

## 점 집합의 보로노이 다이어그램을 이용한 원 집합의 보로노이 다이어그램의 계산: II. 기하학적 측면

김동욱\*, 김덕수\*\*, 조동수\*, Kokichi Sugihara\*\*\*

### The Computation of the Voronoi Diagram of a Circle Set Using the Voronoi Diagram of a Point Set: II. Geometry

Kim, D.\*, Kim, D. S.\*\*, Cho, D.\* and Sugihara, K.\*\*\*

#### ABSTRACT

Presented in this paper are algorithms to compute the positions of vertices and equations of edges of the Voronoi diagram of a circle set. The circles are located in a Euclidean plane, the radii of the circles are not necessarily equal and the circles are not necessarily disjoint. The algorithms correctly and efficiently work when the correct topology of the Voronoi diagram was given. Given three circle generators, the position of the Voronoi vertex is computed by treating the plane as a complex plane, the  $Z$ -plane, and transforming it into another complex plane, the  $W$ -plane, via the Mobius transformation. Then, the problem is formulated as a simple point location problem in regions defined by two lines and two circles in the  $W$ -plane. And the center of the inverse-transformed circle in  $Z$ -plane from the line in the  $W$ -plane becomes the position of the Voronoi vertex. After the correct topology is constructed with the geometry of the vertices, the equations of edge are computed in a rational quadratic Bezier curve form.

**Key words :** Circle set voronoi diagram, Apollonius' 10th problem, Mobius transformation, Rational quadratic bezier curve, Point location problem

#### 1. 서 론

유클리드 평면에 원들이 주어지고, 원들의 반지름은 같을 필요가 없고, 원들이 서로 교차하는 경우도 발생한다. 이러한 원 집합이 주어졌을 때, 보로노이 다이어그램을 구하려 한다.

이와 관련하여 다음과 같은 기존 연구가 존재한다<sup>[5,4,9,19,21,24-25]</sup>. 그리고 이에 대해서는 이전의 논문인 위상적 측면에서 살펴 보았다<sup>[7]</sup>. 제시한 알고리즘의 기본 아이디어는 다음과 같다. 첫째, 전체리 과정으

로 원들의 중심점의 보로노이 다이어그램을 구한다. 둘째, 이들 점 집합의 보로노이 다이어그램의 위상 정보를 초기해로 놓고 원 집합 보로노이 다이어그램이 올바른 위상 정보를 가지기 위해 일련의 모서리 플립 연산을 수행한다. 마지막으로, 올바른 위상 정보를 바탕으로 하여 올바른 기하 정보를 수정한다. 원의 개수를  $n$ 이라 할 때, 첫번째 단계에서의 최악의 경우 계산량은  $O(n \log n)$ 이고, 두 번째 단계의 최악의 경우 계산량은  $O(n^2)$ 으로 판명되었다. 세 번째 단계가 이 논문에서 중점적으로 다루고자 하는 문제이다.

구하고자 하는 원 집합 보로노이 다이어그램의 기하 요소는 보로노이 꼭지점의 좌표값과 보로노이 모서리의 곡선식이다. 보로노이 꼭지점의 좌표값은 세 원이 주어지면 계산할 수 있으며, 이 세 원은 수정된 보로노이 다이어그램의 꼭지점의 위상 정보를 통해 알 수 있다. 또한 보로노이 꼭지점의 정보는 주어진

\*학생회원, 한양대학교 산업공학과  
\*\*종신회원, 한양대학교 산업공학과  
\*\*\*University of Tokyo, Department of Mathematical Engineering and Information Physics  
- 논문투고일: 2000. 11. 8  
- 심사완료일: 2000. 12. 26

보로노이 모서리의 플립 여부를 판단하는 근거가 된다. 이러한 이유로, 보로노이 꼭지점의 위치를 계산하는 것은 제시한 알고리즘의 위상 부분과 매우 밀접한 관계를 가진다.

