

## 맥동관 내부의 2차 속도와 온도의 비정상성분

### Unsteady Components of Second-order Velocity and Temperature in a Pulse Tube

박희찬\*, 정은수\*\*

Hee Chan Park\*, Eun Soo Jeong\*\*

**Abstract** : Unsteady components of the second-order axial velocity and temperature within a tapered pulse tube were obtained by using a novel hybrid method of solution which combines an analytical solution with a numerical solution. The effects of operating frequency, taper angle and cold end temperature on the unsteady components of the second-order axial velocity and temperature were shown. The unsteady component of the second-order mass flux had the amplitude of the same order as the steady component when the velocities at the ends of the pulse tube have only first-order components.

**Key Words** : Pulse tube refrigerator, Pulse tube, Second-order, Velocity, Temperature, Unsteady components

#### 기호설명

$C_p$	정압비열
$i$	허수단위 ( $=\sqrt{-1}$ )
$k$	열전도도
$L$	맥동관의 길이 (Fig. 1)
$l$	맥동관벽의 두께
$\dot{m}$	질량유속
$Ma$	마하수 ( $=\omega s_1/\sqrt{\gamma RT_H}$ )
$p$	압력
$Pr$	프란틀수
$R$	맥동관의 반지름
$R_g$	기체상수
$r$	반경방향 좌표 (Fig. 1)
$s_C$	$x=0$ 에서의 단면평균 변위길이 (Fig. 1)
$s_H$	$x=L$ 에서의 단면평균 변위길이 (Fig. 1)
$T$	온도
$T_H$	$x=L$ 에서의 온도, 기준온도
$t$	시간
$u$	$x$ -방향 속도

$\bar{u}$	$x$ -방향 속도의 단면평균 (Fig. 1)
$v$	$r$ -방향 속도
$x$	축방향 좌표 (Fig. 1)

#### 그리스문자

$\beta$	무차원화된 작동각속도(식 (22))
$\epsilon$	변위체적과 맥동관 총체적의 비
$\gamma$	비열비
$\mu$	점도
$\rho$	밀도
$\Phi$	테이퍼각
$\phi$	맥동관 양쪽의 속도의 위상
$\omega$	각속도

#### 상첨자

*	무차원변수
~	공역복소수

#### 하첨자

0	테이퍼각이 0일 때의 값
1	1차항
2	2차항
2,0	2차항의 정상성분
2,2	2차항의 비정상성분
$C$	맥동관의 저온부
$H$	맥동관의 고온부
$m$	시간평균

## 1. 서 론

맥동관냉동기(pulse tube refrigerator)는 구조적인 단순성, 고신뢰성, 그리고 저온부의 진동이 작다는 등의 장점을 갖고 있어서 최근에 많은 연구가 진행되고 있다. 오리피스(orifice) 맥동관냉동기와 이중입구(double inlet) 맥동관냉동기와 같은 새로운 형태의 맥동관냉동기가 개발되면서 맥동관냉동기의 냉동능력은 스티어링냉동기나 GM 냉동기와 필적할만한 수준에 도달하였다.[1]

맥동관냉동기의 냉동효과는 맥동관 내부의 정미엔탈피운동(net enthalpy transport)에 의하여 발생하므로 맥동관냉동기의 성능향상을 위해서는 맥동관 내부에서 일어나는 작동가스의 유동과 열역학적 거동을 이해하는 것이 필요하다. 지금까지 맥동관의 해석에 사용되어온 1차원 모델들은 운동량과 열의 확산을 고려하지 않았기 때문에 이차유동(secondary flow)에 의

\* 학생회원 : 홍익대학교 대학원 석사과정  
 \*\* 정 회 원 : 홍익대학교 기계공학과 부교수  
 원고접수 : 2001년 10월 16일  
 심사완료 : 2001년 11월 09일

한 정상상태의 대규모 흐름(steady large scale streaming)이나 가스와 맥동관벽 사이의 열전달이 맥동관냉동기의 성능에 미치는 영향을 규명할 수 없다.[2] 이러한 영향을 규명하기 위하여는 운동량과 열의 확산을 포함하는 2차원 해석모델이 필요하다.

맥동관 내부의 작동가스와 벽 사이의 열전달은 정미엔탈피유동에 영향을 미치고, 운동량 확산에 의한 정상상태의 질량흐름(mass streaming)은 열을 고온열교환기에서 저온열교환기로 이동시키므로 냉동용량을 감소시킨다.[3-5] Olson과 Swift[5]는 테이퍼가 있는 맥동관을 사용하면 정상상태의 질량흐름을 억제할 수 있다는 것을 보였다. 운동량과 열의 확산을 포함하고 테이퍼각이 엔탈피유동에 미치는 영향을 이해하기 위해서는 단면적이 변하는 맥동관의 2차원 해석이 필요하다.

테이퍼가 없는 맥동관에 대한 2차원 해석은 Lee 등[3,4]과 백상호 등[6]에 의하여 수행되었다. 백상호 등[7,8]과 Baek 등[9,10]은 테이퍼가 있는 맥동관의 2차원 해석모델을 제시하였고, 2차 축방향 속도와 온도의 정상성분들을 구하였다. 또한, 이들은 테이퍼각이 정상상태의 질량흐름과 질량흐름에 의한 엔탈피손실에 미치는 영향을 보였다.

본 연구에서는 맥동관 내부의 2차 축방향 속도와 온도의 비정상성분(unsteady component)들을 구하는 방법을 제시하였다. 2차 축방향 속도와 온도의 비정상성분들의 지배방정식과 경계조건이 선형(linear)이므로 해의 중첩을 이용하여 각각 해석적으로 구한 해와 수치적으로 구한 해의 합으로 표현하였다. 맥동관냉동기의 작동속도, 테이퍼각, 그리고 냉동온도 등이 2차 축방향 속도와 온도의 비정상성분들에 미치는 영향을 알아보았다.

## 2. 해석 모델

그림 1은 맥동관냉동기의 맥동관을 나타낸다. 그림 1에 보여진 맥동관의 왼쪽과 오른쪽에 저온열교환기와 고온열교환기가 각각 위치한다. 맥동관 내부의 작동가스는 맥동관 양쪽으로 들어오고 나가는 작동가스의 주기적인 운동에 의하여 압축과 팽창을 반복하며, 정미엔탈피는 저온열교환기에서 고온열교환기 방향으로 이동한다. 해석에 사용된 주요 가정들은 다음과 같다.

