저지형에서의

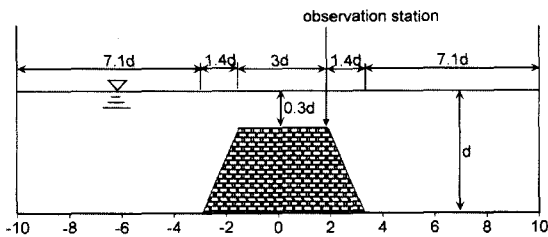


Fig. 9. Experiment setup for wave propagation over a submerged shelf.

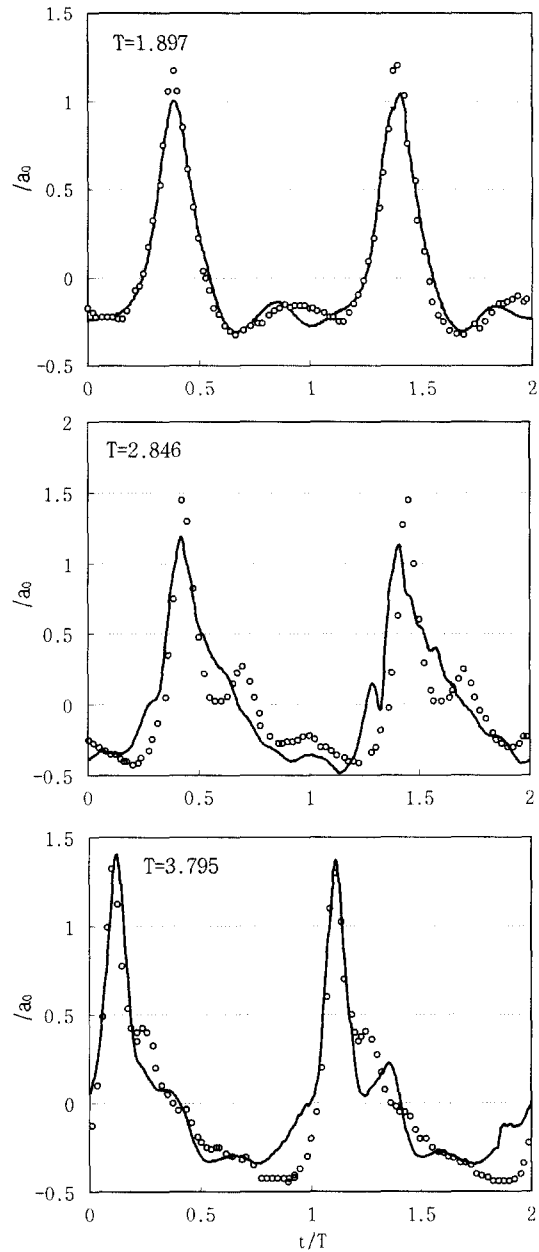


Fig. 10. Computed and measured time traces of surface elevation at observation station.

단일 진행파에 대한 쇄파실험을 행하였다. 쇄파대에서의 본 모형의 거동을 확인하기 위해 1/40의 일정경사를 가진 지형에 대해 주기 0.985 s, 심해파고 2.86 cm의 파랑에 대해 실험을 행한 후 관측치와 비교하였다. 수심변화에 따른 파고의 변화를 실험치와 비교하여 Fig. 11에 나

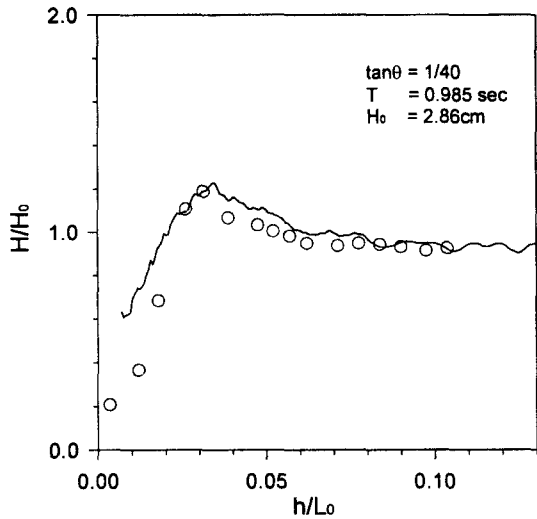


Fig. 11. Computed and measured wave heights: measured (o); computed (-).