원 집합 보로노이 다이어그램에서 보로노이 꼭지점의 위치의 계산은 세 원이 주어졌을 때 동시에 외접하는 원을 구하는 문제와 정확히 일치한다. 그리고 이는 아폴로니우스의 10번째 문제로 잘 알려져 있다<sup>[1-3,21]</sup>. 공통 외접원의 중심점은 쉽게 생각해서 두 쌍곡선의 교점을 계산함으로써 구할 수 있다. 이는 사차 방정식을 해를 구하는 과정을 포함하며, 이는 Ferrari 공식을 이용하거나 수치적 과정을 통해서 해를 구할 수 있다<sup>[4]</sup>. 그러나 위의 방법은 매우 복잡하며 수치적으로도 불안정한 것으로 밝혀졌다. 한 예로 Mathematica를 이용하여 두 쌍곡선의 교점을 symbolic 연산으로 구한 결과 대략 75,000줄의 C 코드를 얻을 수 있었다.

이 문제는 B.C. 2세기 경의 수학자 아폴로니우스에 의해 처음 제기 되었고 지금까지 아폴로니우스의 10번째 문제로 알려지고 있다. 이 문제는 유클리드 공간에서는 매우 복잡한 것으로 보이지만, 복소 공간을 이용하면 다소 쉽게 해결할 수 있는 것으로 나타났다. 복소 공간에서의 뫼비우스 변환은(Möbius transformation 또는 linear fractional transformation) 원을 직선으로 또는 그 역으로 변환하는 것으로 알려져있다<sup>[8]</sup>. 뫼비우스 변환을 통하여, 세 원의 공통 외접원을 구하는 문제를 두 원의 점선을 구하는 문제로 변환할 수 있다. 이 방법은 두 쌍곡선의 교점을 구하는 것 보다 더 간단한 것으로 밝혀졌다.

원 집합 보로노이 다이어그램의 모서리는 직선 또는 쌍곡선의 형태이다<sup>[8,13,19]</sup>. 두 원의 반지름이 같을 경우 선분이 되고, 그 외의 경우는 쌍곡선이 된다. Persson과 Held는 모서리의 식을 제너레이터들의 음색 요소의 교점 방정식을 풀어서 매개변수 곡선식으로 표현하였다<sup>[10-11,22]</sup>. 그들은 직선과 쌍곡선을 서로 다른 형태로 표현하였다. 이와는 다르게, Kim은 유리 이차 Bezier를 이용함으로써 직선, 포물선, 쌍곡선, 타원 등의 표현을 하나의 형태로 표현하였다<sup>[13]</sup>. 이를 통하여 모서리의 기하 정보를 다루는 음색팅 등의 응용을 더욱 단순화하여 쉽게 만들 수 있다<sup>[14]</sup>.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 다음 절에서는 알고리즘을 설명하는 데 필요한 몇몇의 용어와 가정들이 제시되어 있다. 그리고, 보로노이 꼭지점들을 계산하는 방법을 설명한다. 다음 절에는, 유리 이차 Bezier의 형태를 이용하여 모서리의 식을 계산하

는 방법을 제시한다. 그리고나서, 구현과 실험 결과를 설명한다.

## 2. 용 어

이 절에서는 알고리즘 설명의 편의상 필요한 몇몇의 용어를 제시하였다.  $P=\{p_i | i=1,2,\dots,n\}$ 는 원  $c_i$ 의 중심점  $p_i$ 의 집합을 나타내며,  $C=\{c_i | i=1,2,\dots,n\}$ 는  $r_i$ 를 원  $c_i$ 의 반지름이라 할 때  $c_i=(p_i, r_i)$ 의 집합을 나타낸다.  $VD(P)$ 와  $VD(C)$ 는 각각 점 집합과 원 집합의 보로노이 다이어그램을 나타낸다. 설명의 편의상 모서리와 꼭지점은 다른 언급이 없는 한 각각 보로노이 모서리와 보로노이 꼭지점을 나타낸다. 각 모서리  $e_i$ 에 대해  $e_i$ 는  $e_i$ 를 플립했을 때의 결과를 나타낸다.  $CC$ 는 꼭지점  $v_i$ 에서의 세 원에 대한 외접원을 나타낸다.

