

## 자유 곡면체의 엔벨롭 생성

송수창\*, 김재정\*\*

### Envelope Generation for Freeform Objects

Song, S. C.\* and Kim, J. J.\*\*

#### ABSTRACT

Swept volume is the sweeping region of moving objects. It is used in various applications such as interference detection in assembly design, visualization of manipulator motions in robotics, simulation of the volume removal by a cutter in NC machining. The shape of swept volume is defined by the envelope, which is determined by the boundary of moving objects and its direction of motion. In order to implement the generation of swept volume, researchers have taken much effort to develop the techniques how to generate the envelope. However, their results are confined to envelope generated only in simple shape objects, such as polyhedra or quadric surfaces. This study provided the envelope generation algorithm of NURBS objects. Characteristic points were obtained by applying the geometric conditions of envelope to NURBS equations, and then characteristic curves were created by means of interpolating those points. Silhouette edges were determined in the following procedures. First, two adjacent surfaces which have the same edge were found from B-Rep data. Then, by taking the scalar product of velocity vector of a point on that edge with each normal vector on two surfaces, silhouette edges were discriminated. Finally, envelope was generated along moving direction in the form of ruled surfaces by using both the partial information between initial and final position of objects affecting envelope along with characteristic curves and silhouette edge. Since this developed algorithm can be applied not only to NURBS objects but also to their Boolean objects, it can be used effectively in various applications.

**Key words** : Swept volume, Envelope, NURBS

#### 1. 서 론

컴퓨터 하드웨어와 Computational Geometry 기술의 발달로 CAD 시스템은 많은 발전을 거듭해왔다. 최근의 CAD 시스템은 예전의 2D 도면 작업 도구에서 벗어나 3D 형상 모델링 시스템으로서의 기능과 NC 공구 경로 생성 및 유한 요소 해석 등의 여러 가지 설계 및 해석 기능을 제공하고 있다. 하지만 여러 분야에서 요구되는 스융 볼륨(swept volume)의 생성 기능은 아직 CAD 분야에서 미약한 수준에 그치고 있다.

물체가 운동 시 스위핑(sweeping) 되는 영역을 스융

볼륨이라 한다. 조립체 설계 분야에서 부품의 조립 및 해체 시 간섭 검사와, 로봇 공학 분야에서 로봇 운동 계획 시 manipulator의 운동 영역 시각화, NC 가공 분야에서 공구 운동에 의한 피삭재의 가공 영역 시뮬레이션 등에 스융 볼륨은 다양하게 이용된다.

물체의 경계 중 특징 곡선(characteristic curve)과 실루엣 모서리(silhouette edge)를 운동 방향에 따라 스위핑 하여 생성한 곡면들을 엔벨롭이라 하며, 스융 볼륨의 모양은 엔벨롭에 의해 정의된다. 그러므로 스융 볼륨의 계산을 위해서는 엔벨롭 계산이 선행되어야 한다. 엔벨롭을 계산하기 위해서는 엔벨롭에 기여하는 요소를 먼저 탐색해야 하는데 엔벨롭에 기여하는 요소는 물체의 곡면으로부터 생성되는 특징 곡선(characteristic curve)과 물체의 모서리로부터 생성되는 실루엣 모서리(silhouette edge)로 나뉘어 진다(꼭지점은 모서리에

\*정회원, CIMVI Tech  
\*\*중신회원, 한양대학교 기계공학부  
- 논문투고일: 2000. 11. 8  
- 심사완료일: 2001. 3. 8

포함). 특정곡선과 실루엣 모서리의 계산은 물체의 형상이 복잡해지면 그 계산이 어려워지고, 임의의 운동 경로를 따라 운동하는 물체에 대해서는 시간에 따라 동적(dynamic)으로 변화한다.

기존의 엔벨롭 생성에 관한 연구는 형상이 비교적 단순한 다면체<sup>[1]</sup>와 2차 곡면체<sup>[5]</sup>에 대해 이루어 졌다. 따라서 형상이 복잡한 물체의 엔벨롭 생성에는 적용할 수 없다. 점점 더 디자인의 중요성이 부각되는 현대 사회에서 부품의 형상이 다양해지고 복잡해지는 것은 필연적이라 하겠다. 이에 따라 복잡한 곡면으로 이루어진 물체의 엔벨롭 계산이 요구된다. 본 연구에서는 복잡한 곡면을 표현할 수 있는 NURBS곡면체의 엔벨롭 생성 알고리즘의 개발을 목적으로 한다.

논문의 구성은 2장에서 기존의 엔벨롭 생성에 관한 연구 및 한계점에 대하여 간략히 설명하고 3장에서는 스융 볼륨과 엔벨롭의 기본 개념과 수학적 표현을 간단히 소개한다. 4장에서는 본 논문에서 다루고있는 NURBS 곡면의 일반적인 표현법과 특징에 대해서 설명하고, NURBS곡면체에 대하여 엔벨롭을 생성하는 과정에 대해서 자세히 설명한다. 5장은 시스템 개발 환경과 알고리즘 적용 사례에 대해서 각각 설명하며 6장에서는 본 논문의 결론과 한계점 및 향후 연구과제를 서술한다.

## 2. 관련 연구

엔벨롭 계산에 관한 연구는 운동하는 물체의 간섭 검사, NC 공구 경로 계산, 형상 모델링 분야에서 많은 연구가 진행되어 왔다<sup>[7,8]</sup>. Z. K. Ling과 T. R. Chase<sup>[2]</sup>는 2D물체의 평면운동 시 물체가 쓸고 지나가는 swept area의 생성에 관한 연구를 발표하였으나 운동하는 물체의 형상과 경로가 2D에 제약되어 있으므로 3D에는 적용하기 어렵다. J. D. Weld와 M. C. Leu<sup>[3]</sup>는 3D 물체의 Swept Volume 생성에 관한 연구를 발표하였으나 다면체의 스융 볼륨에 관한 연구로 자유 곡면체에는 적용할 수 없다. Kim<sup>[4]</sup>은 스크류 운동을 하는 다면체의 엔벨롭 생성에 관한 연구를 발표하여 역행렬을 구하지 않고 스크류 매개 변수를 기하학적으로 계산하였으나 역시 다면체의 경우로 제한을 두었다. 이외에도 R. R. Matin과 P. C. Stephenson<sup>[4]</sup>은 엔벨롭 이론을 이용하여 엔벨롭을 계산하였으나 복잡한 물체의 경우에는 물체의 운동 방정식과 그 미분 방정식의 연립해를 해석적으로 구하기 어려우므로 그 해를 구할 수 있는 형상이 단순한 경우에만 적용되는 단점이 있다. 또한 Z. J. Hu와 Z. K. Ling<sup>[5]</sup>은 자유로운 운동 경로

를 ISA(Instantaneous Screw Axis)를 이용하여 스크류 운동으로 근사화 한 후 보다 자유로운 운동 경로에 대하여 엔벨롭 계산을 하였으나 운동하는 물체를 2차 곡면체로 제한하였기 때문에 자유 곡면체의 엔벨롭 계산에는 이용할 수 없다

## 3. 스융 볼륨과 엔벨롭

### 3.1 스융 볼륨

3차원 공간에서 물체가 운동 시 스위핑(sweeping) 되는 영역을 스융 볼륨(swept volume)이라 한다. 물체  $G$ 가 초기 위치에서 최종 위치 까지  $I=[0, 1]$ 로 정규화한 시간  $t$ 에 따라 위치 함수  $L(t)$ 로 운동하면 시간  $t$ 에서의 물체의 지오메트리는  $G_t=L(t)G$ 라 할 수 있다. 따라서 운동 하는 물체가 생성하는 스융 볼륨  $SV$ 는 다음과 같이 시간에 따른 각 위치에서 물체의 합집합으로 표현 된다.

