韓國經營科學會誌
第26卷 第4號
2001年 12月

확률모형에 등장하는 최대와 최소의 특성에 관한 소고

채경철* · 김진동* · 양원석**

On the Characteristics of Maximum and Minimum of Random Variables in Stochastic Models

Kyung C. Chae* · Jin D. Kim* · Won S. Yang**

■ Abstract ■

Maximum and minimum of random variables are frequently encountered in the stochastic modelling for various OR problems. We summarize and extend characteristics of maximum and minimum, emphasizing the case in which random variables are independent and all of them except one are distributed exponential. As an application, we derive a transform-free expression for the M/G/1 queue length distribution.

Keyword : Series System Reliability, M/G/1 Queue, Burke's Theorem

1. 서 론

확률변수들의 최대와 최소는 대기행렬, 신뢰성공학, (확률적) 네트워크 등에 다양한 형태로 등장한다. 예를 들어, PERT 네트워크에서 프로젝트 완료시간은 모든 경로들의 최대이며, 신뢰성공학에서 직렬시스템의 수명은 부품수명들의 최소이다. 또한, 대기행렬 모형에서와 같이, 최대 또는 최소를 구하는 것이 궁극적인 목표는 아니더라도, 전체 시스템을 분석하는 과정에서 부분적인 요소로 최대 또는 최소가 등장하기도 한다(3절 참조).

본 연구에서는 기본적으로 두 개의 확률변수를 다루고, 필요한 경우에만 세 개 이상의 확률변수를 거론한다. 특히, 두 개의 확률변수가 독립이고 둘 중 하나가 지수분포를 따르는 경우를 중점적으로 다루는데, 최대와 최소의 특성에 대해서 알려진 결

논문접수일 : 2001년 8월 3일　　논문게재확정일 : 2001년 11월 16일
* 한국과학기술원 산업공학과
** LG 텔레콤 기술전략실

과를 요약하고 새로운(?) 결과를 추가한다.

사실, 알려진 결과와 새로운 결과를 명확하게 구별하기는 쉽지 않다. 이는 모든 결과가 어려운 계산을 요하는 것이 아니므로 누구든 필요했다면 쉽게 얻을 수 있었을 결과이기 때문이다. 또한, 어떤 결과를 얻기 전에는 그러한 결과가 성립할 것이라고 예견하기 어렵다가도 막상 결과를 얻고나면 납득이 가거나 심지어 당연하게 여겨지기도 하기 때문이다.

본 연구의 목적은 일차적으로 새로운(?) 결과를 얻는 것이다. 새로운 결과로 인해서 계산과정이 다소 간단해지기도 한다. 그러나, 궁극적인 목적은 새로운 결과의 도움으로 복잡한 시스템을 더욱 잘 이해함으로써, 복잡한 시스템의 분석이 더욱 쉬워지도록 하는 것이다. 그렇다면, 결국 어떤 결과가 새로운 것인지 아닌지를 구별하는 것은 별로 중요하지 않고, 다만 결과를 제대로 활용할 줄 아는 것이 중요하며, 이를 위해서는 결과자체를 잘 이해해야 될 것이다.

이러한 결과들은 2절에서 소개한다. 그리고, 일부 결과의 활용사례로서, 3절에서는 M/G/1 대기행렬의 고객수분포를 명시적으로 표현한다. 3절의 결과는 M/G/1 대기행렬에 대한 이해의 폭을 넓혀주는데, 3절에서 사용되는 방법은 다른 대기행렬에도 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

2. 두 개 확률변수의 최대와 최소

확률모형에 등장하는 확률변수들은 대부분 비음(non-negative)이다. 이에 따라, 본 연구에서는 편의상 비음 확률변수만 다루고, 또한 연속 확률변수만 다룬다. 사용할 기호는 모든 확률변수에 대해서 다음과 같이 정의한다.

$$F_X(x) = \Pr(X \le x), \ \overline{F_X}(x) = \Pr(X > x),$$
$$f_X(x) = dF_X(x)/dx, \quad x \ge 0,$$
$$E(X) = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty \overline{F_X}(x)\,dx,$$
$$X^*(\theta) = E(e^{-\theta X}),$$
$$X_E^*(\theta) = \{1 - X^*(\theta)\}/\theta E(X),$$
$$f_{X_E}(x) = \overline{F_X}(x)/E(X).$$

[비고 1] $F_{X_E}(x) = \int_0^x f_{X_E}(z)\,dz$를 $F_X(x)$의 평형(equilibrium)분포라 부른다[6].