설명 편의를 위해 입력 데이터에 대한 몇 가지 가정을 두었으며 이들은 특별한 어려움 없이 일반화시킬 수 있다. 첫번째 가정은 *non-degenerate point set assumption*이라 부르며,  $VD(P)$ 의 모든 꼭지점의 차수는 3이란 것을 의미한다. 두 번째 가정은 *non-degenerate circle set assumption*이라 부르는데, 이는  $VD(C)$ 의 모든 꼭지점의 차수 또한 3이란 것을 의미한다. 한 원이 다른 한 원에 완전히 포함되는 경우는 존재하지 않는다고 가정하고, 이는 *non-inclusion assumption*이라 부른다. 또한 거리는 유클리드  $L_2$ -metric을 적용하였다. 그리고,  $VD(P)$ 와  $VD(C)$ 의 자료구조는 winged-edge 또는 half-edge 자료 구조를 사용하는 것으로 가정하였다<sup>[20,23]</sup>.

## 3. 꼭지점의 좌표값

세 개의 원이 주어졌다. 그러면 Fig. 1에서와 같이 주어진 원에 동시에 접하는 원이 최대 8개 존재한다. Fig. 1에서 음영된 원들은 제너레이터 원이고 흰색 원은 접하는 원들이다. Fig. 1(a)-(d)는 각각 하나의 외접원, 하나의 원에만 내접하는 세 개의 접원,

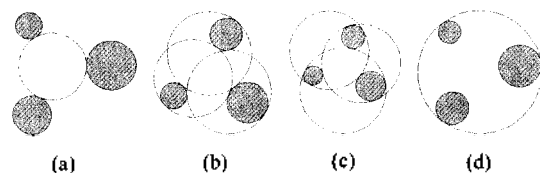


Fig. 1. Circles simultaneously tangent to three generator circles shown as shaded ones.

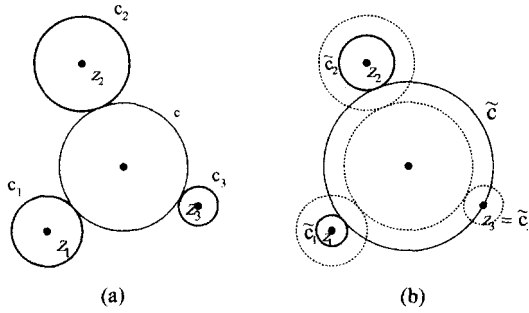


Fig. 2. Shrunk generator circles and inflated circumcircle.

하나의 원에만 외접하는 세 개의 점원, 세 원에 내접하는 원을 보여주고 있다. 이들 점원들 중에서, 우리가 원하는 원은 첫번째 경우인 동시에 외접하는 원이다.

그러나, 주어진 원들에 대해 외접원이 존재하지 않는 경우, 하나의 외접원이 존재하는 경우, 두 개의 외접원이 존재하는 경우가 있다(이전 논문의 Fig. 4 참고). 그리하여, 원들이 주어졌을 때 쉽고 빠르게 외접원의 존재를 찾는 것과 존재할 경우 외접원을 찾는 것이 우리의 문제가 된다.