$$SV(G) = \bigcup_{t \in I} G_t \tag{1}$$

그리고 경계 생성 인자를 정의하여 스융 볼륨의 경계들과 같이 정의하면 는 다음과 같은 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\partial(SV(G)) \subset \{\partial(G_0) \cup SS(g_t)\} = AE(G) \tag{2}$$

식 (2)에서  $\partial G_0$ 와  $\partial G_1$ 는 초기 위치와 최종 위치에서의 물체의 경계이고  $g_t$ 는 운동하는 물체  $G_t$ 의 경계 중 운동 경로를 스치며 궤적을 남기는 점들의 집합이며, 운동하는 물체  $G_t$ 의 곡면 위에 존재할 수도 있고 모서리가 될 수도 있다. 이 부분에 대한 자세한 설명은 3.2 절에서 다루기로 한다.  $SS(g_t)$ 는  $g_t$ 를 운동 경로에 대하여 스위핑한 스융 곡면(Sweep Surface)이다. 식(2)의 우변은 스융 볼륨의 경계뿐 아니라 스융 볼륨의 내부에 생성되는 스융 곡면과  $\partial G_0$ 와  $\partial G_1$  중 스융 볼륨의 내부에 존재하는 부분 까지 표현한 식이다. 본 논문에서는 이를  $AE(G)$ (augmented envelope)이라 정의한다.  $\partial G_0$ 와  $\partial G_1$  위에 존재하는 모든 점들은 각 위치에서의 운동 속도에 대하여 계산된  $g_0, g_1$ 을 기준으로 물체의 내부를 향하는 속도(inward velocity)를 갖는 점들(ingress points)  $P_i$ 와 물체의 외부를 향하는 속도(outward velocity)를 갖는 점들(egress points)  $P_e$ 로 나뉘어 진다. 이중  $\partial G_0$ 는  $P_i$ ,  $\partial G_1$ 는  $P_e$ 가 존재하는 부분이 스융 볼륨에 기여하는 부분이다<sup>[6]</sup>(Fig. 13참조).

따라서 스융 볼륨의 경계만을 표현하기 위해서는 내부에 생성된 스융 곡면과  $\partial G_0, \partial G_1$  중 스융 볼륨 내

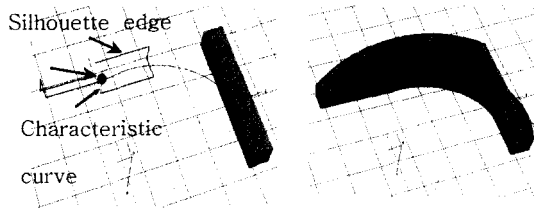


Fig. 1. Characteristic curve, silhouette edge and break point.

부에 존재하는 부분을 스윙 볼륨의 경계( $\partial(SV(G))$ )로 절단해야 한다.

3.2 엔벨롭

식 (2)의  $SS(g_t)$ 부분을 엔벨롭이라 하는데 스윙 볼륨의 계산을 위해서는 엔벨롭 계산이 선행되어야 하며, 엔벨롭은 운동하는 물체의 형상과 운동 방향에 따라 결정된다<sup>9,10</sup>.

엔벨롭은 물체의 곡면(surface), 모서리(edge), 꼭지점(vertex)의 일부분에 의해 생성되는데(Fig. 1참조), 엔벨롭을 생성하는 요소 중 특히, 운동하는 물체의 곡면으로부터 엔벨롭을 생성하는 요소를 특징곡선(characteristic curve), 모서리로부터 생성하는 요소를 실루엣 모서리(silhouette edge)라 한다(꼭지점은 모서리에 포함).

$$SS(g_t) = SS(c_t) + SS(s_t) \tag{3}$$

식 (3)에서 엔벨롭은 특징곡선으로부터 생성되는 스윙곡면인  $SS(c_t)$ 와 실루엣 모서리로부터 생성되는 스윙곡면인  $SS(s_t)$ 로 이루어진다.  $SS(g_t)$ 는 전체가 스윙 볼륨의 경계가 될 수도 있고 전체가 스윙 볼륨 내부에 생성되어 묻힐 수도 있으며, 또한 일부만 스윙 볼륨의 경계를 이루고 일부는 그 내부에 묻힐 수도 있다. 그러므로 스윙 볼륨을 생성하기 위해서는 스윙 볼륨의 경계 곡면으로 스윙 볼륨의 내부에 생성된 엔벨롭을 잘라낸 후 적절한 테스트를 통하여 삭제하여야 한다. 그러나 운동하는 물체의 운동 영역의 가시화(visualization)를 통한 간섭 검사 등의 많은 그래픽 응용분야에서 정확한 스윙 볼륨의 경계( $\partial(SV(G))$ )를 계산하지 않고  $AE(G)$ 를 사용할 수 있다. 본 논문에서는  $AE(G)$  생성을 위한 알고리즘을 개발하였고 스윙 볼륨에 묻히는 엔벨롭을 절단하여 스윙 볼륨을 생성하는 것은 향후 연구에서 다루고자 한다.

3.2.1 특징 곡선으로부터의 엔벨롭 생성

$x, y, z$  좌표계에서 시간  $t$ 와  $t+\Delta t$ 에서의 곡면을 각각

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{4a}$$

$$f(x, y, z, t+\Delta t) = 0 \tag{4b}$$

라고 표현했을 때  $\Delta t$ 가 충분히 작고 이 두 곡면식의 교집합  $C(\Delta t)$ 가 존재하면  $C(\Delta t)$ 는  $f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x, y, z, t) = 0$  인 곡면 위에 존재하게 되고 양변을  $\Delta t$ 로 나눈

$$\frac{f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t} = 0 \tag{5}$$

관계 또한 만족한다.  $\Delta t$ 가 0으로 수렴하면 식 (5)의 좌변은

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t} = \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \tag{6}$$

가 되므로 식 (5)는 아래와 같은 식이 된다.

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

$C(\Delta t)$ 는 식 (4b)도 만족하고 또한 식 (7)도 만족하므로 식 (4b)대신 식 (7)을 이용하면, 시간  $t$ 일 때의 물체의 운동방정식 (4a)와 그 시간에서의 미분 방정식 (7)을 연립으로 풀어 구해지는 해가 시간  $t$ 일 때 물체를 이루는 곡면  $f$ 의 특징 곡선이 된다. 따라서 초기위치에서부터 최종위치까지의 모든 시간에 대하여 얻어진 식 (4a)와 (7)과 같은 연립 방정식들을 풀이하면 특징 곡선들의 집합으로 구성되는 곡면을 얻을 수 있다. 이 곡면들이 특징곡선으로부터 생성된 엔벨롭( $SS(c_t)$ )이다<sup>11</sup>. 그러나 위의 방법은 물체의 모양이 간단한 경우를 제외하고는 해석적으로 구할 수 없다<sup>9,10</sup>. 따라서 복잡한 물체에 대해서는 기하적인 특성을 이용하여 특징 곡선을 구하고 이를 이용하여 엔벨롭을 계산하는 방법을 사용한다.

운동하는 곡면  $f$ 의 특징 곡선에서의 기하학적 특성은 그 특징 곡선 위의 점  $p$ 에 접하는 미소 접평면  $q_p$ 와  $SS(c_t)$ 가 그 순간에 같은 평면 위에 존재한다는 것이다. 즉 시간  $t$ 에서 운동하는 곡면 위의 점  $p$ 가 엔벨롭에 기여하려면 그 점에서의 속도  $v_p$ 가 미소 접평면  $q_p$ 위에 존재해야 한다. 이로부터 임의의 점  $p$ 에서 속도  $v_p$ 와 그 곡면에 대한 수직 벡터  $n_p$ 는 서로 수직이어야 함을 알 수 있다. 이 관계를 수식으로 표현하면

$$v_p \cdot n_p = 0 \tag{8}$$

이 된다 따라서 식 (8)의 관계를 만족하는 곡면 위의 점들의 집합은 엔벨롭에 기여하는 특징 곡선이 된다. 본 논문에서는 식 (8)을 만족시키는 곡면 위의 점을 특징 점이라 정의하고 식 (8)은 특징 곡선 조건식이라 정의한다.