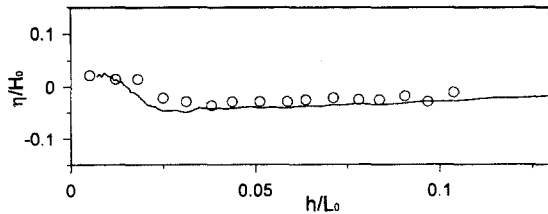


Fig. 12. Computed and measured mean water surface; measured (o); computed (-).

타내었고 Fig. 12는 평균 수면의 변화를 관측치와 비교한 것이다. 쇄파를 전후한 파고 변화의 전반적인 거동은 실험치와 대체적으로 일치하고 있다. 하지만 전체적으로 파고가 조금씩 크게 나타났고 특히 쇄파후의 파고가 과대산정되었다.

쇄파 계수의 값을 조정하여 보았지만 이러한 경향은 일관되게 유지되었다. 평균수면의 변화는 비교적 잘 일치하고 있고 쇄파 시작점과 평균수면의 상승위치는 약간의 차이를 보였다.

4.7 타원형 천퇴상의 이차원 전파실험

Berkhoff *et al.*(1982)의 수중천퇴에 대하여 이차원 완전비선형 Boussinesq 방정식을 사용하여 파랑전파를 계산해 보았다. 비교적 깊은 수역을 포함하고 있어 일반 Boussinesq 모형은 적용할 수 없는 경우이다. 이 실험은 완경사방정식의 검증용 위해 많이 사용되었기 때문에 실험치 및 최(2000)의 타원형 완경사방정식의 계산결과와 비교하였다.

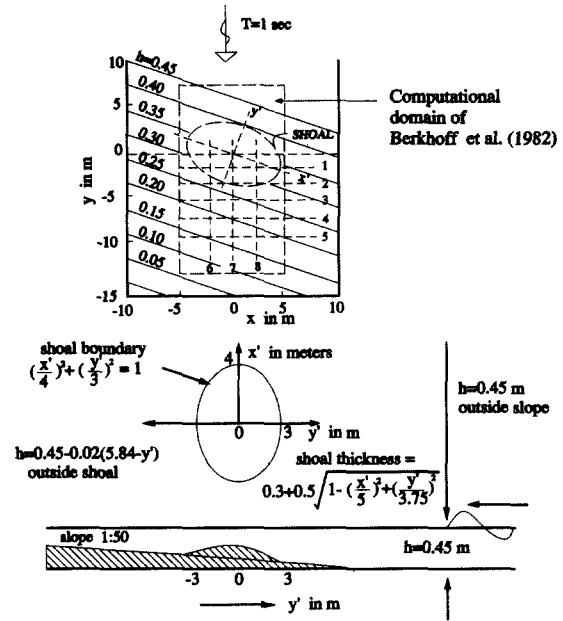


Fig. 13. Experiment layout for wave focusing experiment of Berkhoff *et al.* (1982).

실험대상의 지형 및 관측 구간은 Fig. 13과 같다. 주기 1초, 진폭 2.32 cm의 단순진행파가 $y=10$ m에서 입사된다. $x=-10$ m와 $x=10$ m에 측벽이 있고 $y=12$ m에 흡수경계가 위치한다. 해저지형은 1:50의 경사를 가진 해저에 타원형 천퇴가 있고 등심선은 x 축과 20° 의 각을 가진다. 바다경사는 $y < -5.82$ 이면 $h=0.45$, $y > -5.82$ 이면 $h=0.45-0.02(5.82+y)$ 으로 주어진다. 천퇴의 경계는 $(x'/4)^2 + (y'/3)^2 = 1$, 천퇴의 두께는 $d=0.3+0.5 \sqrt{1-(x'/5)^2 - (y'/3.75)^2}$ 이다.

천퇴근처에 위치한 여덟 관측구간을 따라 파고를 비교하였다(Fig. 14). 전체적으로 실험치와 잘 일치함을 볼 수 있고 특히 완경사방정식을 사용한 계산결과보다는 현저히 양호한 결과를 보여주고 있다. Wei and Kirby(1995)는 Nwogu의 Boussinesq 방정식으로 동일한 계산을 행하였는데 완전비선형 방정식을 사용한 본 계산결과보다는 값의 정확도가 떨어지는데 이는 확장형 방정식이 중간수심에서의 비선형성을 제대로 모의하지 못하기 때문이다(조파선에서의 kh 가 약 1.9).