3.1 외비우스 변환

제너레이터가 놓여있는 공간이 복소 공간이라고 하자, 즉 유클리드 공간의 한 점  $(x, y)$ 가 복소수  $z=x+iy$ 가 된다. 또한, Fig. 2에서와 같이 중심점이  $(x_i, y_i)$ 이고 반지름이  $r_i \ge 0$ 인 제너레이터 원을  $c_i=(z_i, r_i)$ ,  $i=1, 2, 3$ 이라고 하자.  $r_3 \le r_1$ 이고  $r_3 \le r_2$ 이라 가정하자. 위의 원들의 반지름을  $r_3$ 만큼 뺀 원을  $\tilde{c}_i=(z_i, r_i-r_3)$ ,  $i=1, 2, 3$ 으로 놓는다. 그러면  $c_3$ 는 한 점  $z_3$ 가 된다. 이렇게 한 후, 만약 한 점  $z_3=\tilde{c}_3$ 를 지나고 두 원  $\tilde{c}_1$ 과  $\tilde{c}_2$ 에 접하는 원을 찾을 수 있다면, 세 원  $c_1, c_2, c_3$ 에 동시에 접하는 원  $c$ 를 단순히  $\tilde{c}$ 의 반지름에서  $r_3$ 만큼 뺀으로써 쉽게 구할 수 있다.

Conformal 매핑은 방향성 있는 곡선 사이의 각을 보존하는 것으로 알려져있다. 여러 종류의 conformal 매핑 중 다음과 같이 정의되는 외비우스 변환에 대해서 살펴보자.

$$W(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

$ad-bc \neq 0$ 이고,  $a, b, c, d$ 는 복소수 또는 실수이다. 식 (1)은 Z평면의 원과 직선을 W평면의 원 또는 직선으로 매핑한다. 외비우스 변환의 여러 가지 형

태 중 다음과 같은 형태의 변환을 살펴보자.

$$W(z) = \frac{1}{z-z_0} \tag{2}$$

식 (2)에 주어진 변환은 다음의 특성을 가지는 것으로 알려져 있으며, 여기에서는 논의의 편의상 증명 없이 언급하였다.

특성 1. Z평면의  $z_0$ 를 지나는 직선과 원들은 W평면에서 직선으로 매핑하며, 그 역도 성립한다.

특성 2. Z평면의  $z_0$ 를 지나지 않는 원과 직선들은 W평면에서 원으로 매핑되며, 그 역도 성립한다.

특성 3. Z평면의 무한대에 위치한 점은 W평면의 원점으로 매핑되며, 그 역도 성립한다.

그리하여, Fig. 3에서와 같이 매핑 함수  $W(z)=1/(z-z_3)$ 는 만약  $z_3$ 가  $\tilde{c}_1$  또는  $\tilde{c}_2$  상에 놓여있지 않다면 Z평면의  $\tilde{c}$ 를 W평면에서 각각  $W_1$ 과  $W_2$ 로 매핑한다. 그래서,  $\tilde{c}_1$ 과  $\tilde{c}_2$ 에 접하는 구하고자 하는 원  $\tilde{c}$ 는 W평면에서 두 원에 접하는 직선  $L$ 로 매핑될 것이다.

또 한가지 주목해야 하는 사실은 Z평면에서 무한대의 점과 원  $\tilde{c}$ 의 외부에 위치하는 점은 모두 외접원  $\tilde{c}$ 의 외부에 존재한다는 것이다. 그리하여, 위에 살펴본 특성들에 의해 Z평면에서  $\tilde{c}$ 의 외부에 있던 점은 W평면에서 원점  $O$ 와 직선  $L$ 에 대해서 같은 쪽에 존재하게 된다. 사실, 원점과 매핑된 점이 직선  $L$ 에 대해서 같은 쪽에 있어야 원  $\tilde{c}$ 가 외접원이 된다. 변환  $W(z)$ 의 conformal 특성 때문에, Z평면에서  $\tilde{c}_1$ 과  $\tilde{c}_2$ 에 접하는 원인  $\tilde{c}$ 는 W평면에서 두 원  $W_1$ 과  $W_2$ 에 접하는 직선으로 매핑 된다.