2.1 두 개 확률변수가 종속인 경우

비음 연속 확률변수인 X와 Y가 종속인 경우, 이들의 결합(joint) 밀도함수를 $f(x, y)$라 하면, 최대 A와 최소 B의 밀도함수는 다음과 같다.(비고 : $A = \max\{X, Y\}$, $B = \min\{X, Y\}$.)

$$f_A(a) = \int_0^a f(a, y)\,dy + \int_0^a f(x, a)\,dx \qquad (1)$$

$$f_B(b) = \int_b^\infty f(b, y)\,dy + \int_b^\infty f(x, b)\,dx \qquad (2)$$

식 (1)과 식 (2)에 '$a = b = z$'를 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

[결과 1] $$f_A(z) + f_B(z) = \int_0^\infty f(z, y)\,dy + \int_0^\infty f(x, z)\,dx = f_X(z) + f_Y(z) \qquad (3)$$

[비고 2] A와 B가 X와 Y의 최대와 최소이므로, '$A+B = X+Y$'가 성립한다. 그러나, 네 개의 확률변수 A, B, X, Y 간의 관계가 '$A+B = X+Y$'라는 이유만으로 식 (3)이 성립하는 것은 아니다. '$A+B = X+Y$'로부터 직접 얻을 수 있는 것은 고작

$$E(A) + E(B) = E(X) + E(Y) \qquad (4)$$

정도이다. 식 (3)에 대한 해석은 간단하다. 양변에 dz를 곱하면 좌변은 최대 또는 최소가 $(z, z+dz)$의 값을 가질 확률이고 우변은 X 또는 Y가 $(z, z+dz)$의 값을 가질 확률이다.

식 (3)의 양변에 라플라스 변환을 취하면

$$A^*(\theta)+B^*(\theta)=X^*(\theta)+Y^*(\theta) \tag{5}$$

를 얻고, 또한 식 (5)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} E(A)A_E^*(\theta)+E(B)B_E^*(\theta) &= \{1-A^*(\theta)\}/\theta+\{1-B^*(\theta)\}/\theta \\ &= \{1-X^*(\theta)\}/\theta+\{1-Y^*(\theta)\}/\theta \\ &= E(X)X_E^*(\theta)+E(Y)Y_E^*(\theta) \end{aligned} \tag{6}$$

식 (5)의 일차적인 용도는 다음과 같다.(비고 : 이차적인 용도는 식 (6)과 같은 또 다른 결과를 얻거나 또는 시스템을 이해하고 분석하는 데에 도움을 얻는 것이다.) $X^*(\theta)$와 $Y^*(\theta)$가 알려져 있을 때, $A^*(\theta)$와 $B^*(\theta)$ 중에서 쉬운 것 하나만 구하면 다른 것은 바로 구해진다. 이러한 용도는 식 (3)과 식 (6)에도 적용된다. 그러나, 식 (6)의 경우에는 기대치가 추가로 필요한데, 지면관계상 $E(B)$ 하나만 구하면 다음과 같다. (비고 : $E(X)$와 $E(Y)$가 알려져 있을 때, $E(B)$만 구하면 식 (4)에 의해서 $E(A)$도 구해진다.)

$$E(B)=\int_0^\infty x\int_x^\infty f(x,y)\,dydx+\int_0^\infty y\int_y^\infty f(x,y)\,dxdy \tag{7}$$

$B^*(\theta)$는 정의상 $E(e^{-\theta B})$이므로 식 (7)과 같은 방법으로

$$B^*(\theta)=\int_0^\infty e^{-\theta x}\int_x^\infty f(x,y)\,dydx + \int_0^\infty e^{-\theta y}\int_y^\infty f(x,y)\,dxdy \tag{8}$$

를 얻는다. 또한, $B^*(\theta)$를 조건부 기대치로 표현하면

$$E(e^{-\theta B})=\Pr(B=X)E(e^{-\theta B}|B=X) + \Pr(B=Y)E(e^{-\theta B}|B=Y) \tag{9}$$

가 되는데, 식 (8)과 식 (9)의 우변에서 첫째 항끼리는 같고 둘째 항끼리도 같다.

