韓國經營科學會誌
第26卷 第4號
2001年 12月

도착시점 방법에 의한 이산시간 대기행렬의 분석

김남기* · 채경철*

An Arrival Time Approach to Discrete-Time Queues

Nam-Ki Kim* · Kyung-Chul Chae*

■ Abstract ■

We demonstrate that the arrival time approach of Chae et al. [4], originally proposed for continuous-time queues, is also useful for discrete-time queues. The approach serves as a simple alternative to finding the probability generating functions of the queue lengths for a variety of discrete-time single-server queues with bulk arrivals and bulk services.

Keyword : Discrete-Time Queues, Arrival Time Approach

1. 서 론

M/G/1 형태의 대기행렬시스템에서 안정상태 고객수는 주로 이탈시점을 내재점(embedded point)으로 잡아 이탈시점 내재점 마코프체인(embedded Markov chain)을 구성하여 분석되어 왔다. 이와는 반대로, 도착시점을 고려하여 시스템을 분석하는 방법이 최근에 Chae et al.[4]에 의해 제안되었고 이를 도착시점 방법(Arrival Time Approach - ATA)이라 한다. Chae et al.[4]에서는 주로 한 명씩 도착하고 한 명씩 이탈하는 연속시간 단수서버 대기행렬 시스템에 ATA를 활용하였다. 본 논문에서는 ATA의 방법론을 이산시간 단수서버 대기행렬시스템의 분석에 활용하고자 한다. 또한 ATA의 방법론이 집단으로 도착하고 집단으로 이탈하는 대기행렬시스템에도 널리 활용될 수 있음을 보이고자 한다.

최근, 디지털 통신시스템으로의 다양한 응용가능

논문접수일 : 2001년 8월 22일 논문게재확정일 : 2001년 11월 16일
* 한국과학기술원 산업공학과

성으로 인하여 이산시간 대기행렬모형에 대한 연구가 증대되고 있다. 이는 비트, 셀, 패킷 단위로 운용되는 디지털 시스템을 이산시간 대기행렬모형이 보다 잘 묘사할 수 있기 때문이고, 따라서 연속시간 대기행렬모형을 통한 분석보다 더 정확한 분석을 기대할 수 있기 때문으로 보인다. 이산시간 대기행렬모형에서는 시간축은 슬롯(slot)이라 불리는 기본단위의 등간격으로 나누어진다. 서비스 시간은 이 기본 슬롯의 정수배이며 서비스의 시작과 종료는 슬롯의 경계와 동기화 된다. 고객의 도착은 슬롯의 중앙에서 발생하지만, 실제로는 슬롯의 경계에서만 시스템의 상태가 측정되므로, 슬롯의 경계에서 도착이 이루어지는 것으로 가정한다(Bruneel과 Kim[3, pp.2]). 따라서 슬롯의 중앙에서는 아무런 사건(event)이 일어나지 않고 오직 슬롯의 경계에서만 상태변화가 일어나는 것으로 가정된다. 이때 한 슬롯동안 일어난 도착이 해당 슬롯의 맨 끝(슬롯 경계 직전)에 도착한 것으로 가정하는 모형을 후도착모형(Late Arrival System)이라 하고, 해당 슬롯의 맨 처음(슬롯 경계 직후)에 도착한 것으로 가정하는 모형을 선도착모형(Early Arrival System)이라 한다(Takagi[11, pp.4, pp.8]). 본 논문에서는 통신시스템에 보다 적합한 후도착모형을 가정하고 논의를 전개한다(Bruneel과 Kim[3, pp.2]).

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2절에서는 이산시간 대기행렬시스템에서의 ATA의 방법론을 정립한다. 3절에서는 이를 활용하여 다양한 이산시간 대기행렬모형의 고객수 PGF(Probability Generating Function)들과 그들간의 관계를 유도할 수 있음을 보인다. 4절에서는 본 논문을 요약, 정리한다.

2. 이산시간 대기행렬시스템에서의 ATA

다음과 같은 가정을 만족하는 안정된(stable) 이산시간 후도착 단수서버 대기행렬시스템을 고려하자.