변환  $W(z)$ 는 Z평면의 원  $\tilde{c}_i=(z_i, r_i-r_3)$ 를 W평면에서  $W_i$ ,  $i=1,2$ 로 변환하는 것으로 밝혀졌으며, 식은 아래와 같다.

$$p_i = (x_i-x_3)^2 + (y_i-y_3)^2 - (r_i-r_3)^2 \text{ 일때,}$$

$$W_i = \left\{ \left( \frac{x_i-x_3}{p_i}, \frac{y_i-y_3}{p_i} \right), \frac{r_i-r_3}{p_i} \right\} \tag{3}$$

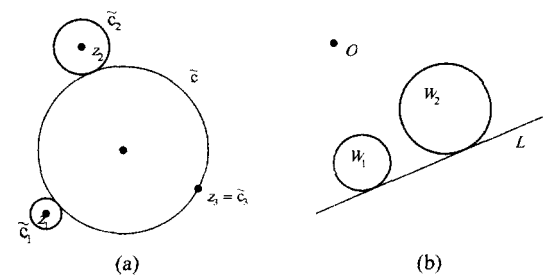


Fig. 3. Möbius transformation  $W=W(z)=1/(z-z_3)$ . (a) Z-plane, and (b) W-plane.

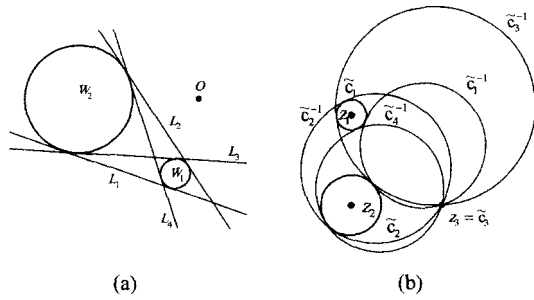


Fig. 4. Inverse mapping  $Z=Z(w)=1/w+z_3$  which maps from the  $W$ -plane to the  $Z$ -plane. (a)  $W$ -plane and (b)  $Z$ -plane.

$W(z)$ 와 비슷한 방식으로 역 변환 또한 아래와 같이 제시할 수 있다.

$$Z(w) = \frac{1}{w} + z_3 \quad (4)$$

식 (4) 또한 conformal 매핑이며,  $W$ -평면에서 원 점을 지나지 않는 직선은  $Z$ -평면에서 원으로 매핑한다.  $W$ -평면에서의 직선을  $au+bv+1=0$ 이라 가정하면,  $Z$ -평면으로 역변환된 원은 중심점  $(-\frac{a}{2}+x_3, \frac{b}{2}+y_3)$  이고, 반지름은  $\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2}$  이 된다.

3.2 여러 개의 접원 중 내접원 구하기

Fig. 4(a)에서와 같이,  $W$ -평면에서의 두 원  $W_1$ 과  $W_2$ 가 주어졌을 때, 두 원에 동시에 접하는 직선은 네 가지가 있다. Fig. 4(a)의 검정색 점을  $W$ -평면에서의 원점이라고 하자. 그러면, 직선  $L_1$ 은 Fig. 4(b)와 같이  $Z$ -평면에서 원  $\tilde{C}_1^{-1}$ 로 매핑된다. 이는 원  $W_1$ 과  $W_2$ 와 원점  $O$ 가 직선  $L_1$ 에 대해 같은 쪽에 위치해 있기 때문에 동시에 외접하는 원으로 매핑되었다. 이와 비슷하게, 직선  $L_2$ 는 두 원이  $Z$ -평면에서의 무한대와 반대편에 있기 때문에 공통 내접원인  $\tilde{C}_2^{-1}$ 로 매핑된다. 직선  $L_3$ 과  $L_4$ 는 이와는 약간 차이가 있는데, 이는 원 하나는 같은 쪽에 위치해 있고, 나머지 하나는 다른 쪽에 위치해 있어서 한 원에 대해서는 외접하고, 또 다른 한 원에 대해서는 내접한다. 그리하여, 직선  $L_3$ 과  $L_4$ 는 각각  $\tilde{C}_3^{-1}$ 와  $\tilde{C}_4^{-1}$ 로 매핑된다.