3.2.2 실루엣 모서리로부터의 엔벨롭 생성

운동하는 물체의 모서리가 엔벨롭 생성에 기여하는 경우, 이를 실루엣 모서리라 부른다. 실루엣 모서리는 단지 볼록(convex) 모서리만이 될 수 있는데 오목(concave) 모서리가 생성하는 곡면은 스윙 볼륨에 묻히기 때문에 계산할 필요가 없다<sup>11)</sup>. 그러므로 본 논문에서 모서리는 볼록 모서리만을 의미한다.

모서리와 특징 곡선과의 교점을 절점이라 부르는데, 곡면의 모서리에 절점이 존재하지 않는 경우에는 모서리 전체가 실루엣 모서리가 되거나 아닐 수 있고, 절점이 존재하는 경우에는 절점을 중심으로 그 모서리가 두 부분으로 나누어지는데 이 중 한 부분만이 실루엣 모서리가 된다. 그 이유는 두 부분 중 한 부분은 스윙 볼륨에 의해 묻히기 때문이다<sup>11)</sup>. 이 두 경우에 대하여 어느 부분이 실루엣 모서리가 되는지의 결정은 모서리 e 위의 임의의 점 p의 속도 벡터  $v_p$ 와 모서리 e를 공유하는 두 곡면에서 점 p의 수직벡터  $n_1, n_2$ 를 이용하여 구할 수 있다.

Fig. 2(a)의 모서리 e가 실루엣 모서리가 되려면 실루엣 모서리 위의 임의의 점에서 그 모서리를 공유하는

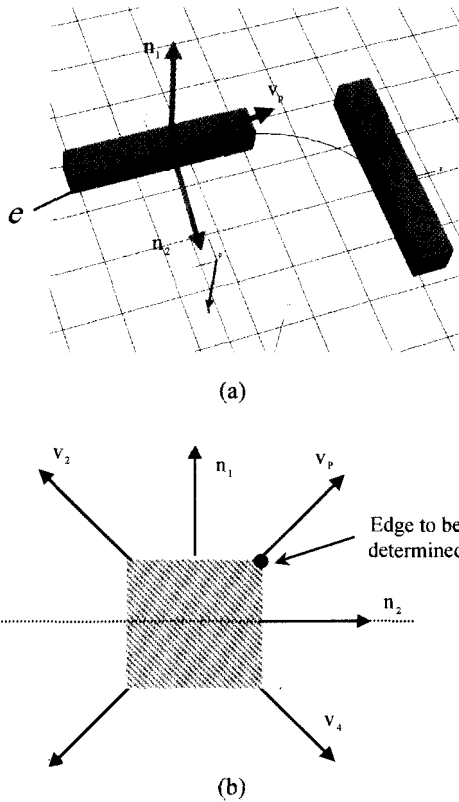


Fig. 2. Determination of silhouette edge.

두 곡면의 수직 벡터를 속도 벡터에 투영 하였을 때 서로 반대 방향이 되어야 한다. 방향이 같으면 그 모서리에 의해서 생성된 곡면은 스윙 볼륨에 묻히기 때문에 불필요하게 된다. 예를 들어  $p$ 를 e 위의 임의의 점으로 선정하였을 경우  $(v_p \cdot n_1)(v_p \cdot n_2) \leq 0$ 이면,  $p$ 를 포함하는 부분이 실루엣 모서리가 되며  $(v_p \cdot n_1)(v_p \cdot n_2) > 0$  이면 반대가 된다. 예를 들어 Fig. 2(b)의 경우에는 두 벡터  $v_p$ 와  $n_1$ 의 사이각이 내각이므로 이들의 내적  $v_p \cdot n_1$ 은 0보다 크고 같은 이유로  $v_p \cdot n_2$ 도 0보다 크다. 따라서  $(v_p \cdot n_1)(v_p \cdot n_2) > 0$ 의 관계가 성립되므로 속도 벡터가  $v_p$ 일 때 모서리 e는 실루엣 모서리가 될 수 없다. 참고로 속도 벡터가  $v_2, v_4$  일 때 모서리 e가 실루엣 모서리가 된다.

위의 방법은 운동하는 물체의 시간 t에서 실루엣 모서리를 계산하는 방법이다. 이를 이용한 엔벨롭 생성은 3.2.1절에서 설명한 바와 같이 물체의 운동 시간에 대하여 실루엣 모서리를 계산하여 엔벨롭을 생성한다.

4. NURBS곡면체의 엔벨롭 생성

본 논문에서 다루고자 하는 자유 곡면체<sup>12)</sup>는 NURBS 곡면으로 표현된 물체이다. 본 장에서는 NURBS 곡면체의 엔벨롭 생성에 관한 설명을 위해 NURBS 곡면식에 대해 간단히 설명하고 NURBS 곡면체의 엔벨롭을 생성하기 위하여 엔벨롭의 기하학적 조건을 NURBS 곡면식에 적용하였다.

4.1 NURBS 곡면

NURBS는 Non-Uniform Rational B-Spline을 의미하는데, 현재 CAD 시스템에서 곡선 및 곡면을 표현하는 파라메트릭 표현법 중에서, 가장 널리 쓰이는 일반적인 방법이다. NURBS 곡면의 방정식은 다음과 같이 표현된다<sup>12)</sup>.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}$$

$$V = \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_m, 1, \dots, 1\}$$

$$U = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_n, 1, \dots, 1\}$$

$$0 \leq u, v \leq 1 \tag{9}$$

식 (9)에서  $N_{i,p}, N_{j,q}$ 는 B-spline 블렌딩 함수이고,  $P_{i,j}$

<sup>11)</sup> 본 연구에서는 5x5차 이하의 NURBS곡면체 대해 엔벨롭을 계산하였다.

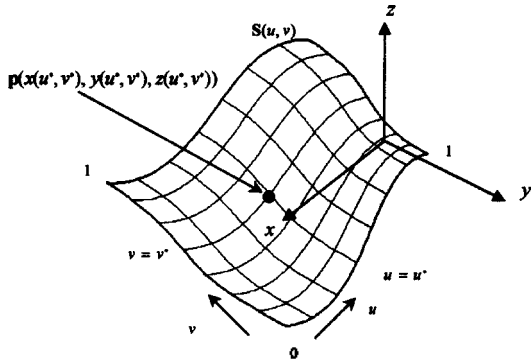


Fig. 3. A point on a NURBS surface.

와  $\omega_i$ 는 곡면의 모양을 결정하는 조정점과 가중치이다.  $U$ 와  $V$ 는 노트 벡터로서, 노트의 개수는 사용자가 결정하는 곡면의 차수  $p, q$ 와 조정점의 개수에 의해 영향을 받으며, 노트 값은 전체 곡면을 구성하는 패치(patch)의 개수와 그 패치들 간의 연속성을 조정하는 역할을 한다. 식 (9)를 곡면 상의 임의의 점에 대한 속도와 수직벡터를 구하기 용이하도록 글로벌 좌표계의  $x, y, z$  성분으로 표현하면

$$S(u, v)_{n \times m} \Leftrightarrow \begin{cases} x(u, v) = [\mathbf{u}]_{1 \times (n+1)} [\mathbf{M}_x]_{(n+1) \times (m+1)} [\mathbf{v}]_{(m+1) \times 1} \\ y(u, v) = [\mathbf{u}]_{1 \times (n+1)} [\mathbf{M}_y]_{(n+1) \times (m+1)} [\mathbf{v}]_{(m+1) \times 1} \\ z(u, v) = [\mathbf{u}]_{1 \times (n+1)} [\mathbf{M}_z]_{(n+1) \times (m+1)} [\mathbf{v}]_{(m+1) \times 1} \end{cases} \quad (10)$$

와 같다. 식 (10)에서  $\mathbf{M}_{x, y, z}$ 은 블렌딩 함수와 조정점 그리고 가중치와 관련된 행렬이다. 식 (10)을 이용하면 Fig. 3에서 보는 바와 같이 곡면의 파라미터 한 쌍  $(u^*, v^*)$ 과 되면 곡면 위의 한 점  $p(x(u^*, v^*), y(u^*, v^*), z(u^*, v^*))$ 을 일대 일로 대응시킬 수 있다.