- (1) 가스의 왕복운동의 1차 진폭  $s_{C1}$ 과  $s_{H1}$ 은 맥동관의 길이  $L$ 에 비하여 작다. 또한, 2차 진폭  $s_{C2}$ 와  $s_{H2}$ 는 각각 1차 진폭  $s_{C1}$ 과  $s_{H1}$ 에 비하여 작다.
- (2) 맥동관의 반지름  $R$ 은 관의 길이  $L$ 에 비하여 매우 작으므로 작동가스의  $x$ -방향 온도와 속도의 구배는

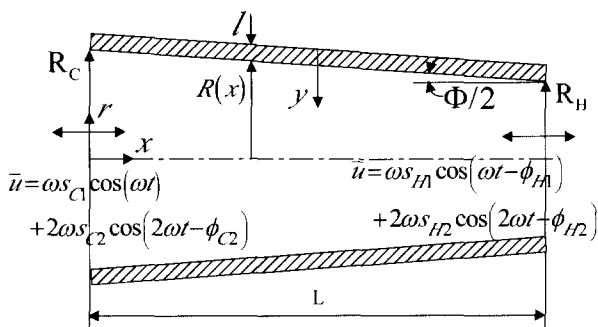


그림 1. 테이퍼가 있는 맥동관의 구조  
Fig. 1. Schematic diagram of a tapered pulse tube

$r$ -방향의 온도와 속도의 구배에 비하여 매우 작다.

- 또한, 압력은 맥동관의 한 단면에서 균일하다.
- (3) 작동가스가 움직이지 않을 때 맥동관 벽과 작동가스의 온도는 평균온도  $T_m(x)$ 로 같다.
- (4) 작동유체는 이상기체이고, 유동은 층류이다.
- (5) 맥동관 벽의 열용량이 크므로 맥동관 벽의 2차 온도의 변화는 0이다.

위의 가정들을 이용하여 구한 작동가스의 질량보존, 운동량보존, 에너지보존, 그리고 이상기체 방정식은 다음과 같다.[11]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (3)$$

$$p = \rho R_g T \quad (4)$$

위의 지배방정식들의 해는 섭동법(perturbation method)을 이용하여 구하였다. 모든 변수들을 2차항(second-order term)까지 전개하면 다음과 같이 시간평균항, 1차항, 그리고 2차항들의 합으로 표현된다.[5,12]

$$u(x, r, t) = 0 + Re[u_1(x, r)e^{i\omega t}] + u_{2,0}(x, r) + Re[u_{2,2}(x, r)e^{2i\omega t}] \quad (5)$$

$$v(x, r, t) = 0 + Re[v_1(x, r)e^{i\omega t}] + v_{2,0}(x, r) + Re[v_{2,2}(x, r)e^{2i\omega t}] \quad (6)$$

$$T(x, r, t) = T_m(x) + Re[T_1(x, r)e^{i\omega t}] + T_{2,0}(x, r) + Re[T_{2,2}(x, r)e^{2i\omega t}] \quad (7)$$

$$\rho(x, r, t) = \rho_m(x) + Re[\rho_1(x, r)e^{i\omega t}] + \rho_{2,0}(x, r) + Re[\rho_{2,2}(x, r)e^{2i\omega t}] \quad (8)$$

$$p(x, t) = p_m + Re[p_1(x)e^{i\omega t}] + p_{2,0}(x) + Re[p_{2,2}(x)e^{2i\omega t}] \quad (9)$$

$$\mu(x, r, t) = \mu_m(x) + Re[\mu_1(x, r)e^{i\omega t}] + \mu_{2,0}(x, r) + Re[\mu_{2,2}(x, r)e^{2i\omega t}] \quad (10)$$

$$k(x, r, t) = k_m(x) + Re[k_1(x, r)e^{i\omega t}] + k_{2,0}(x, r) + Re[k_{2,2}(x, r)e^{2i\omega t}] \quad (11)$$

여기서  $Re[\ ]$ 은 복소변수의 실수부를 나타낸다. 하첨자 'm'을 갖는 변수들은 시간평균값들을 의미하는데, 압력과 속도의 요동성분이 없을 경우에 변수들이 갖는 값들이다.[5]  $z_1$ 은 1차항의 복소진폭을 의미하고, 하첨자 '2,0'과 '2,2'는 각각 2차항의 정상성분과 각속도가  $2\omega$ 인 비정상성분을 나타낸다. 1차항들의 곱은 2차항이고, 1차항과 2차항을 시간평균항에 곱하여도 차수는 변하지 않는다.

지배방정식의 해를 일반화하기 위하여 변수들을 다음과 같이 무차원화한다.

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & r^* &= \frac{r}{R(x)} & R^* &= \frac{R}{R_0} \\ t^* &= \frac{t}{1/\omega} & u^* &= \frac{u}{\omega s_{C0}} & v^* &= \frac{v}{\omega s_{C0} R_0/L} \\ p^* &= \frac{p}{p_0} & T^* &= \frac{T}{T_H} & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $p_0$ 와  $\rho_0$ 는 각각 기준 압력과 밀도를 나타낸다.  $R_0$ 는 맥동관의 길이와 체적을 일정하게 유지하며 테이퍼각  $\phi$ 가 0°가 될 경우의 맥동관의 내부반지름을 나타내는데, 저온부의 반지름  $R_C$ 와  $R_0$  사이의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{R_C}{R_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{R_0} \tan \frac{\phi}{2} + \sqrt{4 - \frac{1}{3} \left( \frac{L}{R_0} \tan \frac{\phi}{2} \right)^2} \right] \quad (13)$$

$s_{C0}$ 는 1차 변위체적을 일정하게 유지하며 테이퍼각  $\phi$ 가 0°가 될 경우의 저온부의 1차 변위길이를 나타낸다.  $s_{C0}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s_{C0} = s_{C1} \left( \frac{R_C}{R_0} \right)^2 \quad (14)$$

속도, 온도, 압력의 1차해와 2차해의 정상성분을 구하는 방법은 백상호 등[7,8]과 Baek 등[9,10]에 자세히 제시되어 있다.