마지막으로, 식 (9)에서 $\Pr(B=Y)$는 다음과 같다. (비고 : $\Pr(B=X)=1-\Pr(B=Y)$.)

$$\begin{aligned} \Pr(B=Y)=\Pr(X>Y) &= \int_0^\infty\int_0^x f(x,y)\,dydx \\ &= \int_0^\infty\int_y^\infty f(x,y)\,dxdy=\Pr(A=X) \end{aligned} \tag{10}$$

2.2 X와 Y가 독립이고 X가 지수변수인 경우

예를 들어, 대기행렬 모형에서는 주로 도착간시간(interarrival time)과 서비스시간을 독립이라 가정한다. 또한, M/G/… 모형에서는 도착간시간이 지수분포를 따르고, GI/M/… 에서는 서비스시간이 지수분포를 따른다. 물론, M/M/… 에서는 두 가지 모두 지수분포를 따른다.

X가 평균이 λ^{-1}인 지수분포를 따르며 Y와 독립인 경우 식 (10)과 식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Pr(B=Y) &= \int_0^\infty \overline{F_X}(y)f_Y(y)\,dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda y}f_Y(y)\,dy=Y^*(\lambda) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} B^*(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta x}\overline{F_Y}(x)f_X(x)\,dx + \int_0^\infty e^{-\theta y}\overline{F_X}(y)f_Y(y)\,dy \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-(\theta+\lambda)x}\overline{F_Y}(x)\,dx + \int_0^\infty e^{-(\theta+\lambda)y}f_Y(y)\,dy \end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)의 우변에서 둘째 항은 $Y^*(\theta+\lambda)$로 표현할 수 있는데, 이는 식 (11)의 우변을 $Y^*(\lambda)$로 표현한 것과 같은 이유이다. 그리고, 우변의 첫째 항을 부분적분하면(비고 : $f_Y(y)=-d\overline{F}(y)/dy$)

$$\{1-Y^*(\theta+\lambda)\}\lambda/(\theta+\lambda) \tag{13}$$

가 되는데, 식 (13)에서 '$\lambda/(\theta+\lambda)$'는 바로 $X^*(\theta)$이다. 따라서, $B^*(\theta)$를 $X^*(\theta)$와 $Y^*(\theta)$로 표현하

면 다음과 같다.

$$B^*(\theta) = \{1 - Y^*(\theta+\lambda)\}X^*(\theta) + Y^*(\theta+\lambda) \quad (14)$$

$B^*(\theta)$를 이미 구했으므로, 이를 미분해서 $E(B)$를 구하면

$$E(B) = \{1 - Y^*(\lambda)\}/\lambda \quad (15)$$

를 얻고, 다시 식 (14)와 식 (15)로부터 $B_E^*(\theta)$를 구하면 다음과 같다.

$$B_E^*(\theta) = \frac{1 - Y^*(\theta+\lambda)}{1 - Y^*(\lambda)} X^*(\theta) \quad (16)$$

그런데, 식 (16)은 식 (13)을 '$1 - Y^*(\lambda)$'로 나눈 것이고, 식 (11)에 의해서 '$\Pr(B=X) = 1 - Y^*(\lambda)$'이므로, 식 (9)의 형태를 참조하여 다음의 결과를 얻는다.

[결과 2] $E(e^{-\theta B}|B=X) = B_E^*(\theta) \quad (17)$

[비고 3] 식 (17)의 일차적인 용도는 다음과 같다. 식 (17)을 식 (9)에 대입하면 (9)는 $B^*(\theta)$에 대한 일차방정식이 되므로 이를 풀어서 $B^*(\theta)$를 쉽게 구할 수 있다. 즉, 식 (13)을 얻기 위한 부분적분이 불필요해진다. 그러나, 더욱 중요한 이차적인 용도는 앞에서 언급했듯이 복잡한 시스템을 이해하고 분석하는 데에 도움을 얻을 것이다.