가정 1. 고객집단은 모수가 λ인 베르누이 과정(Bernoulli process)으로 시스템에 도착하고 집단의 크기는 독립적이고 동일한(independent and identical) 일반분포를 따른다.

가정 2. 시스템에 도착한 모든 고객은 반드시 서비스를 받고 시스템을 떠난다.(따라서, 고객손실이나 중도이탈 등은 없다.)

가정 3. 서비스시간은 독립적이고 동일한 일반분포를 따르며 도착과정 및 서비스 순서와 독립이다.

가정 4. 한번 개시된 서비스는 중단없이(nonpreemptive) 끝까지 진행된다.

도착시점, 이탈시점, 임의시점 시스템 내 고객수간의 관계식을 표현하기 위해 다음을 정의하자.

$P(z)$: 임의슬롯(내 임의시점)에서의 시스템 내 고객수 PGF

$P^A(z)$: 임의고객(Test Customer - TC)이 도착시에 보는 시스템 내 고객수 PGF

$P^D(z)$: TC가 이탈 시에 남기는 시스템 내 고객수 PGF

$G(z)$: 집단의 크기(G)의 PGF

$G_-(z) = \{1-G(z)\}/\{E(G)(1-z)\}$: 집단 내에서 TC 앞에 있는 고객수(G_-)의 PGF (Takagi[10, pp.46])

[비고 1] 집단도착(이탈) 시에는 집단 내에 TC 앞(뒤)쪽에 위치한 고객들까지 TC가 보는(남기는) 것으로 간주한다. 즉, 집단도착/집단이탈이 있는 경우라도 순간적으로 한 명씩 도착하고 한 명씩 나가는 것으로 간주한다.

[정리 1]
가정 1을 만족하는 안정된 이산시간 후도착 대기행렬시스템에서는 다음이 성립한다.

$$P^A(z) = P^D(z) = P(z) \cdot G_-(z) \qquad (1)$$

(증명)

집단도착/집단이탈의 경우라도 순간적으로 한 명씩 들어오고 한 명씩 나가는 것으로 간주하면 다음이 성립한다(Wolff[12, pp.387]).

$$P^A(z) = P^D(z) \tag{2}$$

또한, TC가 도착 시에 보는 시스템 내 고객수는 TC가 속한 집단이 도착하면서 보는 고객수와 집단 내에서 TC 앞에 있는 고객수(G_-)로 구분할 수 있다(이 둘은 가정 1에 의해 서로 독립이다). TC가 속한 집단이 보는 시스템 내 고객수는 BASTA(Bernoulli Arrivals See Time Averages(Takagi[11, pp.6])에 의하여 임의슬롯에서의 고객수와 같고, 집단 내에서 TC 앞에 있는 고객수 PGF는 $G_-(z)$이므로

$$P^A(z) = P(z) \cdot G_-(z) \tag{3}$$

을 얻는다. 식 (2)와 식 (3)으로부터 식 (1)을 얻는다. □

[비고 2] 식 (1)의 두 번째 등호의 또 다른 증명은 Takagi[11, pp.22]에 있다. 위 증명은 Takagi[11, pp.22]의 증명보다 훨씬 간결하다. 가정 1에서의 베르누이 과정을 포아송(Poisson) 과정으로 바꾸면 [정리 1]은 안정된 연속시간 대기행렬시스템에서도 성립한다.

가정 1~4를 만족하는 이산시간 대기행렬시스템의 고객수 PGF 관해서 모형에 관계없이 항상 만족하는 불변의 관계식(invariance relation)을 ATA의 방법론으로부터 얻을 수 있다. 먼저 다음을 정의하자.