식 (5)-(11)의 표현들을 지배방정식 (1)-(4)에 대입하고 2차항들의 비정상성분만 모으면 다음과 같이 2차 속도, 온도, 압력, 밀도의 비정상성분들에 대한 지배방정식들을 구할 수 있다. 1차항들의 곱은 다음 관계를 이용하여 구하였는데

$$Re[\rho_1 e^{i\omega t}] Re[u_1 e^{i\omega t}] = \frac{1}{2} Re[\rho_1 \dot{u}_1] + \frac{1}{2} Re[\rho_1 u_1 e^{2i\omega t}] \quad (15)$$

여기서  $\sim$ 는 공액복소수(complex conjugate)를 의미한다.[5]

$$\begin{aligned} \frac{2i}{\varepsilon_{C1}} \rho_{2,2}^* + \frac{\partial(\rho_m^* u_{2,2}^*)}{\partial x^*} + \frac{1}{R^* r^*} \frac{\partial(r^* \rho_m^* v_{2,2}^*)}{\partial r^*} \\ = -\frac{1}{2} \frac{\partial(\rho_1^* u_1^*)}{\partial x^*} - \frac{1}{2R^* r^*} \frac{\partial(r^* \rho_1^* v_1^*)}{\partial r} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial u_{2,2}^*}{\partial r^*} \right) - 4i\beta^2 u_{2,2}^* = 2 \frac{\beta^2 \varepsilon_{C1}}{\gamma Ma^2} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dp_{2,2}^*}{dx^*} \\ + f^*(x^*, r^*) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T_{2,2}^*}{\partial r^*} \right) - 4i\beta^2 Pr T_{2,2}^* \\ = -4i \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta^2 Pr \frac{p_{2,2}^*}{\rho_m^*} + 2\beta^2 \varepsilon_{C1} Pr u_{2,2}^* \frac{dT_m^*}{dx^*} \\ + g^*(x^*, r^*) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\rho_{2,2}^* = \frac{1}{T_m^*} \left( p_{2,2}^* - \rho_m^* T_{2,2}^* - \frac{1}{2} \rho_1^* T_1^* \right) \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} f^*(x^*, r^*) &= i\beta^2 \frac{\rho_1^* u_1^*}{\rho_m^*} + \beta^2 \varepsilon_{C1} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \beta^2 \varepsilon_{C1} \frac{1}{R^*} v_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial r} \\ &\quad - \frac{b}{2T_m^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* T_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} g^*(x^*, r^*) &= \beta^2 \varepsilon_{C1} Pr \left( u_1^* \frac{\partial T_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R^*} v_1^* \frac{\partial T_1^*}{\partial r^*} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_1^* u_1^*}{\rho_m^*} \frac{dT_m^*}{dx^*} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{u_1^*}{\rho_m^*} \frac{dp_1^*}{dx^*} \right) \\ &\quad + i\beta^2 Pr \frac{\rho_1^* T_1^*}{\rho_m^*} - \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 Pr \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial r^*} \right)^2 \\ &\quad - \frac{c}{2T_m^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* T_1^* \frac{\partial T_1^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\beta = \frac{R}{\sqrt{2\mu_m/(\rho_m \omega)}} = \beta_0 \frac{R^*}{\sqrt{(T_m^*)^b/\rho_m^*}} \quad (22)$$

$$\beta_0 = \frac{R_0}{\sqrt{2\mu_0/(\rho_0 \omega)}} \quad (23)$$

$$\varepsilon_{C1} = \frac{\pi R_C^2 s_{C1}}{\pi R_0^2 L} = \frac{s_{C0}}{L} \quad (24)$$

$$Ma = \frac{\omega s_{C0}}{\sqrt{\gamma R T_H}} \quad (25)$$

$$b = \frac{T_m}{\mu_m} \frac{d\mu_m}{dT_m} \quad (26)$$

$$c = \frac{T_m}{k_m} \frac{dk_m}{dT_m} \quad (27)$$

이고, 식 (17)과 (18)을 유도하기 위하여  $\mu_1^*/\mu_m^* = b(T_1^*/T_m^*)$ 와  $k_1^*/k_m^* = c(T_1^*/T_m^*)$ 의 관계를 사용하였다.  $u_{2,2}^*$ ,  $v_{2,2}^*$ , 그리고  $T_{2,2}^*$ 의 경계조건들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r^* = 0 &: \partial u_{2,2}^*/\partial r^* = v_{2,2}^* = \partial T_{2,2}^*/\partial r^* = 0 \\ r^* = 1 &: u_{2,2}^* = v_{2,2}^* = T_{2,2}^* = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

식 (17), (20), (28)에서 알 수 있는 바와 같이  $u_{2,2}^*$ 의 지배방정식과 경계조건들은 선형(linear)이므로 해의 중첩(superposition)을 이용하여  $u_{2,2}^*$ 를 구할 수 있다.  $u_{2,2}^*$ 를 다음 식과 같이 분리할 수 있는데

$$u_{2,2}^* = (u_{2,2}^*)_h + (u_{2,2}^*)_p \quad (29)$$

$(u_{2,2}^*)_h$ 와  $(u_{2,2}^*)_p$ 는 각각 다음의 미분방정식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial (u_{2,2}^*)_h}{\partial r^*} \right) - 4i\beta^2 (u_{2,2}^*)_h \\ = 2 \frac{\beta^2 \varepsilon_{C1}}{\gamma Ma^2} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dp_{2,2}^*}{dx^*} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial (u_{2,2}^*)}{\partial r^*} \right) - 4i\beta^2 (u_{2,2}^*)_h = f^*(x^*, r^*) \quad (31)$$

$(u_{2,2}^*)_h$ 는 해석적인 방법으로 구할 수 있다. 경계조건  $r^*=0$ 에서  $\partial(u_{2,2}^*)_h/\partial r^*=0$ 과  $r^*=1$ 에서  $(u_{2,2}^*)_h=0$ 을 이용하여 식 (30)을 적분하면 다음과 같다.

$$(u_{2,2}^*)_h = i \frac{\epsilon_{c1}}{2\gamma Ma^2} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dp_{2,2}^*}{dx^*} \left[ 1 - f_{1,2}(r^*) \right] \quad (32)$$

여기서

$$f_{1,2}(r^*) = \frac{J_0[(i-1)\beta_2 r^*]}{J_0[(i-1)\beta_2]} \quad (33)$$

$$\beta_2 = \frac{R}{\sqrt{2\mu_m/(\rho_m 2\omega)}} = \sqrt{2}\beta \quad (34)$$

이다. 식 (31)의 우변은 식 (20)에서 알 수 있는 것과 같이 이미 알고 있는 1차해들로 표현되므로  $(u_{2,2}^*)_h$ 는 유한차분법(finite difference method)과 같은 수치적인 방법으로 해를 구할 수 있다. 즉,  $u_{2,2}^*$ 는 해석적인 방법으로 해를 구할 수 있는  $(u_{2,2}^*)_h$ 와 수치적인 방법으로 해를 구할 수 있는  $(u_{2,2}^*)_h$ 의 합으로 표현된다.  $(u_{2,2}^*)_h$ 는 아직 정해지지 않은  $p_{2,2}^*$ 항을 포함하고 있다.