그리하여, 매핑 되었을 때 외접원이 되는  $W$ -평면에서의 직선  $L$ 은 하나 또는 두 개의 바깥쪽에 접하는 직선인  $L_1$  또는  $L_2$ 가 된다. 이러한 이유로, 주어진 두 원의 접원을 찾는 문제는 다시 두 원의 exterior 접선을 찾는 문제로 좁혀졌다.

두 접선  $L_1$ 과  $L_2$ 중에 두 원  $W_1$ 과  $W_2$ , 그리고 원 점  $O$ 가 각 직선에 대해서 같은 반평면에 속하게 되

는 직선이  $Z$ -평면에서 외접원으로 매핑된다. 이러한 외접원이 존재하지 않을 수도 있고, 하나 또는 두 개가 존재할 수도 있다.

3.3 W-공간에서의 Point location 문제

먼저 외부 접선  $L_1$ 과  $L_2$ 가 주어졌을 때,  $W_1, W_2, O$ 가 접선에 대해서 같은 영역에 속하는지 아닌지를 판단하는 것은 계산의 측면에서 보면 그리 어렵지 않다. 그러나, 어떠한 직선이 외접원이 될지, 그리고 외접원이 존재하는지의 판단이 바로 되는 것은 아니다. 그래서, 외접원이 존재하는지, 몇 개가 존재하는지, 그리고 어떠한 접선이 외접원으로 매핑이 될 것 인지를 판단할 필요가 있다. 이러한 여러 상황들을 몇 개의 경우로 구분할 수 있었다.

Fig. 5(a) 처럼 두 원  $W_1$ 과  $W_2$ 가 주어졌다고 가정 하자. 여기서는  $W_1$ 과  $W_2$ 의 반지름은 다르며,  $O$ 이 아

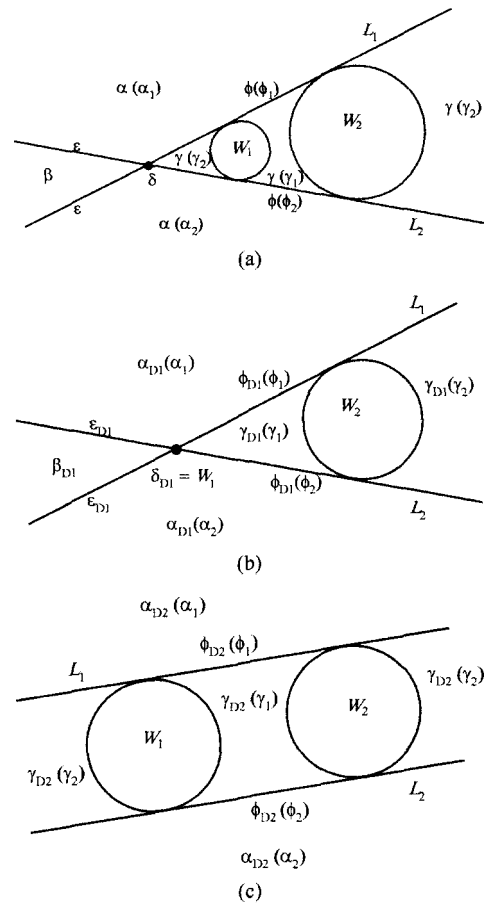


Fig. 5. Configurations of circles in the  $W$ -plane and regions defined by two exterior tangent lines  $L_1$  and  $L_2$ .