$\rho(1-\rho)$: 임의슬롯에 서버가 바쁠(유휴할) 확률

$P(z|B)(P(z|I))$: 서버가 바쁘다(유휴하다)는 조건하에서의 임의슬롯에서의 시스템 내 고객수 PGF

$P^{SS}(z)$: 서비스 시작(start of service) 직후의 시스템 내 고객수 PGF

$A(z) = 1-\lambda+\lambda G(z)$: 한 슬롯동안 도착한 고객수 PGF

$S(z)$: 서비스 시간(S)의 PGF

[비고 3] 시간축에서 유휴기간을 모두 제거하고 바쁜기간만 남긴 다음 이를 임의 연속시점에 관찰하는 경우, 관찰시점에 진행중인 서비스가 시작된 이래 관찰된 슬롯의 시작점까지 경과된 슬롯의 수를 S_E라고 하자.(관찰된 슬롯은 S_E에서 제외함.) 그러면 S_E의 PGF는 다음과 같이 주어진다.

$$S_E(z) = (1-S(z))/E(S)(1-z)$$

이는 Green의 정리[8]를 이산시간으로 각색한 것이다.

[정리 2]

가정 1~4를 만족하는 안정된 이산시간 후도착 단수서버 대기행렬시스템에서는 다음이 성립한다.

$$P(z) = (1-\rho)\cdot P(z|I) + \rho\cdot P^{SS}(z)\cdot S_E(A(z)) \tag{4}$$

(증명)

임의슬롯에서의 시스템 내 고객수 PGF를 서버가 유휴하냐 바쁘냐에 따라 조건을 취해 표현하면

$$P(z) = (1-\rho)\cdot P(z|I) + \rho\cdot P(z|B) \tag{5}$$

을 얻는다. 한편, 서버가 바쁜 슬롯에서의 시스템 내 고객수는 진행 중인 서비스가 시작된 직후에 시스템 내 고객수와 서비스가 시작된 이래로 추가로 도착한 고객수로 구분할 수 있다(이 둘은 가정에 의해 서로 독립이다). 따라서

$$P(z|B) = P^{SS}(z)\cdot S_E(A(z)) \tag{6}$$

을 얻는다([비고 3] 참조). 식 (5)과 식 (6)을 결합하면 식 (4)를 얻는다. □

[비고 4] 정리 2는 연속시간 ATA를 이산시간으로 각색한 것이다. 식 (4)에서 ρ와 $P(z|I)$는 모형에 따라 구할 수 있는 항이며, $P^{SS}(z)$는 $P(z)$에

관하여 풀어쓸 수 있다. 그러면 식 (4)는 $P(z)$에 대한 방정식이 되고 이 방정식을 풀면 $P(z)$를 구할 수 있게 된다. 이는 다음절에서 다양한 모형에 대하여 예를 들어 보여질 것이다.

3. 예제 시스템

본 절에서는 다양한 단수서버 이산시간 대기행렬 모형에 대해, 식 (4)의 미지항인 ρ와 $P(z|I)$를 해결하고, $P^{SS}(z)$를 $P(z)$에 관하여 풀어쓸 것이다. 그러면 단순한 방정식을 풂으로써 $P(z)$를 구할 수 있다.

예제 1. 표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형

표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형은 고객집단이 베르누이 과정(Bernoulli process)으로 도착하고, 집단의 크기는 독립적이며 동일한 일반분포를 따르며, 고객의 서비스시간은 독립적이며 동일한 일반분포를 따르는, 서버가 한 명 있는 이산시간 대기행렬 모형이다(비고 : 표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형은 가정 1~4를 만족한다). 표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형에서는 고객이 시스템에 존재하는 한 서버는 계속 서비스를 제공한다. 따라서

$$P(z|I) = z^0 = 1 \tag{7}$$

이다. 한편, TC가 이탈 시에 시스템에 남기는 고객수는 서비스 시작 직후의 고객수(자신 제외)와 자신의 서비스 동안 추가로 도착한 고객수의 합이다.(이 둘은 서로 독립이다). 따라서

$$P^D(z) = P^{SS}(z) \cdot z^{-1} \cdot S(A(z)) \tag{8}$$

을 얻는다. 식 (1)과 식 (8)로부터

$$P^{SS}(z) = z \cdot P(z) \cdot G_{-}(z) / S(A(z)) \tag{9}$$

을 얻는다. 이제 식 (7)과 식 (9)을 식 (4)에 대입하고 $P(z)$에 대해서 풀면

$$P(z) = \{(1-\rho)(1-z)S(A(z))\}/\{S(A(z))-z\} \tag{10}$$

을 얻는다. 식 (10)에서 $P(1)=1$로부터 $\rho=\lambda E(G)E(S)<1$를 얻는다.