식 (29)를 식 (18)에 대입하여 얻을 수 있는  $T_{2,2}^*$ 의 지배방정식과 경계조건들도 선형이므로 해의 중첩을 이용하여  $T_{2,2}^*$ 를 구할 수 있다.  $T_{2,2}^*$ 를 다음 식과 같이 분리할 수 있는데

$$T_{2,2}^* = (T_{2,2}^*)_h + (T_{2,2}^*)_p \quad (35)$$

$(T_{2,2}^*)_h$ 와  $(T_{2,2}^*)_p$ 는 각각 다음의 미분방정식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial (T_{2,2}^*)_h}{\partial r^*} \right) - 4i\beta^2 \text{Pr} (T_{2,2}^*)_h \\ &= -4i \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta^2 \text{Pr} \frac{p_{2,2}^*}{\rho_m^*} + 2\beta^2 \epsilon_{c1} \text{Pr} (u_{2,2}^*)_h \frac{dT_m^*}{dx^*} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial (T_{2,2}^*)_p}{\partial r^*} \right) - 4i\beta^2 \text{Pr} (T_{2,2}^*)_p \\ &= 2\beta^2 \epsilon_{c1} \text{Pr} (u_{2,2}^*)_p \frac{dT_m^*}{dx^*} + g^*(x^*, r^*) \end{aligned} \quad (37)$$

식 (32)의  $(u_{2,2}^*)_h$ 를 식 (36)에 대입하고, 경계조건  $r^*=0$ 에서  $\partial(T_{2,2}^*)_h/\partial r^*=0$ 과  $r^*=1$ 에서  $(T_{2,2}^*)_h=0$ 을 이용하여  $(T_{2,2}^*)_h$ 를 구하면 다음과 같다.

$$(T_{2,2}^*)_h = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p_{2,2}^*}{\rho_m^*} \left[ 1 - f_{4,2}(r^*) \right]$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\epsilon_{c1}^2}{4\gamma Ma^2} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dT_m^*}{dx^*} \frac{dp_{2,2}^*}{dx^*} \left[ 1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} f_{1,2}(r^*) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\text{Pr}-1} f_{4,2}(r^*) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

여기서

$$f_{4,2}(r^*) = \frac{J_0[(i-1)\beta_2 \sqrt{\text{Pr}} r^*]}{J_0[(i-1)\beta_2 \sqrt{\text{Pr}}]} \quad (39)$$

이다. 식 (37)의 우변은 이미 알고 있는  $(u_{2,2}^*)_p$ 와 1차해들로 표현되므로 유한차분법을 사용하여  $(T_{2,2}^*)_p$ 를 구할 수 있다. 즉,  $T_{2,2}^*$ 는 해석적인 방법으로 해를 구할 수 있는  $(T_{2,2}^*)_h$ 와 수치적인 방법으로 해를 구할 수 있는  $(T_{2,2}^*)_p$ 의 합으로 표현되는데,  $(T_{2,2}^*)_h$ 는 미지의 함수  $p_{2,2}^*$ 를 포함하고 있다.

작동가스의 2차 비정상 질량 보존식 (16)에  $r^*$ 을 곱하고  $r^*$ 에 관하여 0부터 1까지 적분하면 2차 압력의 비정상성분에 대한 파동방정식을 다음과 같이 구할 수 있다. 식 (19), (29), (32), (35), (38)과  $r^*=0$ 과 1에서  $v_{2,2}^*=0$ 의 경계조건이 사용되었다.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 p_{2,2}^*}{dx^{*2}} = \frac{1}{1-f_{v,2}} \left[ \left\{ \frac{f_{x,2}-f_{v,2}}{(1-\text{Pr})} - 1 + f_{v,2} \right\} - (1+b)f_{3,2} \right] \\ & \times \frac{1}{T_m^*} \frac{dT_m^*}{dx^*} \frac{dp_{2,2}^*}{dx^*} \\ & - \frac{4Ma^2}{\epsilon_{c1}^2} \frac{1+( \gamma-1)f_{x,2}}{1-f_{v,2}} \frac{p_{2,2}^*}{T_m^*} \\ & + \frac{2f_{2,2}}{1-f_{v,2}} \frac{1}{R^*} \frac{dR^*}{dx^*} \frac{dp_{2,2}^*}{dx^*} + h^*(x^*) \end{aligned} \quad (40)$$

여기서

$$\begin{aligned} h^*(x^*) &= \frac{1}{1-f_{v,2}} \frac{\gamma Ma^2}{\epsilon_{c1}} \left[ \frac{8}{\epsilon_{c1}} \frac{\rho_m^*}{T_m^*} \int_0^1 (T_{2,2}^*)_p r^* dr^* \right. \\ & + \frac{4}{\epsilon_c} \frac{1}{T_m^*} \int_0^1 \rho_{i1}^* T_{i1}^* r^* dr^* \\ & + 4i \frac{1}{(R^*)^2} \frac{d}{dx} \left\{ \rho_m^* (R^*)^2 \int_0^1 (u_{2,2}^*)_p r^* dr^* \right\} \\ & \left. + 2i \frac{1}{(R^*)^2} \frac{d}{dx} \left\{ (R^*)^2 \int_0^1 \rho_{i1}^* u_{i1}^* r^* dr^* \right\} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$$f_{v,2} = \frac{2}{(i-1)\beta_2} \frac{J_1[(i-1)\beta_2]}{J_0[(i-1)\beta_2]} \quad (42)$$

$$f_{x,2} = \frac{2}{(i-1)\beta_2 \sqrt{\text{Pr}}} \frac{J_1[(i-1)\beta_2 \sqrt{\text{Pr}}]}{J_0[(i-1)\beta_2 \sqrt{\text{Pr}}]} \quad (43)$$

$$f_{2,2} = \left( \frac{J_1[(i-1)\beta_2]}{J_0[(i-1)\beta_2]} \right)^2 \quad (44)$$

$$f_{3,2} = 1 - f_{v,2} + \left( \frac{J_1[(i-1)\beta_2]}{J_0[(i-1)\beta_2]} \right)^2 \quad (45)$$

이다.