니라고 하자.  $L_1$  and  $L_2$ 는 외부 접선이다. “+” 연산을 다음과 같이 정의하겠다.  $L_i^+$ 는  $L_i$ 에 의해 정의되는  $W_1$ 과  $W_2$ 를 포함하는 반평면이라 하자. 이와 비슷하게,  $L_i^-$ 는  $L_i^+$ 와는 반대쪽 반평면이다. 그리고 이 두 영역 모두  $L_i$ 를 포함하지 않는다. 그러면,  $W$ 평면은 아래와 같이 6개의 분리된 영역으로 나누어진다.

$$\alpha = (L_1^+ \cap L_2^-) \cup (L_1^- \cap L_2^+)$$

$$\beta = L_1 \cap L_2$$

$$\gamma = L_1^+ \cap L_2^+ \quad \delta = L_1 \cap L_2$$

$$\epsilon = (L_1 \cap L_2^-) \cup (L_1^- \cap L_2)$$

$$\phi = (L_1 \cap L_2^+) \cup (L_1^+ \cap L_2)$$

영역  $\alpha$ 가  $\alpha_1 = (L_1 \cap L_2^+)$ 과  $\alpha_2 = (L_1^+ \cap L_2)$ 로 나뉜다고 하자. 참고로 원점  $O$ 는  $W_1$ 과  $W_2$ 의 내부 및 원호 상에 놓일 수 없다. (즉,  $O \notin (W_1 \cup W_2)$ 이다.) 또한 영역  $\gamma$ 는 세 개의 영역으로 구성되어 있다. 일단  $W$ 평면의 영역이 나누어지면, 외접원을 찾는 문제는 소위 point location 문제로 축소된다.

그러면, 가능한 경우들이 아래와 같이 분류되어 있다(Fig. 6참조). Fig. 5에서의 영역에 원점이 있는 각각의 경우가 Fig. 6에 그려져 있다. 점선으로 표현된 원은 내접원을 나타내는 것이고, 실선으로 그려진 원은 우리가 원하는 외접원이다. 참고로, Fig. 6에서 제너레이터 원들은  $Z$ 평면에서 축소된 원이다. 점정색 점은 반지름이 0인 제너레이터 원을 나타낸다. 참고로 이러한 경우는 두 개의 반지름이 작은 제너레이터 원의 반지름은 동일하지 않을 때 발생한다.

•영역  $\alpha$ :  $O \in \alpha_i$ 이라 가정하자. 그러면, 직선  $L_1$ 은  $Z$ 평면에서  $\tilde{c}_1$ 로 매핑되며, 원점과  $W$ 평면에서의 두 원이 서로 다른 영역에 위치해 있기 때문에 두 원  $\tilde{c}_1$ 과  $\tilde{c}_2$ 를 내접하며, 그림에서는 점선으로 표시하였다. 이와는 반대로,  $L_2$ 는  $\tilde{c}_1$ 과  $\tilde{c}_2$ 에 외접하는 외접원  $\tilde{c}_2'$ 로 매핑되며, 그림에서는 실선으로 표시하였다. Fig. 6( $\alpha_1$ )가 이러한 경우이다. 참고로  $W$ 평면에서의 두 접선은  $\delta$ 에서 서로 교차하며 conformal 특성 때문에  $Z$ 평면에서도  $\delta'$ 에서 서로 교차한다.

•영역  $\beta$ : 원점이  $\beta$ 영역에 놓이게 되면 두 원  $W_1$ 과  $W_2$ 는 두 접선에 대해 원점과 서로 반대 방향에 놓이게 되며, 그렇기 때문에 외접원이 존재하지 않게 된다. Fig. 6( $\beta$ )가 이러한 경우를 나타낸다.