5. 결 론

완전비선형 Boussinesq 방정식을 4차의 Adams predictor-corrector 기법을 사용하여 차분화하였고 면 내부조파기법

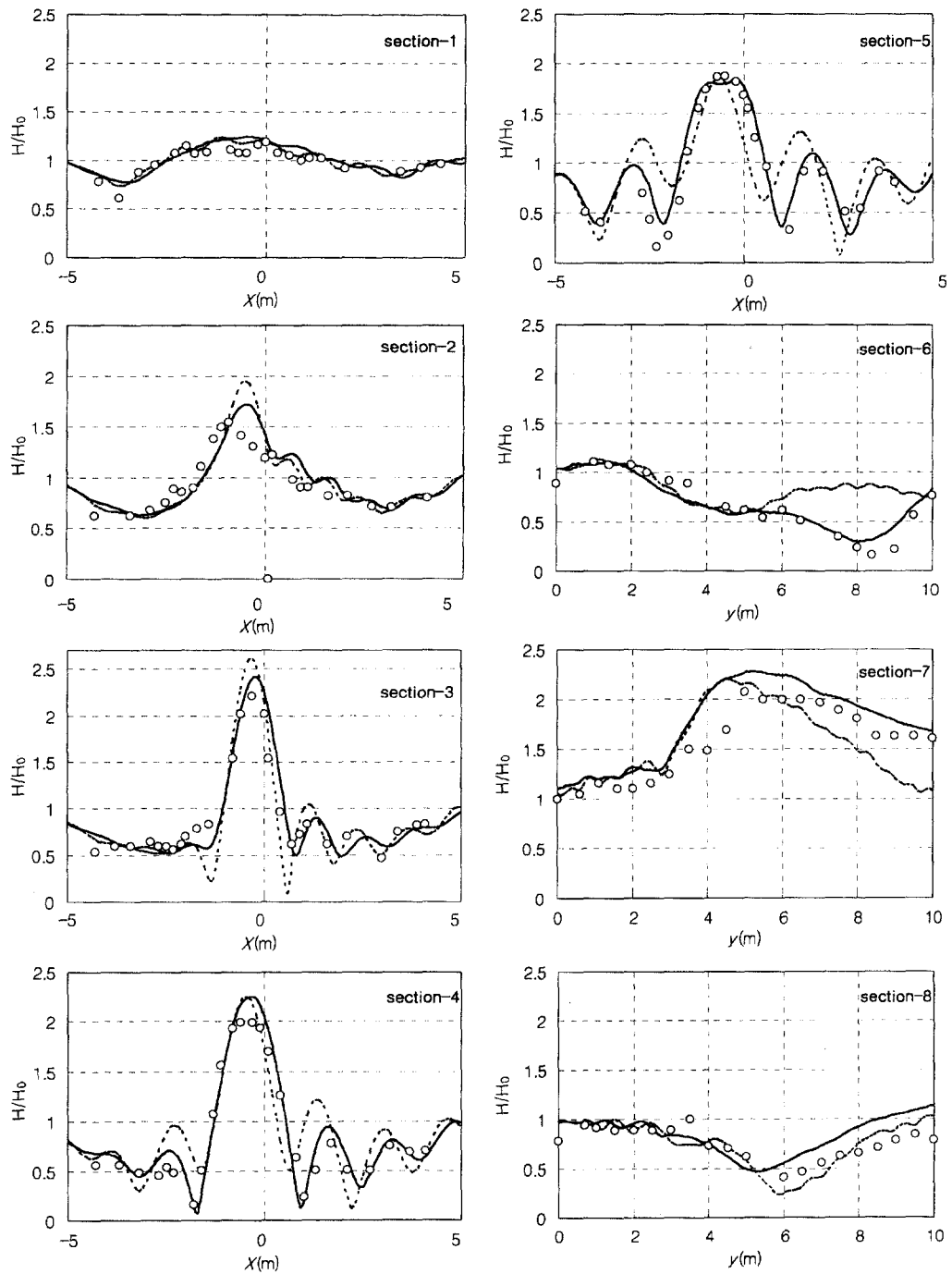


Fig. 14. Comparisons of amplitude along specified sections; fully nonlinear Boussinesq equation (—), elliptic mild slope equation (----), experiment data(oo).