식 (29)와 (32), 그리고 2차 축방향 속도의 경계조건들인  $\bar{u}_{2,2}(x=0, t) = 2\omega s_{c2} \cos(2\omega t - \phi_{c2})$ ,  $\bar{u}_{2,2}$

$(x=L, t) = 2\omega s_{H2} \cos(2\omega t - \phi_{H2})$ 에서 2차 압력의 파동방정식의 경계조건을 구하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{dp_{2,2}^*}{dx^*}\right)_{x^*=0} = -\frac{4i\rho_m^* \gamma Ma^2}{\varepsilon_{C1}(1-f_{v,2})} \left[ \frac{\varepsilon_{C2}}{\varepsilon_{C1}} \frac{e^{-i\phi_{C2}}}{(R^*_{C})^2} - \int_0^1 (u_{2,2}^*)_{\rho} r^* dr^* \right] \quad (46)$$

$$\left(\frac{dp_{2,2}^*}{dx^*}\right)_{x^*=1} = -\frac{4i\rho_m^* \gamma Ma^2}{\varepsilon_{C1}(1-f_{v,2})} \left[ \frac{\varepsilon_{H2}}{\varepsilon_{C1}} \frac{e^{-i\phi_{H2}}}{(R^*_{H})^2} - \int_0^1 (u_{2,2}^*)_{\rho} r^* dr^* \right] \quad (47)$$

### 3. 수치해석방법

1차해인  $u_1^*, v_1^*, T_1^*, p_1^*, \rho_1^*$ 과 시간평균온도  $T_m^*$ 는 백상호 등[7]과 Baek 등[9]에 의하여 제시된 방법을 사용하여 구할 수 있다.  $(u_{2,2}^*)_{\rho}$ 와  $(T_{2,2}^*)_{\rho}$ 는 식 (31)과 (37)을 유한차분법을 사용하여 구한다. 1차해와  $(u_{2,2}^*)_{\rho}$ 와  $(T_{2,2}^*)_{\rho}$ 를 이용하여 식 (41)의  $h^*(x^*)$ 를 계산한다. 2차 압력의 비정상성분  $p_{2,2}^*$ 를 구하기 위하여 식 (40)을 수치적분 하였는데, 수치적분방법은 4차 Runge-Kutta방법을 사용하였다. 가정된  $p_{2,2}^*(x^*=0)$ 과 식 (46)에 주어진  $(dp_{2,2}^*/dx^*) (x^*=0)$ 을 이용하여  $x^*=0$ 에서  $x^*=1$ 까지 식 (40)을 수치적분한다.  $x^*=1$ 에서의 압력구배 경계조건(식 (47))이 만족될 때까지  $p_{2,2}^*(x^*=0)$ 을 변화시키며 계산을 반복한다.

### 4. 결과 및 토의

본 연구의 계산에 사용된 무차원 변수들의 기준조건은  $\varepsilon_{C1}=0.1, R_0/L=0.1, Pr=0.7, \gamma=5/3, \varepsilon_H/\varepsilon_C=0.3, \phi_H=90^\circ, \varepsilon_{C2}=0, \varepsilon_{H2}=0, T_c^*=0.6, p_m^*$

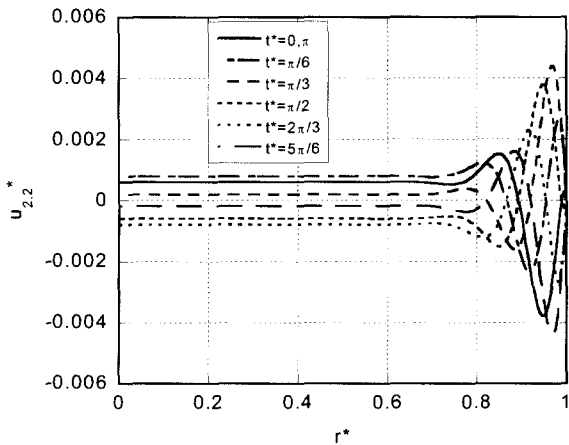


그림 2. 축방향 2차 속도의 비정상성분의 한 주기 동안의 변화 ( $\beta_0=30, \Phi=0^\circ, x^*=0.5$ )  
 Fig. 2. Variation of unsteady second-order axial velocity during a cycle ( $\beta_0=30, \Phi=0^\circ, x^*=0.5$ )

$=0.85$ 이다. 무차원화에 사용된 기준압력  $p_0 = 1$  MPa이고 기준온도  $T_H=300$ K이다.

그림 2는 2차 축방향 속도의 비정상성분  $u_{2,2}^*$ 의 시간에 따른 변화를 보여준다.  $u_{2,2}^*$ 의 각속도는  $2\omega$ 이므로 무차원 주기는  $\pi$ 이다. 축방향 2차 속도의 정상성분  $u_{2,0}^*$ 와 마찬가지로  $u_{2,2}^*$ 는 관성항들(식 (20) 우변의 두 번째와 세 번째항)과 전단응력의 반경방향 구배(식 (20) 우변의 마지막 항)에 의하여 주로 발생하므로[2], 1차 속도들과 온도의 반경방향 구배가 큰 벽 가까이에서의 경계층에서  $u_{2,2}^*$ 의 진폭이 크고, 1차 축방향 속도와 온도가 거의 균일한 맥동관의 중심부에서는  $u_{2,2}^*$ 의 진폭이 작은 값을 갖고 균일한 것을 알 수 있다. 벽 가까이에서 이중경계층(double boundary layer)이 발생하므로 유동영역을 벽에 인접한 제1경계층, 중심부(core), 그리고 제1경계층과 중심부 사이의 제2경계층으로 나눌 수 있다. 세 영역 사이에 위상차(phase shift)가 존재하고, 제1경계층과 제2경계층의 유동방향은 반대가 되는 것을 볼 수 있다.

그림 3은 2차 온도의 비정상성분  $T_{2,2}^*$ 의 시간에 따른 변화를 보여준다.  $T_{2,2}^*$ 는 벽에 인접한 경계층에서 진폭이 크나,  $T_{2,2}^*$ 는 중심부의 진폭이 경계층의 진폭보다 큰 것을 볼 수 있다. 벽에서 먼 중심부에서  $T_{2,2}^*$ 가 균일하므로 중심부의 작동가스는 단열상태에서 축방향으로 왕복운동을 하며 압축과 팽창을 반복하고 있는 것으로 생각된다. 벽 가까이에서  $T_{2,2}^*$ 의 진폭은 벽과의 열전달에 의하여 감소한다.