본 연구에서는 NURBS 곡면체 뿐만 아니라 이들의 불리언(Boolean) 연산된 물체에도 적용되도록 하였다. 물체가 불리언 연산 되었다는 것은 물체를 이루는 곡면이 잘려질(trimmed) 수 있다는 의미이다. NURBS곡면의 두 개의 파라미터  $u, v$ 는 0에서 1까지의 값을 갖는다. 따라서 곡면의 경계에서 파라미터  $u, v$ 는 모두 0 또는 1의 값을 갖게 된다. 하지만 곡면이 잘려진 경우에는 파라미터 값 또한 경계에서 0 또는 1이 될 수 없고 물체의 잘려진 부분의 파라미터 값이 경계 값이 된다.

## 4.2 NURBS곡면의 특징 곡선

### 4.2.1 특징 곡선 조건식

특징 곡선이 되기 위한 조건 즉, 곡면의 임의의 점에서의 수직 벡터와 속도 벡터가 수직인 식 (8)의 조건을

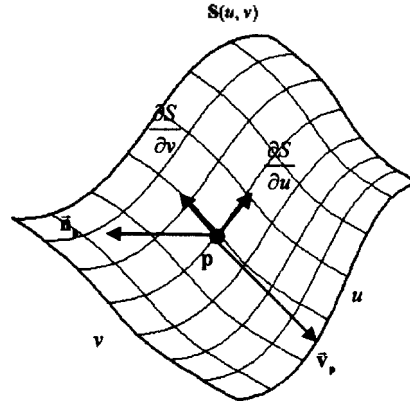


Fig. 4. Normal and velocity vectors of a point on a surface.

이용하여 Fig. 4의 운동 하는 물체의 한 곡면  $S$ 에 대하여 특징 곡선 조건식을 구하기로 한다.

곡면  $S$ 의 방정식이 식 (10)과 같이 표현되고 곡면의 수직 벡터가 물체로부터 바깥쪽으로 정의되었다고 하면 곡면 위의 임의의 점  $p$ 에서의 곡면의 수직 벡터는

$$\mathbf{n}_p = \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (11)$$

과 같다.

여기서  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 는 글로벌 좌표계의  $x, y, z$ 에 놓여있는 단위 벡터이다. 곡면 위의 점  $p(x, y, z)$ 에서 일반적인 운동의 속도 벡터는

$$\mathbf{v}_p = (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \quad (12)$$

과 같이 각 성분으로 표현할 수 있다. 일반적인 운동의 경우 시간에 따라 특징곡선과 실루엣 모서리가 동적으로 변하므로 매 시간마다 계산해야 하므로, 계산의 간편함을 위해 본 논문에서는 물체 좌표계에 항상 속도가 일정하여 특징곡선과 실루엣 모서리가 시간에 따라 변하지 않는 스크류 운동에 NURBS곡면체의 엔벨롭 생성 이론을 적용하였다. 스크류 운동은 직진 운동과 원 운동의 조합으로 이루어져 비교적 복잡한 운동 경로를 표현할 수 있고, 또한 일반적인 운동을 스크류 운동으로 보간하는 방법이 알려져 있으므로<sup>[6]</sup>, 일반적인 운동경로에 대해서도 적용 될 수 있다. 스크류 운동의 속도 벡터  $\mathbf{v}_p$ 는 피치  $p$ 를 이용하여 식 (12)에 대입하면

$$\mathbf{v}_p = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + p\mathbf{k}) \frac{d\phi}{dt} \quad (13)$$

와 같이 표현될 수 있다.  $v_p$ 와  $n_p$ 가 수직관계에 있는 특징 점을 구하기 위해서는  $v_p$ 의 방향만 고려하면 되므로 각속도 즉  $d\phi/dt$ 는 1로 가정하고, 식 (10)에서 곡면의  $x, y, z$  성분은 각각  $u, v$ 의 함수이므로 속도 벡터는

$$v_p = (-y(u, v)i + x(u, v)j + pk) \tag{14}$$

로 표현될 수 있다. 따라서 식 (8)의 수직 조건을 곡면에 적용하면

$$(-y(u, v)i + x(u, v)j + pk) \cdot \left\{ \left( \frac{\partial y \partial z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z \partial y}{\partial u \partial v} \right) i + \left( \frac{\partial z \partial x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial x \partial z}{\partial u \partial v} \right) j + \left( \frac{\partial x \partial y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial y \partial x}{\partial u \partial v} \right) k \right\} = 0 \tag{15}$$

이 된다. 식 (15)가 스크류 운동에 대한 특징 곡선 조건식이 되며 이를 풀어서 구한 해  $u, v$  들을 식 (10)의 곡면 방정식에 대입하면 특징 점들의 집합이 된다.

#### 4.2.2 특징 곡선 조건식으로부터 특징점 탐색

식 (15)의 특징곡선 조건식은  $u, v$ 의 함수이므로  $F(u, v)=0$ 라 표현할 수 있다. 여기서  $F(u, v)$ 의 차수는 곡면  $S$ 의 차수에 연관되는데 곡면  $S$ 의  $u, v$ 의 차수가 각각  $m, n$ 차 일 때  $F(u, v)$ 의 차수는 각각  $3m-1, 3n-1$ 차가 된다. 본 논문에서는 계산의 편의상 곡면의 차수를 각각 5,5차로 제한하였으므로  $F(u, v)$ 의 최고차 항의 차수는 14차까지 될 수 있다.

특징 곡선 조건식의 해를 구하기 위해서는 이 변수 방정식(two variable equation)을 풀어야 한다. 그러나  $u, v$  값을 변화시켜가며  $F(u, v)=0$ 을 만족하는지를 검사하는 방법은 비효율적이다. 즉, 알고리즘 측면에서 곡면의 임의의 한 점에 대해서 속도 벡터와 수직 벡터를 구하고 두 벡터의 내적이 0이 되는지 확인하는 것은 시간 소요가 많고 정확한 특징 점을 구하기가 어렵다. 따라서  $u, v$  변수 중 하나의 변수를 상수처리하고 나머지 하나의 변수에 대한 일 변수 방정식(one variable equation)의 해를 구하기 위해 식 (15)를  $u, v$ 에 대해 정리하여 다음의 특징 곡선 조건식의 일반식을 구하였다.

$$F(u, v) = [u]_{1 \times 3m} [C]_{3m \times 3n} [v]_{3n \times 1} \tag{16}$$

식 (16)을 구하기 위해 식 (15)에서  $x, y, z$ 좌표계로 표현된 각각의 항들을 모두  $u, v$ 의 표현으로 전환한 후 식을 전개한다. 전개된 식을 우선 하나의 변수에 대하여 정리한 후 정리된 식을 다시 나머지 변수에 대하여 정리하면 식 (16)을 구할 수 있다. 식 (16)에서  $[u]_{1 \times 3m} [v]_{3n \times 1}$ 는 상수항부터  $3m-1, 3n-1$ 차 항까지  $u, v$  polynomial 벡

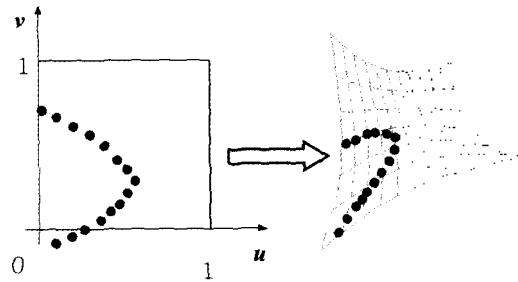


Fig. 5. Parametric domain and geometric domain.