식 (17)을 활용하기 위해서는 먼저 식 (17)을 잘 이해해야 된다. 식 (17)은 한마디로 PASTA[5] 속성에 의한 것이다.(물론, 식 (17)을 얻기 전에는 PASTA 속성이 식 (17)과 같은 형태로까지 적용되리라고는 예견하지 못했다.) 예를 들어, B를 직렬시스템의 수명이라 하고 X와 Y를 부품수명이라 하자. 그러면, 식 (17)의 좌변은 수명이 X인 부품이 먼저 고장나는 경우의 시스템수명이 된다. 반면에, 식 (17)의 우변은 재생이론(renewal theory)으로 해석할 수 있다. 시스템이 고장날 때마다 동일한 새 시스템으로 교체하고(비고 : total repair), 교체시간은 무시한다고 가정하자. 그러면, B_E는 임의 관찰시점에서의 경과된 수명(elapsed life 또는 age)을 의미하게 된다. 그리고, PASTA 속성에 의해서, B_E는 또한 포아송 과정의 사건(event)이 발생하는 시점에서의 경과된 수명과 같다. 그런데 수명이 X인 부품의 고장이 발생하는 과정이 바로 (발생률이 λ인) 포아송 과정인 것이다. 조금 더 자세히 설명한다. 시스템이 고장날 때마다 새 시스템으로 교체한다는 가정은 부품이 하나 고장날 때마다 고장나지 않은 것까지 같이 새 부품으로 교체한다는 가정이다. 그러나, 수명이 Y인 부품이 고장났을 때에는 수명이 X인 부품은 교체할 필요가 없는데, 이는 지수분포의 무기억 속성에 의해서 고장나지 않은 것은 항상 새것과 같기 때문이다. 그리고, 수명이 X인 부품을 고장날 때에만 교체한다는 것은 고장날 때마다 새로운 X를 독립적으로 재생시킨다는 뜻이다. 따라서, 수명이 X인 부품의 고장발생 과정은 재생간(inter-renewal) 시간이 iid (independent and identically distributed) 지수변수인 재생과정, 즉 포아송 과정이 된다.

2.3 독립인 X와 Y가 모두 지수변수인 경우

X와 Y가 독립이고 각각 평균이 λ^{-1}과 μ^{-1}인 지수분포를 따르는 경우에는 '$Y^*(\theta) = \mu/(\theta+\mu)$'로부터 '$Y^*(\lambda) = \mu/(\lambda+\mu)$'와 '$Y^*(\theta+\lambda) = \mu/(\theta+\lambda+\mu)$'를 얻은 다음 식 (14)와 식 (16)에 ('$X^*(\theta) = \lambda/(\theta+\lambda)$'와 함께) 대입하면

$$B^*(\theta) = \frac{\lambda}{\theta+\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\theta+\lambda+\mu} = \frac{\lambda+\mu}{\theta+\lambda+\mu} \quad (18)$$

$$B_E^*(\theta) = \frac{\lambda+\mu}{\theta+\lambda+\mu} = B^*(\theta) \quad (19)$$

를 얻는데, 식 (18)은 평균이 $(\lambda+\mu)^{-1}$인 지수분포를 의미하고 식 (19)는 지수분포의 무기억 속성

을 의미한다. 또한 식 (18)을 식 (9)와 비교하면 다음의 관계를 얻는다.

$$E(e^{-\theta B}|B=X)=E(e^{-\theta B}|B=Y)=B^*(\theta) \quad (20)$$

식 (20)은 잘 알려진 결과인데, 식 (17)에서 그 근거를 찾을 수 있다. 즉, $E(e^{-\theta B}|B=X)$와 $E(e^{-\theta B}|B=Y)$는 일차적으로는 식 (17)에 의해서 $B_E^*(\theta)$인데, 이차적으로 식 (19)에 의해서 식 (20)의 형태가 된 것이다. 식 (17)과 식 (20)의 활용사례는 Yang과 Chae[7]에서 찾을 수 있다. 이들은 GI/M/1 모형에 두 가지 형태의 작업취소 기능을 추가한 결과, 고객의 체류시간이 확률변수 세 개의 최소임을 보였다. 구체적으로, $B=\min\{X,Y,Z\}$에서 X, Y, Z는 서로 독립이고 X와 Y는 지수변수인데, 식 (17)과 식 (20)으로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$E(e^{-\theta B}|B=X)=E(e^{-\theta B}|B=Y)=B_E^*(\theta)$$