무차원 작동속도  $\beta_0$ 가  $u_{2,2}^*$ 의 진폭에 미치는 영향을 그림 4에 나타내었다. 식 (23)에서 알 수 있는 것처럼  $\beta_0$ 는 맥동관의 반지름과 속도경계층의 두께의 비를 의미한다. 작동각속도  $\omega$ 나 맥동관의 반지름  $R_0$ 을 바꾸어  $\beta_0$ 를 조절할 수 있는데 본 연구에서는 작동각속도  $\omega$ 를 변화시켰다.  $\beta_0$ 가 증가한다는 것은 속도경

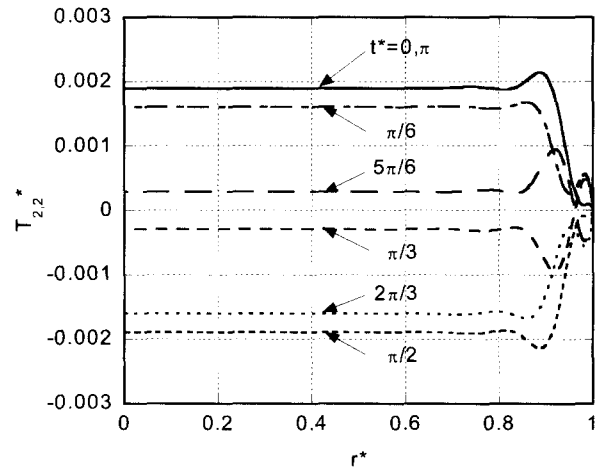


그림 3. 2차 온도의 비정상 성분의 한 주기 동안의 변화( $\beta_0=30, \Phi=0^\circ, x^*=0.5$ )  
 Fig. 3. Variation of unsteady second-order temperature during a cycle ( $\beta_0=30, \Phi=0^\circ, x^*=0.5$ )

계층의 두께가 얇아진다는 것을 의미한다.  $\beta_0$ 가 증가할수록 벽 가까이에서  $u_{2,2}^*$ 의 진폭이 최대가 되는 지점은 벽쪽으로 이동하고, 경계층 내부의 속도와 온도의 반경방향 구배가 증가하므로 최대값도 증가하는 것을 볼 수 있다.

그림 5는  $\beta_0$ 가  $T_{2,2}^*$ 의 진폭에 미치는 영향을 보여 준다.  $\beta_0$ 가 증가할수록  $T_{2,2}^*$ 의 진폭이 국부적으로 최대가 되는 지점들이 벽쪽으로 이동한다. 또한,  $\beta_0$ 가 10이상일 경우에는  $\beta_0$ 가 증가할수록 중심부의  $T_{2,2}^*$ 의 진폭이 증가하는 것을 알 수 있다.

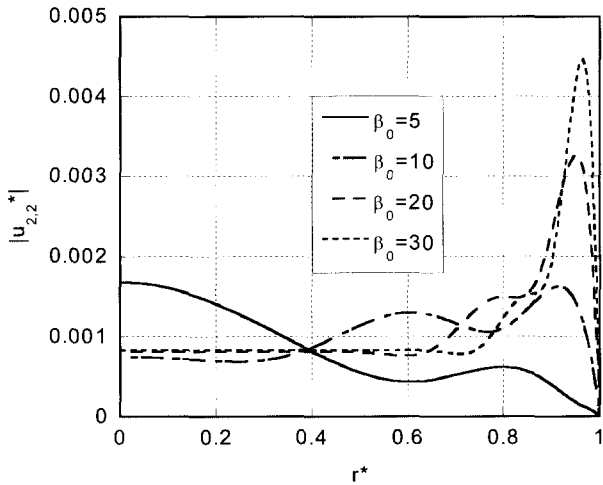


그림 4. 축방향 2차 속도의 비정상성분에 미치는 주파수의 영향 ( $\phi=0^\circ, x^*=0.5$ )  
 Fig. 4. Effect of frequency on unsteady second-order axial velocity ( $\phi=0^\circ, x^*=0.5$ )

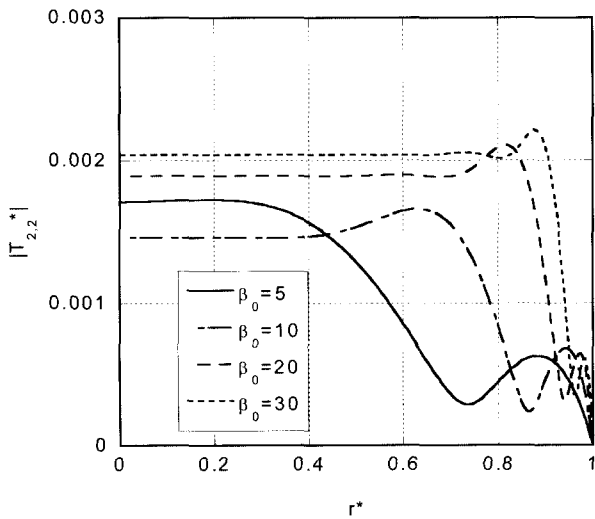


그림 5. 2차 온도의 비정상성분에 미치는 주파수의 영향 ( $\phi=0^\circ, x^*=0.5$ )  
 Fig. 5. Effect of frequency on unsteady second-order temperature ( $\phi=0^\circ, x^*=0.5$ )

테이퍼각  $\phi$ 가  $u_{2,2}^*$ 와  $T_{2,2}^*$ 의 크기에 미치는 영향을 그림 6과 7에 나타내었다.  $\phi$ 가 증가할수록  $u_{2,2}^*$ 의 최대값은 크게 증가하나,  $T_{2,2}^*$ 의 최대값과 중심부에서의 값은 약간 증가한다. 백상호와 정은수[8], Baek 등[10]은  $\phi$ 가 증가할수록 2차 온도의 정상성분  $T_{2,0}^*$ 는 감소하는 것을 보였으나,  $\phi$ 가 커질수록  $T_{2,2}^*$ 는 증가한다.

무차원 냉동온도  $T_c^*$ 가  $u_{2,2}^*$ 와  $T_{2,2}^*$ 의 진폭에 미치는 영향을 그림 8과 9에 나타내었다. 냉동온도  $T_c^*$ 가 낮아질수록  $u_{2,2}^*$ 의 최대값이 증가하나,  $T_{2,2}^*$ 의 크기는 감소하는 것을 볼 수 있다.