예제 2. 휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형

휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형은 표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형과는 달리 서버가 미리 정해진 특정한 규칙에 따라 휴가를 떠나는 모형이다.(비고 : 본 예제에서는 가정 1~4를 만족하는 휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형만을 고려한다.) 휴가의 길이는 슬롯의 정수배이며 그 시작과 끝은 슬롯의 경계와 동기화 된다. 표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형의 경우와 똑같은 논리로 휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형에서도 식 (8)과 식 (9)가 성립한다. 이제 식 (9)을 식 (4)에 대입하고 $P(z)$에 대해서 풀면

$$P(z) = P(z|I) \cdot \{(1-\rho)(1-z)S(A(z))\} / \{S(A(z))-z\} \tag{11}$$

을 얻는다. 식 (11)에서 $P(1)=1$로부터 $\rho=\lambda E(G)E(S)<1$를 얻는다. 식 (11)의 우변에서 $P(z|I)$를 제외한 나머지 부분은 식 (10)과 일치한다. 즉, 휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형의 안정상태 고객수 PGF는 표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형의 안정상태 고객수 PGF와 $P(z|I)$와의 곱이다. 이를 휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형의 분해속성(decomposition property, Takagi[11, pp.90])이라 한다.

한편, $P(z|I)$는 각각의 휴가모형에 따라 구할 수 있다. 예를 들어, 복수휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형에서 독립적이고 동일한 휴가기간(V)의 PGF를 $V(z)$라 하면, $P(z|I)$는 관찰시점에 진행 중인 휴가가 시작된 이래로 경과된 슬롯수(V_E, [비고 3] 참조) 동안 도착한 고객수의 PGF와 같으므로

$$P(z|I) = V_E(A(z)) = (1-V(A(z))/E(V)(1-A(z))$$

를 얻는다(Takagi[11, pp.97]). 다양한 휴가모형에 따라 $P(z|I)$를 구하는 방법론은 장석호와 채경철[2]에 있다.

예제 3. 집단 서비스 Geom^X/G^B/1 모형

집단 서비스 Geom^X/G^B/1 모형은 표준 Geom^X/G/1 모형과는 달리 한 명의 서버가 동시에 B명씩 서비스하는 대기행렬모형이다. 서비스 시작 시 시스템에 B명 미만이 있을 때에는 서버는 시스템에 B명이 찰 때까지 기다리다가 B명이 되는(혹은 넘어서는) 직후 서비스를 개시한다.(비고 : Geom^X/G^B/1 모형은 가정 1~4를 만족한다. 이와 같은 집단서비스 모형에 대한 논의는 Chaudhry와 Templeton [7, pp.191] 및 이호우[1, pp.479] 참조.)

먼저, Geom^X/G^B/1 모형에서 서버가 바쁠 확률을 Little의 법칙을 사용하여 구할 수 있다. 즉, 서비스 받는 공간을 하나의 부분시스템(subsystem)으로 보고 Little의 법칙을 적용하면, 서비스 받는 고객수의 평균(L_S)은

$$L_S = \lambda E(G) \cdot E(S) \qquad (12)$$

이다. 한편, L_S를 서버가 유휴하냐 바쁘냐에 조건을 걸어 표현하면

$$L_S = (1-\rho) \cdot 0 + \rho \cdot B \qquad (13)$$

이다. 식 (12)와 식 (13)으로부터 서버가 바쁠 확률은

$$\rho = \lambda E(G) E(S)/B < 1 \qquad (14)$$

이다.