과 스폰지 경계층을 사용하고 쇄파구조를 추가하였다. 선형파 및 비선형파의 내부조파실험을 통해 목적파를 잘 재

현할 수 있었다. 스폰지 경계층에서의 파 감쇄 또한 효율적으로 기능하여 연산영역 내부로의 재반사를 억제하므로

써 충분한 연산시간에도 별다른 안정성 문제는 발생하지 않았다.

비선형성이 부각되는 고립파의 천수실험을 통해 확장형 Boussinesq 모형의 한계와 완전 비선형모형의 우월성을 확인하였다. 해저 평봉으로 인한 파랑변형실험에서는 전체적으로 천수로 인하여 파고가 증가하고 주 파랑의 사이에 작은 파동이 형성되는 일반적인 거동은 실험치와 일치하였지만 주파봉 뒤에 형성되는 작은 파형은 실험치와 차이를 보였다. 쇄파수치실험을 통하여 계산된 쇄파 전후의 파고변화는 실험치와 전반적으로 일치하였다. 전체적으로 파고가 약간 큰 값을 보였고 특히 쇄파후의 파고가 과대산정되었다. 평균수면의 변화는 비교적 잘 일치하고 있고 쇄파시작점과 평균수면의 상승위치는 약간의 차이를 보였다. 수중천퇴에 대하여 이차원 완전 비선형 Boussinesq 방정식을 사용하여 파랑전파를 계산하였고 천퇴 근처에 위치한 여덟 관측구간을 따라서 파고 관측치 및 타원형 환경사방정식의 계산결과와 비교하였다. 전체적으로 완전비선형 Boussinesq 모형의 계산결과가 환경사방정식의 계산결과에 비해 실험치와 잘 일치하였다. 이상의 실험을 통해 비선형 모형의 중요성을 확인하고 Wei *et al.*(1995)의 완전비선형 모형의 특성을 확인할 수 있었다.

사 사

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(2001-1-31100-003-2) 지원으로 수행된 연구의 일부입니다. 재단의 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 최용석, 2000. PCGM과 GCGM을 이용한 타원형 환경사방정식의 수치해석, 경성대 학교 석사학위 논문.
- Abbott, M.B., McCowan, A.D. and Warren, I.R., 1984. Accuracy of short wave numerical model, *J. Hydr. Engrg.*, **110**(10), pp. 1287-1301.
- Berkhoff, J.C.W., Booij, N. and Radder, A.C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, *Coast. Engrg.*, **6**(13), pp. 255-279.
- Demirbilek, Z. and Webster, W.C., 1992. Application of the Green Naghdi theory of fluid sheets to shallow water wave problems: Report I. Model Development Technical Report CERL-92-11, US Army Water-ways Experiment station, Vicksburg, MS.
- Elgar, S. and Guza, R.T., 1985. Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory and a nonlinear model, *J. Fluid Mech.*, **158**, pp. 47-70.
- Ertekin, R. and Wehausen, J., 1986. Some soliton calculations, Proc. 16th. Symp. Naval Hydrodyn., Berkeley, pp. 167-184.
- Freilich, M.H. and Guza, R.T., 1984. Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves, *Proc. Roy. Soc. London*, **A311**, pp. 1-41.
- Green, A.E. and Naghdi, P.M., 1976. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth, *J. Fluid Mech.*, **78**, pp. 237-246.
- Grilli, S., Skoarup, J. and Svendsen, I.A., 1989. An efficient boundary element method for nonlinear water waves, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **6**(2), pp. 97-107.
- Grilli, S., 1993. Modelling of nonlinear wave motion in shallow water, Chater 3 in Computational Methods for Free and Moving Boundary Problems in Heat and Fluid Flow, Computational Mechanics Publication, Elsevier Applied Sciences, London, UK.
- Heitner, K.L. and Housner, G.W., 1970. Numerical model for tsunami; run-up, *J. Waterways, Ports, Coastal and Ocean Engrg.*, **96**, pp. 701-719.
- Hibberd, S. and Peregrine, D.H., 1979. Surf and run-up on a beach: A uniform bore, *J. fluid Mech.*, **95**, pp. 323-345.
- Horikawa, K. and Kuo, C.T., 1966. A study on wave transformation inside surf zone, *Proc. Int. Conf. Coastal Engrg.*, Tokyo, pp. 217-233.
- Israeli, M. and Orszag, S.A., 1981. Approximation of radiation boundary conditions, *J. Comp. Phys.*, **41**(1), pp. 115-135.
- Johnson, R.S., 1973. On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **73**, pp. 183-203.
- Kennedy, A.B. and Fenton, J.D., 1997. A fully-nonlinear computational method for wave propagation over topography, *Coast. Engrg.*, **32**, pp. 137-161.
- Kennedy, A.B., Chan, Q., Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., 2000. Boussinesq modelling of wave transformation, breaking and runup. I: One dimension, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, **126**, pp. 48-56.
- Kirby, J.T., Wei, G., Chan, Q., Kennedy, A.B. and Dalrymple, R.A., 1998. FUNWAVE 1.0 Fully nonlinear Boussinesq wave model document and user's manual, Center for Applied Coastal Research, Univ. of Delaware.
- Larsen, J. and Dancy, H., 1983. Open boundaries in short-wave simulations A new approach, *Coast. Engrg.*, pp. 285-297.
- Liu, P. L.-F., Yoon, S.B. and Kirby, J.T., 1985. Nonlinear