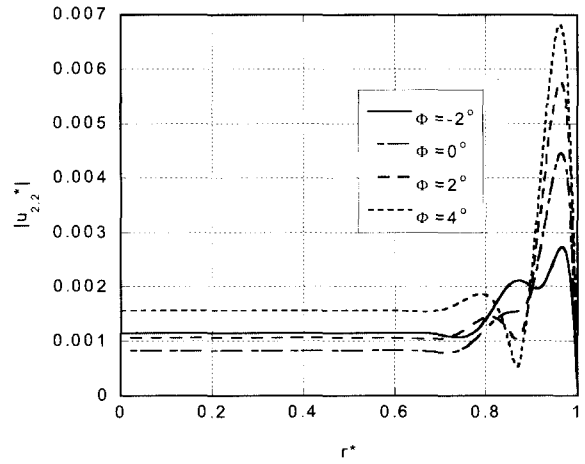


그림 6. 테이퍼각이 축방향 2차 속도의 비정상성분에 미치는 영향 ( $\beta_0=30, x^*=0.5$ )  
 Fig. 6. Effect of taper angle on unsteady second-order axial velocity ( $\beta_0=30, x^*=0.5$ )

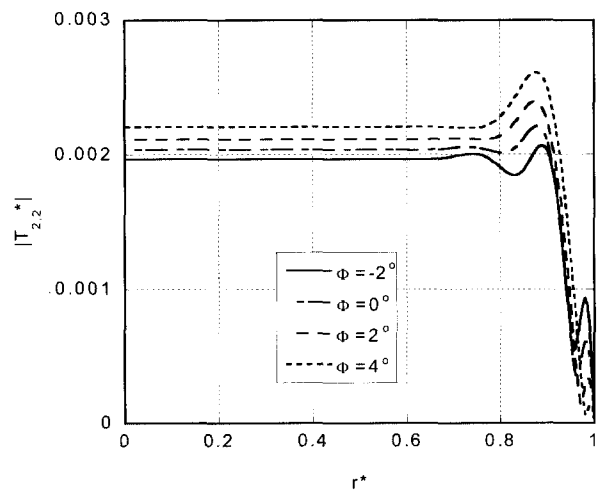


그림 7. 테이퍼각이 2차 온도의 비정상성분에 미치는 영향 ( $\beta_0=30, x^*=0.5$ )  
 Fig. 7. Effect of taper angle on unsteady second-order temperature ( $\beta_0=30, x^*=0.5$ )

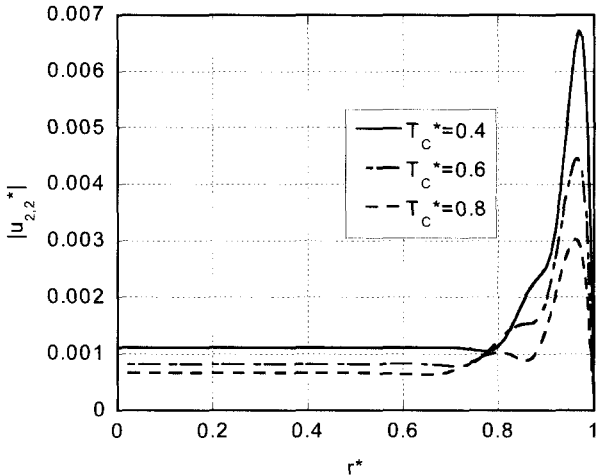


그림 8. 냉동온도가 축방향 2차 속도의 비정상성분에 미치는 영향 ( $\beta_0 = 30, \Phi = 0^\circ, x^* = 0.5$ )

Fig. 8. Effect of cold end temperature on unsteady second-order axial velocity ( $\beta_0 = 30, \Phi = 0^\circ, x^* = 0.5$ )

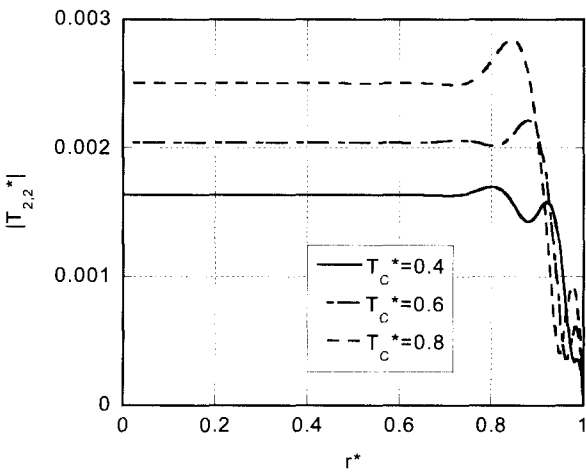


그림 9. 냉동온도가 2차 온도의 비정상성분에 미치는 영향 ( $\beta_0 = 30, \Phi = 0^\circ, x^* = 0.5$ )

Fig. 9. Effect of cold end temperature on unsteady second-order axial velocity ( $\beta_0 = 30, \Phi = 0^\circ, x^* = 0.5$ )

그림 10은 맥동관의 저온부( $x^* = 0$ )를 통과하는 작동유체의 1차 변위길이에 대한 2차 변위길이의 비  $\epsilon_{c2}/\epsilon_{c1}$ 이 2차 질량유속의 비정상성분에 미치는 영향을 보여준다. 1차 변위길이는 일정하게 유지하며 2차 변위길이를 변화시켰다.  $\epsilon_{c2}/\epsilon_{c1} = 0$ 은 맥동관의 저온부를 통과하는 작동유체가 각속도  $\omega$ 인 성분만 갖고 있다는 것을 의미하고,  $\epsilon_{c2}/\epsilon_{c1} = 0.1$ 은 각속도가  $2\omega$ 인 체적유량이 각속도  $\omega$ 인 체적유량의 10%라는 것을 의미한다.