$P(z|I)$를 표현하기 위해 P_n, $0 \le n \le B-1$, 을 시스템에 n명 있을 확률이라 하자. 그러면

$$P(z|I) = \sum_{n=0}^{B-1} z^n P_n / \sum_{n=0}^{B-1} P_n = \sum_{n=0}^{B-1} z^n P_n /(1-\rho) \qquad (15)$$

를 얻는다. 한편, TC가 이탈 시에 시스템에 남기는 고객수는 TC를 포함하는 집단서비스 시작 직후에 대기장소에 있었던 고객수(서비스 중인 B명 제외)와 이 집단서비스 동안 추가로 도착한 고객수 및 집단이탈 시 집단 내 TC 뒤쪽에 위치한 고객수의 합이다(이들은 서로 독립이다). 따라서

$$P^D(z) = P^{SS}(z) \cdot z^{-B} \cdot S(A(z)) \cdot \{1-z^B\} / \{B(1-z)\} \qquad (16)$$

을 얻는다. 식 (1)과 식 (16)로부터

$$P^{SS}(z) = P(z) \cdot \{B(1-z)\, G_-(z)\} / \{S(A(z))(z^{-B}-1)\} \qquad (17)$$

을 얻는다. 이제 식 (14), 식 (15), 식 (17)을 식 (4)에 대입하고 $P(z)$에 대해서 풀면

$$P(z) = \{S(A(z)) \sum_{n=0}^{B-1} z^n (1-z^B) P_n\} / \{S(A(z)) - z^B\} \qquad (18)$$

을 얻는다.

[비고 5] 식 (18)에 대응되는 연속시간 M^X/G^B/1 결과는 다음과 같다.

$$P(z) = \{S^*(A(z)) \sum_{n=0}^{B-1} z^n (1-z^B) P_n\} / \{S^*(A(z)) - z^B\} \qquad (19)$$

식 (19)에서 $S^*(\theta)$는 서비스시간의 LST(Laplace Stieltjes Transform)이며 $A(z) = \lambda - \lambda G(z)$이다. 식 (18)와 식 (19)는 각각 Geom^X/G^B/1 모형과 M^X/G^B/1 모형의 임의시점 고객수 PGF에 대한(저자들이 아는 한) 최초의 명시적 표현이다.

식 (18)과 식 (19)의 미지수 P_n, $0 \le n \le B-1$, 은 다음과 같이 해결할 수 있다. 먼저, Rouché의 정리에 의하여 $P(z)$의 분모가 단위원의 경계 및 내부($|z| \le 1$)에서 B개의 해(zero)를 가짐을 보일 수 있다.(부록참조. 이 B개의 해는 Mathmatica나 QROOT[6]등의 소프트웨어 패키지를 이용하여 수치적으로 구할 수 있다.) 그런데 $P(z)$는 $|z| \le 1$에서 해석적(analytic)이어야 하므로 분모의 B개의 해는 분자의 해가 되어야 한다. 즉, 이 B개의 해를 분자에 대입하면 분자는 0이 되어야 한다. 이로부터 B개의 연립방정식을 세울 수 있고, 이 연립방정

식을 풀어서 미지수 P_n, $0 \le n \le B-1$, 을 수치적으로 해결할 수 있다(자세한 논의는 Chaudhry와 Templeton[7, pp.184] 참조).

4. 결 론

본 논문에서는 집단으로 도착하고 집단으로 이탈하는 단수서버 이산시간 대기행렬시스템에 대하여 ATA의 방법론이 널리 활용될 수 있음을 보였다. 표준 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형, 휴가형 $\mathrm{Geom}^X/G/1$ 모형, 집단서비스 $\mathrm{Geom}^X/G^B/1$ 모형을 예제로 삼아, 단순히 연립방정식을 풂으로써 임의슬롯에서의 시스템 내 고객수 PGF를 구할 수 있었다. 특히, $\mathrm{Geom}^X/G^B/1$ 모형과 $M^X/G^B/1$ 모형에 대하여, 안정상태 임의슬롯에서의 시스템 내 고객수 PGF에 대한(저자들이 아는 한) 최초의 명시적 표현을 얻을 수 있었다.

ATA의 방법론은 고객의 도착과정이 D-BMAP (Discrete-time Batch Markovian Arrival Process)인 경우에도 자연스럽게 확장되어 적용된다 (Chang et al.[5]와 Kim et al.[9] 참조). ATA의 방법론은 본 논문에서 다룬 대기행렬시스템 뿐만 아니라 다양한 연속/이산시간 대기행렬시스템의 분석에 널리 활용될 수 있을 것이다.