3. 사례 : M/G/1의 고객수분포

M/G/1 대기행렬 모형의 고객수분포는 여러 가지 형태로 표현할 수 있다. 첫째, 내재점마코프체인([3], pp.388)이나 부가변수법([3], pp.460)을 사용하면 고객수분포를 확률생성함수(PGF) 형태로 얻는다. 둘째, 재생성과정([3], pp.476)과 준마코프과정([3], pp.486)을 이용하면 각각 이호우[3]의 식 (6.16.11b)와 식 (6.18.8)의 형태로 얻는데, 이들은 PGF 형태가 아니다. 역시 PGF 형태가 아닌 것으로, 미시적 Little's 공식[2] 또는 수정부가변수법[1]을 사용하여 얻은 표현방법도 있다.

이제, M/G/1 고객수분포를 또 다른 형태로 표현하는데 이는 식 (15)에 대한 활용사례이다. M/G/1의 가정은 다음과 같다. 고객의 도착간시간 X들은 iid 지수변수이고 평균은 λ^{-1}이다. 서버(server)는 한명이고 도착한 고객을 한 명씩 서비스하는데, 서비스시간 Y들은 iid 확률변수이고 X들과 독립이다.

시스템에 고객이 $n+1$명 있다가 한명이 서비스를 마쳐서 n명이 되었다고 하자(단, $n\geq 1$). 그러면, 고객수가 변화(증가 또는 감소)할 때까지 걸리는 시간은(X의 무기억속성에 의해서) X와 Y의 최소가 되므로, 기대치는 식 (15)에 의해서 다음과 같다.

$$E(n \text{ 체류시간}|\, n+1\rightarrow n)=\{1-Y^*(\lambda)\}/\lambda \quad (21)$$

이번에는 시스템에 고객이 $n-1$명 있다가 한 명이 새로 도착해서 n명이 되었다고 하자(단, $n\geq 1$). '$n=1$'인 경우에는 서비스를 새로 시작하므로, 고객수가 변화할 때까지 걸리는 평균시간이 식 (15)와 같다. 그러나, '$n\geq 2$'인 경우에는 상황이 달라진다. 편의상, $n-1$명 있다가 n명이 되었을 때 진행중인 서비스의 잔여(remaining 또는 residual) 시간을 Y_{n-1}이라 하자.(비고 : Y_0는 Y와 동일함.) 그러면, 고객수가 변화할 때까지 걸리는 평균시간은 식 (15)에 의해서 다음과 같다.

$$E(n \text{ 체류시간}|\, n-1\rightarrow n)=\{1-Y_{n-1}^*(\lambda)\}/\lambda \quad (22)$$

[비고 4] PASTA 속성에 의해서, Y_{n-1}은 평형상태(steady-state)에서 고객수가 $n-1$명일 때에 진행중인 서비스의 잔여시간과 같다.

평형상태에서의 고객수분포를 세 가지로 정의한다. 임의시점에 n명 있을 확률을 p_n, 도착하는 고객이 n명을 볼 확률을 π_n^A, 이탈하는 고객이 n명을 남길 확률을 π_n^D라 하자.(비고 : 첨자 A는 arrival을, D는 departure를 의미함.)

[비고 5] M/G/1의 경우, PASTA 속성에 의해서 '$\pi_n^A=p_n$'이고, Burke의 정리([3], pp.276)에 의해서 '$\pi_n^D=\pi_n^A$'이다. 따라서, M/G/ 1의 경우에는 다음이 성립한다.

$$p_n=\pi_n^A=\pi_n^D \quad (23)$$

고객수 과정의 재생주기(regeneration cycle)를 C라 하고, C동안에 고객수가 n명인 시간을 T_n이라 하면, 재생보상(renewal reward)정리에 의해서

$$p_n = E(T_n)/E(C) \tag{24}$$

이다. 또한, C동안에 도착하고 이탈하는 고객의 수를 N이라 하면, 식 (24)의 $E(C)$는

$$E(C) = E(N)/\lambda \tag{25}$$

가 된다(비고 : λ^{-1}은 평균 도착간시간). 식 (24)의 $E(T_n)$ 역시 다음과 같이 $E(N)$으로 표현할 수 있다. C동안 도착하는 N명 중에서 도착시 $n-1$명을 보는 고객수의 기대치는 $E(N)\pi^A_{n-1}$이고, C동안 이탈하는 N명 중에서 이탈시 n명을 남기는 고객수의 기대치는 $E(N)\pi^D_n$이므로, 이들을 식 (21), 식 (22)와 묶어서

$$\begin{aligned} E(T_n) &= E(N)\pi^A_{n-1}\frac{1-Y^*_{n-1}(\lambda)}{\lambda} \\ &\quad + E(N)\pi^D_n\frac{1-Y^*(\lambda)}{\lambda} \end{aligned} \tag{26}$$