2차 질량유속의 비정상성분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

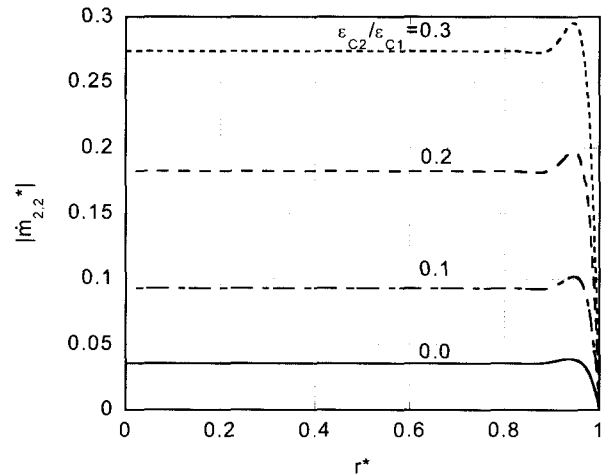


그림 10. 저온부의 2차 속도가 2차 질량유속의 비정상성분에 미치는 영향 ( $\beta_0 = 30, \Phi = 0^\circ, x^* = 0.5$ )

Fig. 10. Effect of second-order velocity at cold end on unsteady second-order mass flux ( $\beta_0 = 30, \Phi = 0^\circ, x^* = 0.5$ )

$$\dot{m}_{2,2}^* = \rho_m^* u_{2,2}^* + \frac{1}{2} \rho_i^* u_i^* \quad (48)$$

$\epsilon_{c2}/\epsilon_{c1} = 0$ 일 경우에 2차 질량유속의 비정상성분의 크기는 약 0.04로 2차 질량유속의 정상성분  $\dot{m}_{2,0}^*$ 와 거의 같은 크기를 갖는 것을 볼 수 있다(Baek 등 [10] 참조).  $\epsilon_{c2}/\epsilon_{c1}$ 가 커질수록  $\dot{m}_{2,2}^*$ 의 진폭이  $\epsilon_{c2}/\epsilon_{c1}$ 에 비례하여 커지는 것을 알 수 있다. 지금까지의 맥동관에 대한 해석모델들은 맥동관 내부의 속도가 각속도가  $\omega$ 인 1차 성분만 갖고 있다고 가정하였으나, Shiraishi 등[13]의 실험결과를 보면 맥동관내동기 내부의 속도는 1차 성분만 아니라 2차 이상의 성분들을 갖고 있다는 것을 알 수 있다.  $\epsilon_{c2}/\epsilon_{c1}$ 가 커질수록  $\dot{m}_{2,2}^*$ 가 증가한다는 것은 맥동관으로 유입되는 작동가스의 속도의 2차 성분이 상당할 경우에는 맥동관 내부의 속도가 1차 성분만 갖고 있다고 가정한 기존의 해석모델들의 예측결과가 실제와 크게 다를 수 있다는 것을 의미한다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 맥동관 내부의 2차 축방향 속도와 온도의 비정상성분(unsteady component)들을 구하는 방법을 제시하였다. 2차 축방향 속도와 온도의 비정상성분들의 지배방정식들과 경계조건들이 선형(linear)이므로 해석적인 해와 수치적인 해를 결합하여 2차 축방향 속도와 온도의 비정상성분들을 각각 구하였다.

무차원 작동속도  $\beta_0$ 와 테이퍼각  $\Phi$ 가 증가할수록 2차 축방향 속도와 온도의 진폭은 증가한다. 냉동온도가 낮아질수록 2차 속도의 비정상성분의 크기는 증가하나, 2차 온도의 비정상성분의 크기는 감소한다. 맥동관 양단을 통과하는 작동가스의 속도가 1차 성분만 갖고 있을 경우에 2차 질량유속의 비정상성분의 크기는 정상성분의 크기와 비슷하다.

### 감사의 글

이 연구는 2000년도 홍익대학교 학술연구조성비의 지원에 의한 결과입니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

- [1] J. Liang, A. Ravex, P. Rolland, "Study on pulse tube refrigeration. Part 1: Thermodynamic nonsymmetry effect," *Cryogenics*, Vol. 36, pp.87-93, 1996
- [2] J. M. Lee, P. Kittel, K. D. Timmerhaus, and R. Radebaugh, "Flow patterns intrinsic to the pulse tube refrigerator," *Proceedings of the 7th International Cryocooler Conference*, pp.125-139, 1993
- [3] J. M. Lee, P. Kittel, K. D. Timmerhaus, and R. Radebaugh, "Steady Secondary Momentum and Enthalpy Streaming in the Pulse Tube Refrigerator," *Cryocoolers 8*, pp. 359-369, 1995
- [4] J. M. Lee, P. Kittel, K. D. Timmerhaus, and R. Radebaugh, "Higher Order Pulse Tube Modeling," *Cryocoolers 9*, pp. 345-353, 1997
- [5] J. R. Olson and G. W. Swift, "Acoustic Streaming in Pulse Tube Refrigerators: Tapered Pulse Tube," *Cryogenics*, Vol. 37, pp. 769-776, 1997
- [6] 백상호, 정승철, 정은수, "맥동관의 엔탈피유동에 대한 2차원 해석," *한국초전도저온공학논문지*, 제 1권, 제1호, pp. 42-47, 1999
- [7] 백상호, 정은수, "테이퍼를 갖는 맥동관의 2차원 해석모델," *대한기계학회논문집 B권*, 제24권, 제5호, pp. 668-676, 2000
- [8] 백상호, 정은수, "맥동관냉동기의 정상상태 질량 흐름에 의한 엔탈피손실," *설비공학논문집*, 제12권, 제7호, pp. 623-631, 2000
- [9] S. H. Baek, E. S. Jeong and S. Jeong, "Two-dimensional model for tapered pulse tubes. Part 1: Theoretical modeling and net enthalpy flow," *Cryogenics*, Vol. 40, pp. 379-385, 2000
- [10] S. H. Baek, E. S. Jeong and S. Jeong, "Two-dimensional model for tapered pulse tubes. Part 2: Mass streaming and streaming-driven enthalpy flow," *Cryogenics*, Vol. 40, pp. 387-392, 2000
- [11] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, 1960
- [12] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1979
- [13] Shraishi, M., Nakamura, N., Seo, K. and Murakami, M., "Visualization Study of Velocity Profiles and Displacements of Working Gas Inside a Pulse Tube Refrigerator," *Cryocoolers 9*, pp. 355-364, 1997

### 저 자 소 개



#### 박희찬(朴喜潾)

1974년 3월 13일 생. 1999년 홍익대 기계공학과 졸업. 현재 동대학원 기계공학과 석사과정.



#### 정은수(鄭恩洙)

1959년 2월 5일 생. 1981년 서울대 기계공학과 졸업. 1983년 한국과학기술원 기계공학과 졸업(공학석사). 1991년 미국 M.I.T. 기계공학과 졸업(공학박사). 현재 홍익대학교 기계공학과 부교수.