〈부록〉

먼저 이산시간 결과인 식 (18)의 분모에서, $S(A(z)) - z^B = 0$이 $|z| \le 1$에서 B개의 근(root)을 가짐을 보이기 위해 복소평면 위의 원 $|z| = 1+\delta$ 을 고려하자. 여기서 δ 는 충분히 작은 양수이다. 다음을 정의하자.

$$f(z) = z^B$$
$$g(z) = -S(A(z))$$

그리고 $o(\delta)$를 $\lim_{\delta \to 0} o(\delta)/\delta = 0$인 함수라고 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z^B| = |z|^B = (1+\delta)^B \\ &= 1 + B\delta + o(\delta) \qquad \text{(A.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |S(A(z))| \\ &= \Big|\sum_{i=1}^{\infty} s_i\Big(1-\lambda+\lambda\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j\Big)^i\Big| \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} s_i\Big(1-\lambda+\lambda\sum_{j=1}^{\infty} g_j |z|^j\Big)^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i\Big(1-\lambda+\lambda\sum_{j=1}^{\infty} g_j (1+\delta)^j\Big)^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i\Big(1-\lambda+\lambda\sum_{j=1}^{\infty} g_j (1+j\delta+o(\delta))\Big)^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i(1-\lambda+\lambda(1+E(G)\delta+o(\delta)))^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i(1+\lambda E(G)\delta+o(\delta))^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i(1+i\lambda E(G)\delta+o(\delta)) \\ &= 1+\lambda E(G)E(S)\delta+o(\delta) \\ &< 1+B\delta+o(\delta) \qquad \text{(A.2)} \end{aligned}$$

식 (A.2)에서 $s_i = P(S=i), g_i = P(G=i), i = 1,2,\cdots,$이다. 식 (A.1)과 식 (A.2)로부터 복소평면상의 폐영역(closed contour) $|z| \le 1+\delta$ 에서 $|g(z)| < |f(z)|$이고, 두 함수가 이 폐영역에서 해석적이므로 Rouché의 정리(이호우[1, pp.314] 참조)에 의하여 $f(z)$와 $f(z)+g(z)$는 $|z| \le 1$에서 같은 개수의 해를 갖는다. 따라서, $f(z) = z^B$이 $|z| \le 1$ 상에서 B개의 해를 가짐으로 $S(A(z)) - z^B$도 $|z| \le 1$에서 B개의 해를 갖는다.

같은 방식으로, 연속시간 결과인 식 (19)에서 $S^*(A(z)) - z^B = 0$이 $|z| \le 1$에서 B개의 근을 가짐을 보일 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 이호우, 「대기행렬이론」, 개정판, 시그마프레스, 1998.

[2] 장석호, 채경철, "휴가형 Geo/G/1 대기행렬의 분해속성에 대한 새로운 표현", 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회(2001),

pp.148-151.

[3] Bruneel, H. and B.G. Kim, *Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[4] Chae, K.C., H.W. Lee and C.W. Ahn, "An Arrival Time Approach to M/G/1-type Queues with Generalized Vacations," *Queueing Systems*, Vol.38, No.1(2001), pp.91-100.

[5] Chang, S.H., N.K. Kim and K.C. Chae, "A Unified Queue Length Formula for the D-BMAP/G/1 Queue with Generalized Vacations," Working Paper(2001), Department of Industrial Engineering, KAIST.

[6] Chaudhry, M.L. *QROOT software package*, A&A Publications, 395 Carrie Crescent, Kingston, Ontario, 1991.

[7] Chaudhry, M.L. and J.G.C. Templeton, *A First Course in Bulk Queues*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[8] Green, L., "A Limit Theorem on Subintervals of Interrenewal Times," Operations Research, Vol.30, No.1(1982), pp.210-216.

[9] Kim, N.K., S.H. Chang and K.C. Chae, "On the Relationships Among Queue Lengths at Arrival, Departure, and Random Epochs in the Discrete-Time Queue with D-BMAP Arrivals," To appear in Operations Research Letters.

[10] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol 1 : Vacation and Priority Systems, Part 1*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[11] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol 3 : Discrete-Time Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[12] Wolff, R.W., *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.