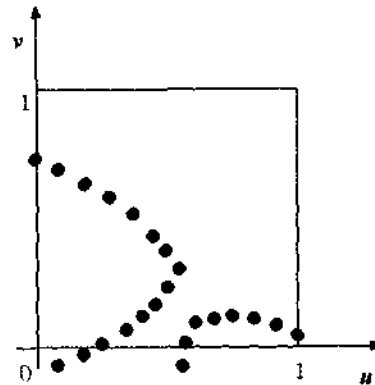


Fig. 6. Two characteristic curves on a surface.

터이고  $[C]_{3m \times 3n}$ 는 계수 행렬이다.

곡면의 파라미터 구간이  $0 \leq u, v \leq 1$ 이므로 식 (16)을 이용하여 구한 해 중에 곡면의 파라미터 구간에 속하는  $u, v$  해가 파라메트릭 도메인에서 특징 점들이 되며, 식 (10)의 곡면 식에 대입하면 Fig. 5와 같이 곡면 위의 특징 점을 구할 수 있다.

#### 4.2.3 특징 점들의 분류

다면체의 경우 물체의 한 면에서 특징 곡선이 한 개 생성되지만 Fig. 6과 같이 곡면의 경우에는 곡면의 형상과 운동 경로에 따라 하나의 곡면에 두 개 이상의 특징 곡선이 존재할 수 있다.

따라서 4.2.2절에서 구한 해들이 어떤 특징곡선에 속하는지 분류해서 분류된 특징 점들을 이용하여 각각의 특징곡선을 생성해야 한다. 특징 점들을 분류하기 위해 우선 곡면 위에 특징 곡선이 몇 개 존재하는지 알아야 하는데, 이는 찾아진 해 중에 곡면의 파라메트릭 도메인의 경계에 몇 개의 해가 존재하는지 탐색하면 알 수 있다. 연속적인 곡면에서 생성된 특징 곡선은 반드시 곡면의 모서리와 만나게 된다. 곡면과 특징 곡선을 파라메트릭 도메인에 표시하면 곡면의 모서리는 파라메트릭 도메인에서 경계에 해당되며 특징 곡선은

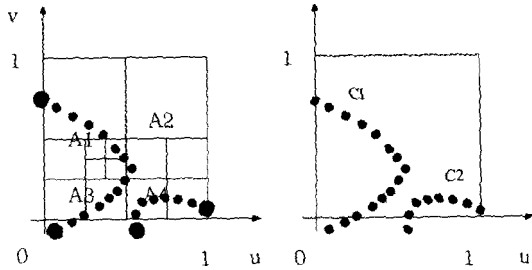


Fig. 7. Classification of characteristic points using subdivision.

경계와 만나게 된다. 하나의 곡선에는 두 개의 끝점이 존재하므로 파라메트릭 도메인의 경계에서 찾아진 해의 개수는 항상 짝수 이고 그 수의 1/2이 특징곡선의 수가 된다. 찾아진 경계위의 특징점(이하 경계점) 으로부터 특징 곡선의 수가 2개 이상으로 결정되면 특징 점들을 분류해야 한다. 특징 점의 분류는 파라메트릭 영역 분할(subdivision)을 수행함으로써 이루어 진다 Fig. 7의 경우에 경계에서 해가 4개 존재하므로 그 영역을 4개로 분할한다. 분할 된 영역 중 A1은 경계에서 해가 2개 존재 하므로 더 이상 영역 분할을 할 필요가 없고 A2 영역의 경계에는 해가 존재하지 않으므로 계산 대상에서 제외시킨다. 그러나 A3와 A4영역의 경계에서는 해가 4개 존재하므로 다시 영역을 분할한다. Fig. 7과 같이 분할 된 영역의 경계에서 2개의 해가 존재할 때까지 분할이 이루어진다. 분할된 영역의 경계에서 2개의 해가 존재한다는 것은 그 2개의 해가 하나의 곡선 위에 존재한다는 것을 의미하므로 해가 2개 존재하는, 이웃하는 영역의 경계의 해는 하나의 곡선 위에 존재하게 된다. 하나의 곡선이 존재하는 영역에서는 오차를 줄이고 균등한 해를 얻기 위해 탐색 구간을 0.05로 하여 등 간격으로 해를 탐색하였다.

Fig. 8은 4.2.2 절과 4.2.3절에서 설명한 특징 곡선 조건식의 해를 구하고 이를 분류하는 과정의 flow chart 이다.

4.2.4 특징 곡선 생성

분류된 특징 점들은 하나의 특징 곡선 위에 존재하므로 점들을 보간하여 곡선을 생성하면 특징곡선이 완성된다. 점들을 보간하여 곡선을 생성하는 다양한 방법 중에 5차 spline곡선은 여러 개의 5차 Hermite 곡선의 집합으로 이루어진 복합 곡선으로서 노트점에서 곡률 연속 조건까지 부여하여 연결한 곡선이다. 본 연구에서는 Fig. 9와 같이 5차 spline으로 특징곡선을 생성하였는데 특징 점들 사이를 보간한 구간에서의 각도 오차는 이하이다. 찾아진 특징 점에서는 속도 벡터와

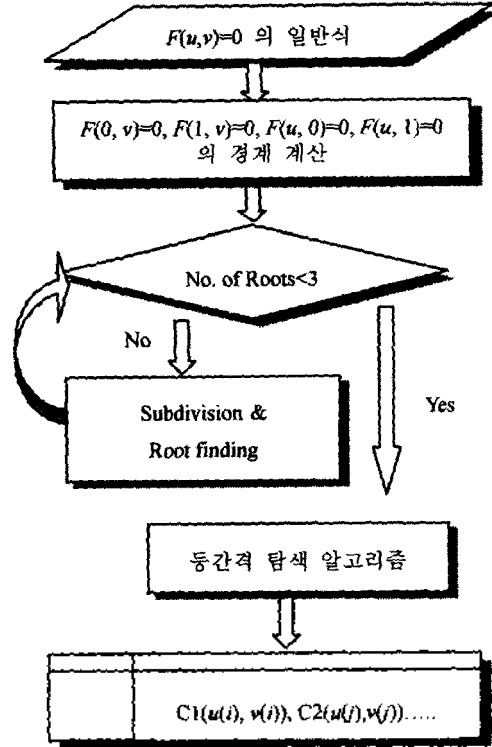


Fig. 8. Flow chart of root finding and classification.

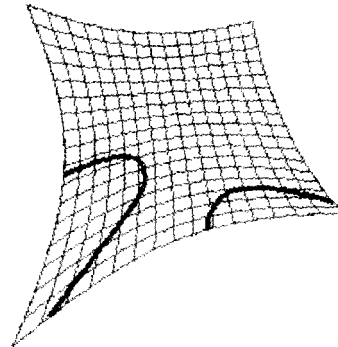


Fig. 9. Characteristic curves on a surface.

곡면의 수직 벡터가 수직이므로 정확히 이다. 그러나 곡선으로 보간한 구간에서는 두 벡터의 각도가 정확히 가 안될 수 있다. 오차는 보간된 곡선에서 점을 추출하여 그 점에서 속도 벡터와 수직 벡터의 각도를 로 나눈 백분율이다.