을 얻는다. 따라서, 식 (25)와 식 (26)을 식 (24)에 대입하면

$$p_n = \pi^A_{n-1}\{1-Y^*_{n-1}(\lambda)\} + \pi^D_n\{1-Y^*(\lambda)\} \tag{27}$$

을 얻고, 이에 식 (23)을 대입하여 최종결과로

$$p_n = \frac{1-Y^*_{n-1}(\lambda)}{Y^*(\lambda)}\,p_{n-1}, \quad n \ge 1 \tag{28}$$

을 얻는다.(비고 : p_0는 '$1-\lambda E(Y)$'라고 알려져 있음.)

식 (28)은 형태가 간단해서 시스템을 이해하는 데에 도움이 되는 반면에, 일반적으로는 $Y^*_{n-1}(\lambda)$를 구하기 어렵다는 단점이 있다. 특수한 경우인 M/M/1에서는, 지수변수인 Y의 평균을 μ^{-1}이라 하면, $Y^*_{n-1}(\lambda) = Y^*(\lambda) = \mu/(\lambda+\mu)$가 된다.

마지막으로, 식 (28)의 부산물을 한 가지 소개한다. 식 (28)의 양변에 $Y^*(\lambda)$를 곱하고, 식 (23)을 대입하면

$$\pi^A_{n-1}\{1-Y^*_{n-1}(\lambda)\} = \pi^D_n Y^*(\lambda) \tag{29}$$

를 얻는데, 해석은 다음과 같다. 고객수 과정의 표본경로(sample path)에서 좌변은 '$n-1 \to n \to n+1$'의 이단계 전이(two-step transition)의 발생률이고 우변은 '$n+1 \to n \to n-1$'의 이단계 전이의 발생률이다.(비고 : '$1-Y^*_{n-1}(\lambda)$'는 잔여서비스가 끝나기 전에 새 고객이 도착할 확률이고, '$Y^*(\lambda)$'는 새 고객이 도착하기전에 서비스가 끝날 확률임.)

비고 6. Burke's 정리 '$\pi^A_n = \pi^D_n$'에서 좌변은 '$n \to n+1$'의 일단계 전이의 발생률이고 우변은 '$n+1 \to n$'의 일단계 전이의 발생률이다. 따라서, 식 (29)는 Burke's 정리를 일단계에서 이단계로 확장한 것이라 할 수 있는데, Kim et al.[4]은 이단계 Burke's 정리가 광범위한 대기행렬 모형에서 성립하고 또한 활용됨을 보였다.

참 고 문 헌

[1] 김남기, 채경철, "수정 부가변수법과 GI/G/1/K 대기행렬", 「한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회논문집」, (2001), pp.140-143.

[2] 윤봉규, 김남기, 채경철, "Little's 법칙의 미시적 활용 사례", 「대한산업공학회지」, 제25권, 제1호(1999), pp.125-129.

[3] 이호우, 「대기행렬이론」, 개정판, 시그마프레스, 1998.

[4] Kim, N.K., K.C. Chae and R.W. Wolff, "Extended Rate-Balance Equations and a Versatile Expression for the Queue-Length Distribution," Technical Report No.01-04, De-

partment of IE, KAIST, 2001.

[5] Wolff, R.W., "Poisson Arrivals See Time Averages," *Operations Research*, Vol.30, No. 2(1982), pp.223-231.

[6] Wolff, R.W., *Stochastic Modelling and the Theory of Queues,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[7] Yang, W.S. and K.C. Chae, "A Note on the GI/M/1 Queue with Poisson Negative Arrivals," Journal of Applied Probability, (to appear in) Vol.38, No.4, 2001.