- refraction diffraction of waves in shallow water, *J. Fluid Mech.*, **153**, pp. 185-201.
- Madsen, P.A., Murray, R. and Sørensen, O.R., 1991. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coast. Engrg.*, **15**(4), pp. 371-388.
- Madsen, P.A. and Schäffer, H.A., 1998. Higher order Boussinesq type equations for surface gravity waves-derivation and analysis, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A356**, pp. 1-59.
- Madsen, P.A., Sørensen, O.R. and Schäffer, H.A., 1997. Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. part I. Model description and cross-shore motion of regular waves, *Coastal Engrg.*, **32**, pp. 255-287.
- Madsen, P.A., Sørensen, O.R. and Schäffer, H.A., 1997. Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model part I. Surf beat and swash oscillations for wave groups and irregular waves, *Coastal Engrg.*, **32**, pp. 289-319
- Mei, C.C., 1989. The applied dynamics of ocean surface waves, World Scientific.
- Nwogu, O., 1993. An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, **119**(6), pp. 618-638.
- Peregrine, D.H., 1967. Long wave on a beach, *J. Fluid Mech.*, **27**, pp. 815-827.
- Rygg, O.B., 1988. Nonlinear refraction-diffraction on waves in intermediate and shallow water, *Coast. Engrg.*, **12**(3), pp. 191-211
- Sato, S., Kabiling, M.B. and Suzuki, H., 1991. Prediction of near bottom velocity history by a nonlinear dispersive wave model, *Coast. Engrg. Japan*, **35**(1), pp. 67-82.
- Schäffer, H.A., Madsen, P.A. and Deigaard, R.A., 1993. A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, *Coast. Engrg.*, **20**, pp. 185-202.
- Su, C.H. and Gardner, C.S., 1967. Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, *J.d Math. Phys.*, **10**(3), pp. 536-539.
- Tao, J., 1983 Computation of wave run-up and wave breaking, Internal report, DHI, 40 pp.
- Wei, G. and Kirby, J.T., 1995. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, **121**(5), pp. 251-261.
- Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T. and Subramanya, R., 1995. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part I: Highly nonlinear unsteady waves, *J. Fluid Mech.*, **294**, pp.71-92.
- Wei, G., Kirby, J.T. and Sinha, A., 1999. Generation of waves in Boussinesq models using a source function method, *Coast. Engrg.*, **36**, pp. 271-299.
- Wu, C.S. and Liu, P.L.-F., 1982. Finite element modelling of breaking wave included nearshore current, *Finite Element Flow Analysis*, pp. 579-586.
- Zelt, J.A., 1991. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves, *Coast. Engrg.*, pp. 1192-1204.

Received October 25, 2001

Accepted November 22, 2001