4.3 NURBS곡면의 실루엣 모서리

3.2.2절에서 설명한 실루엣 모서리 판정법을 곡면 모서리에 적용하려면 모서리 위의 점 p에서의 속도 벡터

와 모서리를 공유하는 두 곡면 위의 점  $p$ 에서의 각각의 수직 벡터를 알아야 한다. 수직 벡터를 계산하기 위해서는 모서리에 해당하는 곡선의 방정식을 알아야 하는데 곡선의 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u &= f(w) \\ v &= g(w) \end{aligned} \quad 0 \leq u, v, w \leq 1 \quad (17)$$

식 (17)에서  $u, v$ 는 곡면의 파라미터,  $w$ 는 곡선 파라미터이며  $f$ 와  $g$ 는 곡선의 polynomial 계수 함수이다<sup>[10]</sup>. 하나의  $w$  값에 대하여 한 쌍의  $u, v$ 의 값이 결정되는데, 결정된 값을 곡면식 식 (10)에 대입하면 곡면 위의 점을 계산할 수 있다. 따라서 곡면의 모서리는  $w$ 가 0에서 1까지의 구간에서 계산된  $u, v$  값을 갖는 곡면 위의 점들의 집합이 된다. 구해진 모서리 위의 임의의 점  $p$ 에서 스크류 운동의 속도 벡터는 4.2.1절에서 구한 식 (14)와 같다.

$$(v_p \cdot n_1)(v_p \cdot n_2) \leq 0 \quad (18)$$

Fig. 10에서 모서리  $e$ 를 공유하는 두 곡면  $S1, S2$ 는 솔리드의 B-Rep 데이터로부터 찾을 수 있다. 모서리 위의 점  $p$ 는 두 곡면  $S1, S2$ 위에 존재하므로 곡면 위의 점에서의 수직 벡터는 식 (11)으로부터 각각 구할 수 있다. 구해진 속도 벡터와 수직 벡터를 이용하여 식 (18)의 관계를 만족하는지 검사하여 실루엣 모서리를 판정한다.

블리언 연산된 물체는 연산의 종류에 따라 물체를 이루는 곡면이 잘려질 수 있다. 식 (17)은 잘려진(trimmed) 곡면의 모서리에도 적용되는 일반적인 표현이다. 잘려지지 않은(non-trimmed) 곡면의 모서리는 파라메트릭 도메인에서 경계에 해당하므로 파라미터  $w$ 에 상관없

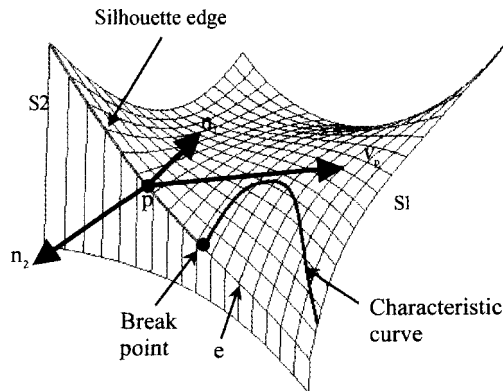


Fig. 10. Determination of silhouette edges in the case of freeform objects.

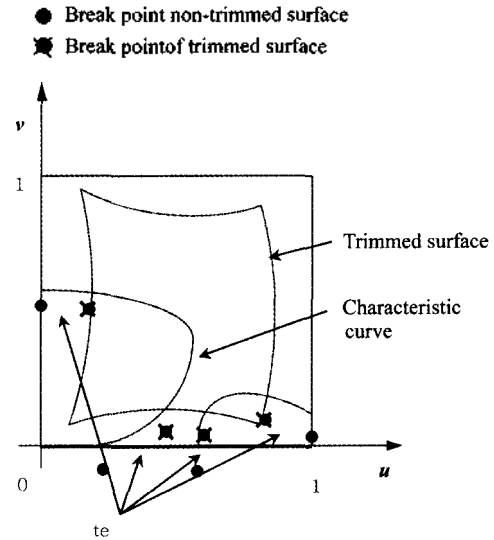


Fig. 11. Break points of a trimmed and non-trimmed surface.

이 항상 0또는 1을 갖게 되며 잘려진 곡면의 모서리는  $w$ 의 범위가 곡면의 잘려진 부분의 파라미터에 의해 제한된다.

모서리와 특징 곡선과의 교점을 절점이라 부르는데, 잘려진 곡면과 잘려지지 않은 곡면 모두 곡면의 모서리에 절점이 있는 경우, 절점은 Fig. 11과 같이 곡면의 파라메트릭 도메인에서 특징곡선의 방정식과 모서리 방정식의 교차 검사로 찾아질 수 있다. 그러나 잘려지지 않은 곡면의 경우에는 4.2.2절에서 곡면의 파라메트릭 도메인의 경계에서 이미 특징 점을 찾았으므로 경계에서의 특징 점이 바로 절점이 된다. 그러므로 잘려진 곡면의 경우에만 특징곡선과 모서리의 교차 계산으로 절점을 찾는다. 또한 잘려진 곡면의 경우 찾아진 절점을 이용하여 나누어진 모서리 중 식 (18)을 이용하여 실루엣 모서리를 판정하고, 특징 곡선 또한 절점에 의해서 잘려진 의미 없는 부분(Fig. 11의 te)은 버려야 하는데, 이는 4.2절의 곡면의 경계에서 특징 점 탐색시 파라미터  $u, v$ 값을 0또는 1에서 탐색을 시작했기 때문이다. 따라서 우선 잘려지지 않은 경우의 곡면의 특징 점을 구하고 곡면이 잘려진 곡면일 경우에는 절점에 의해 의미없는 부분은 삭제한다.

4.4 엔벨롭 생성

특징 곡선과 실루엣 모서리는 물체의 운동 경로에 따라 매 순간마다 달라진다. 따라서 엔벨롭을 생성하기 위해서는 매 순간의 특징곡선과 실루엣 모서리를 계산하여야 하나 본 논문에서 적용한 스크류 운동은



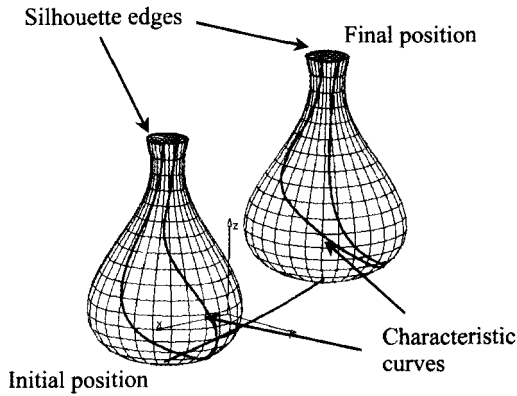


Fig. 12. Characteristic curves and silhouette edges in the case of freeform objects.

물체 좌표계에 대하여 속도가 일정하기 때문에 Fig. 12와 같이 초기위치에서 계산한 특징곡선과 실루엣 모서리가 운동하는 물체의 위치에 따라 물체 위에서 변하지 않는다. 초기위치와 최종위치로부터 스크류 운동의 파라미터가 계산되고, 물체가 운동하는 동안의 시간이 결정되면 스크류 운동의 속도를 계산할 수 있다. 또한 NURBS 곡면 위의 임의의 점에서의 수직벡터는 곡면 식으로부터 계산이 가능하다. 속도 벡터와 곡면의 수직벡터를 엔벨롭의 기하학적 조건과 실루엣 모서리 판정법에 적용하여 초기 위치에서 하나의 곡면에 대하여 특징 곡선과 실루엣 모서리를 계산한다.

4.2절의 특징 곡선 생성 알고리즘과 4.3절의 실루엣 모서리 탐색 알고리즘을 모든 곡면에 적용시켜 물체의 모든 특징곡선과 실루엣 모서리를 탐색한다.

Fig. 13은 계산된 특징 곡선과 실루엣 모서리에 의해 나뉘어진 물체의 일부분 중 엔벨롭 생성에 기여하는 부분을 나타낸 것인데, Fig. 13에서 A는 식 (3)의  $S(G_0)$

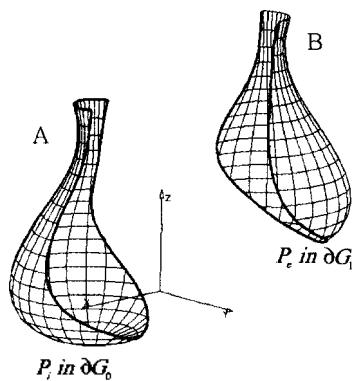


Fig.13. Inward and outward moving portion of boundary.

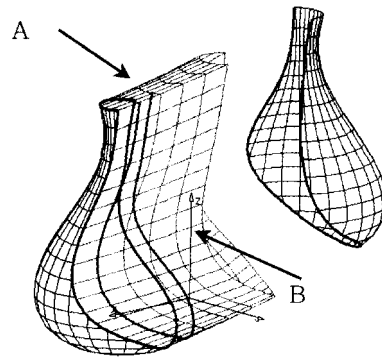


Fig. 14. Generation of ruled surface between initial and final position.

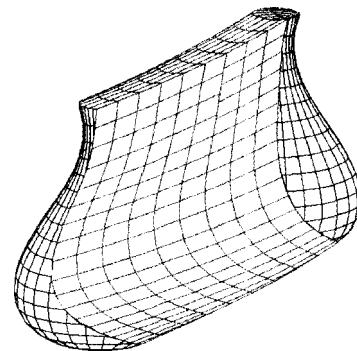


Fig. 15. Envelope.

에 해당하는 부분이고, B는  $S(G_1)$ 에 해당하는 부분이다. 특징 곡선과 실루엣 모서리를 이용하여 Fig. 14와 같이 룰드 곡면을 생성하는데, Fig. 14에서 A는 식 (3)에 해당하며, B는 에 해당하는 부분이다. 이 룰드 곡면과 초기위치와 최종위치의 물체를 연결하여 Fig. 15와 같이 최종 엔벨롭을 생성한다. Fig. 15에서는 엔벨롭이 모두 스윕 볼륨의 경계가 되는 경우로 식 (3)의 부분만 있고, 내부에 묻히는 에 해당하는 부분은 없는 경우이다.

### 5. 시스템 구현과 적용 사례

본 연구에서 제안한 NURBS 곡면체의 엔벨롭 생성 알고리즘을 검증하기 위하여 엔벨롭 생성 시스템을 구현하였다. 시스템 구현을 위한 하드웨어는 IBM RS/6000 43p-140 Workstation을 사용하였으며 개발 언어는 C 언어를 사용하였다. 디스플레이를 위해서는 상용 CAD 시스템 중 곡면 모델링 기능이 강력한Dassault Systemes 사의 CATIA를 사용하였다. 시스템 인터페이스는 CATIA에서 제공하는 GUI(Graphic Interactive Interface)를 이용하여 구성하였으며, CATGEO, CATMSP 등

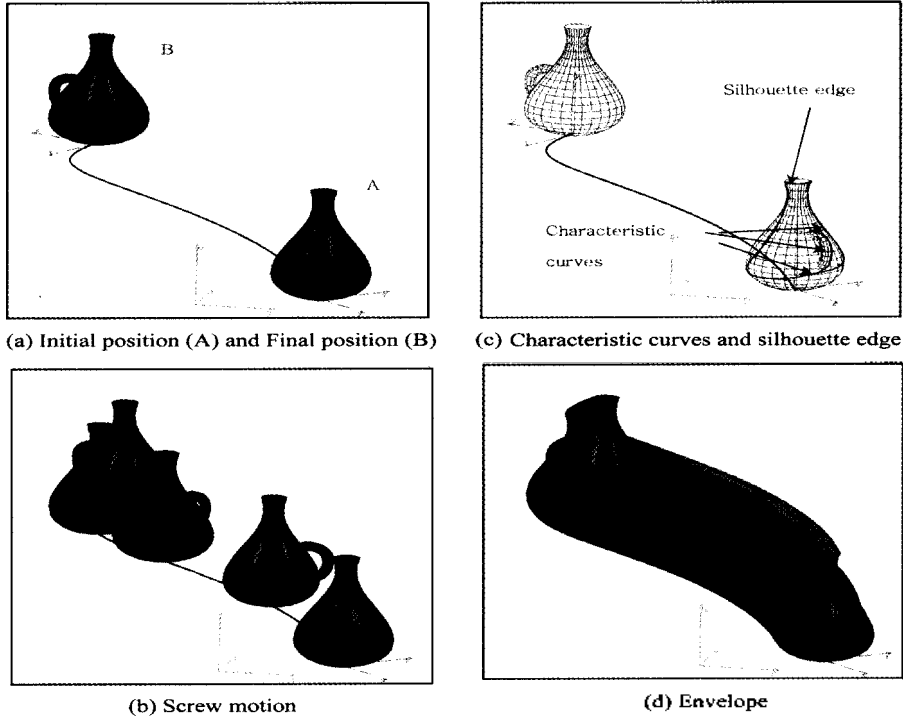


Fig. 16. Example 1.

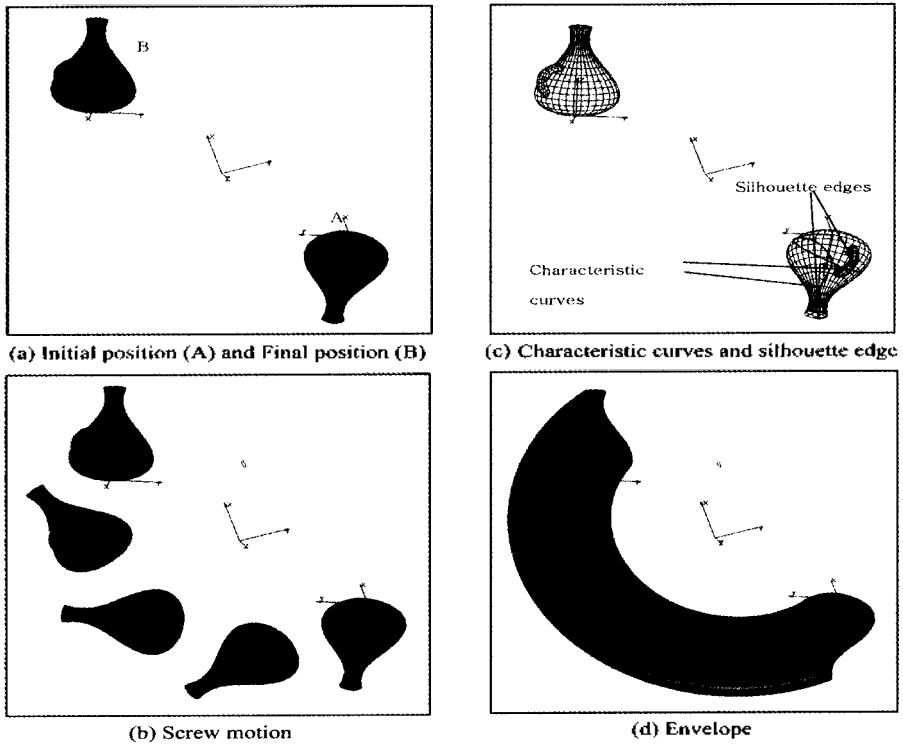


Fig. 17. Example 2.

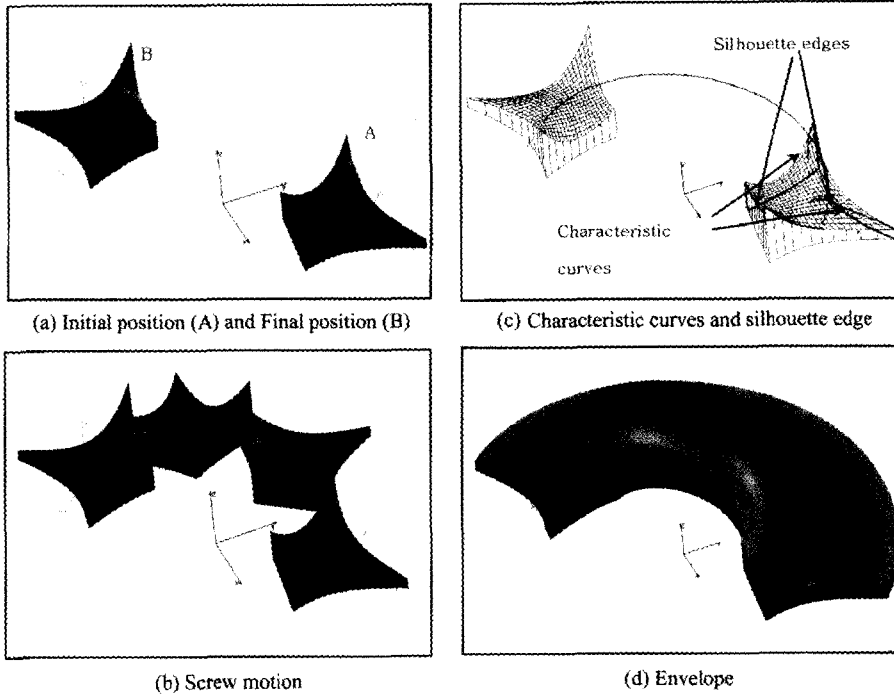


Fig. 18. Example 3.

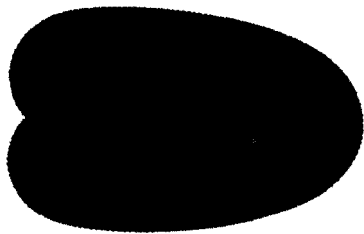


Fig. 19. Self intersection of envelope.

다양한 CATIA API Subroutine들을 사용하였다.<sup>11,13,14).</sup>

주요 기능으로는 운동 경로의 시작점과 최종점의 위치와 방향을 결정하는 두 개의 축 정보를 읽어 들여서 디스플레이 한다. 그 후 축으로부터 Kim<sup>11)</sup>의 방법으로 스크류 파라미터를 계산하여 물체의 스크류 운동을 디스플레이 한다. 계산된 솔리드를 선택하면 선택된 솔리드의 특징곡선을 생성하고 실루엣 모서리를 판정하여 디스플레이 하고 초기위치와 최종위치 사이를 스크류 운동 경로를 따라 엔벨롭을 생성한다.

본 연구에서 개발된 시스템을 검증하기 위하여 NURBS 곡면체에 대해서 알고리즘을 적용해 보았다. 5x5차 NURBS 패치 8개의 곡면으로 구성된 꽃병의 간단한 스크류 운동을 하는 예제가 Fig. 16에 도시되어 있다. Fig. 16의 (a)는 운동하는 물체의 초기위치와 최종치이

고, (b)는 물체가 운동하게 될 운동경로를 표현한 것이다. (c)는 물체의 초기위치에서 (b)의 운동 경로에 대한 특징곡선과 실루엣 모서리를 탐색한 결과이며 (d)는 식 (3)의  $S(SV(G))$ 에 해당하는 외부의 스웸 볼륨의 경계와  $S(SV(G)_m)$ 에 해당하는 꽃병의 손잡이가 불리언 연산될 때 파고든 부분의 곡면이 생성되어 내부에 존재하는 결과이다. Fig. 17은 같은 물체에 대해서 복잡한 스크류 운동을 적용한 예이다. 이 외에도 곡면의 형상이 복잡한 3x3차 NURBS 패치 6개의 곡면으로 이루어진 임의의 물체에 대해서 알고리즘을 적용시켜 보았다(Fig. 18). 예제에서 보는 바와 같이 특징곡선 생성과 실루엣 모서리 판정이 적절하게 이루어지며 이를 이용한 엔벨롭 생성에도 알고리즘이 잘 적용되는 것을 볼 수 있다.

## 6. 결론 및 향후 연구과제

본 연구에서는 일반적인 운동에 적용될 수 있는 NURBS곡면체 엔벨롭 생성 알고리즘을 개발하여 스크류 운동에 적용시켜 보았다. 또한 상용 CAD 시스템인 CATIA에 사용자 정의 기능으로 추가시켰다. 따라서 기존의 다면체와 2차 곡면체에 제한되었던 엔벨롭의 생성이 보다 복잡한 물체에서도 가능해졌다. 또한 본 알고리즘은 NURBS 곡면체들의 불리언 연산으로 이루어

진 물체에 대해서도 적용이 가능하므로 그 응용 범위가 넓다.

본 논문의 향후 연구 과제는 Fig. 19에서처럼 엔벨롭의 self intersection이 있는 경우 이를 자동으로 검사하는 것과 스융 볼륨 내부의 불필요한 엔벨롭을 자동으로 삭제 하는 알고리즘을 개발하여 하여 스융 볼륨을 생성하는 것이다.

### 참고문헌

1. 김재정, "기계 부품들의 조립 및 해체과정 설계를 위한 스크류이론의 응용," 한국 CAD/CAM학회 논문집, 제 2권, 제1호, pp. 60-70, 1997.
2. Ling, Z. K. and Chase, T. R., "Generating the swept area of a body undergoing planar motion," *Adv. Design Automation ASME DE*, Vol. 32, pp. 227-236, 1991.
3. Weld, J. D. and Leu, M. C., "Geometric representation of swept volumes with application to polyhedral objects," *Int. J. Robotics Res*, Vol. 9, pp. 105-116, 1990.
4. Matin, R. R. and Stephenson, P. C., "Sweeping of three dimensional objects," *Computer Aided Design*, Vol. 22, pp. 223-234, 1990.
5. Hu, Z. J. and Ling, Z. K., "Swept volumes generated by the natural quadric surfaces," *Compute & Graphics*, Vol. 20, No. 2, pp. 263-274, 1996.
6. Blackmore, D., Leu, M. C. and Jiang, H., "Swept volume: a retrospective and prospective view," *Neural Parallel and Scientific Computations*, Vol. 5, pp. 81-102, 1997.
7. Sambandan, K. and Wang, K. K., "Five-axis swept volumes for graphic NC simulation and verification," *ASME Design Automation Conference at Montreal Canada*, September 17-20, 1989.
8. Pegna, J., Variable sweep geometric modeling, Ph.D thesis Stanford University, Stanford, CA, December, 1987.
9. Lasser, D. and Hoschek, J., Fundamentals of computer Aided Geometric Design, A.K. Peters, 1993.
10. Faux I. And Pratt, M., Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood, 1987.
11. CATIA Advanced Surface Design API Reference Manual, Dassault Systemes, 1997.
12. 김재정, CATIA로 배우는 CAD/CAM, 만도출판사, 1998.
13. CATIA 3D Wireframe API Reference Manual, Dassault Systemes, 1997.
14. CATIA API Reference Manual, Dassault Systemes, 1997.



### 송 수 창

1998년 한양대 기계설계학과 학사  
2000년 한양대 기계설계학과 석사  
2001년-현재 CIMVI Tech.  
관심분야: CAD/CAM, CIM System



### 김 재 정

1981년 한양대학교 정밀기계학과 학사  
1983년 George Washington 공학석사  
1983년-1984년 미국 national Food Processors Association 연구원  
1989년 미국 MIT 공학박사  
1989년-1991년 미국 IBM T.J. Watson 연구소 연구원  
1991년-1993년 한국 IBM 소프트웨어 연구소 연구원  
1993년-현재 한양대학교 기계공학부 부교수  
관심분야: Geometric Modeling, CAD/CAM 응용