•영역  $\gamma$ : 원점이  $\gamma$ 영역에 놓이게 되면 두 원  $W_1$ 과  $W_2$ 는 두 접선에 대해 원점과 같은 평면에 놓이게 된다. 그리하여, 두 접선  $L_1$ 과  $L_2$  모두 외접원으로 매

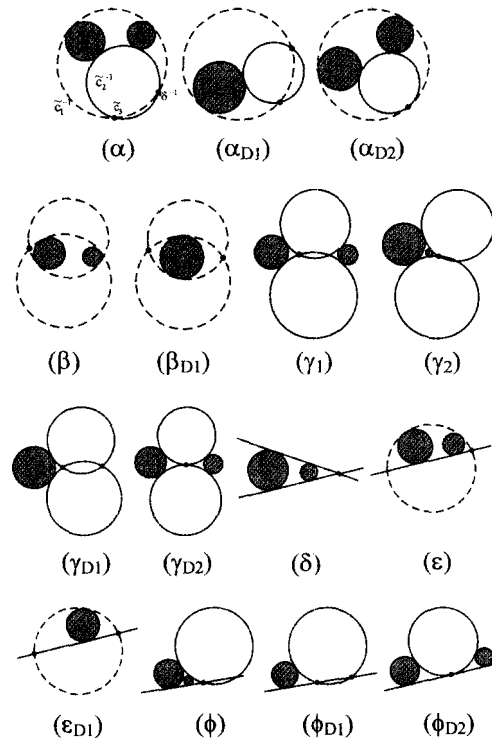


Fig. 6. Inverse mappings from the  $W$ -plane to the  $Z$ -plane.

핑하게 된다.

•영역  $\delta$ : 원점이 정확히  $\delta$ 에 놓이게 되면  $Z$ 평면으로의 변환은  $W$ 평면에서의와 비슷한 모양으로 발생한다.

원점을 지나는 직선은 매핑될 평면에서도 직선이 되며, 서로 접한 모양이 되기 때문이다. Fig. 6( $\delta$ )에 이 경우를 나타내었다.

•영역  $\epsilon$ : 원점이 정확하게 반직선  $\epsilon$ 위에 놓이게 되면 그 직선은  $Z$ 평면에서 직선으로 매핑되며, 나머지 한 직선은 그 직선에 대해 원점과 두 원이 반대 영역에 속해 있기 때문에 내접원으로 매핑된다. Fig. 6( $\epsilon$ )와 같은 결과가 된다.

•영역  $\phi$ : 원점이  $\phi$ 에 정확히 위치하게 된다면 원점을 지나는 직선은 직선으로 매핑이 되고 나머지 한 직선은 그 직선에 대해 원점과 두 원이 같은 영역에 속해 있기 때문에 외접원으로 매핑된다. Fig. 6( $\phi$ )와 같은 결과가 된다.

그러나,  $Z$ 평면에서 제너레이터의 형태에 따라 위의 경우들이 약간씩 변하게 된다. Fig. 5(b)는 작은 반지름을 가진 두 원의 반지름이 같을 경우의 그림이고, Fig. 5(c)는  $W$ 평면에서 두 원의 반지름이 같

을 경우의 예이다. 각각의 경우에 따라 몇몇 영역이 존재하지 않게 될 수도 있지만 위의 일반적인 경우와 같은 방식으로 쉽게 결과를 예측할 수 있다. 이 논문에서는 자세한 설명은 생략하고 Fig. 6에 결과를 제시하였다.

앞에서 설명한 경우들은  $L_1$ 과  $L_2$ 가 동일하지 않다는 가정하에서의 예이다. (즉,  $L_1 \neq L_2$ ) 그러나,  $L_1$ 과  $L_2$ 가 동일한 경우도 발생한다. 세개의 주어진 제너레이터 원의 반지름이 모두 동일하다면,  $W_1$ 과  $W_2$  모두 점이 된다. 그래서 직선  $L_1$ 과  $L_2$ 가 동일한 직선이 되는 것이다. (즉,  $L_1 \equiv L_2$ )

#### 4. 모서리의 곡선식

꼭지점 기하요소, 즉 보로노이 꼭지점 위치의 계산은 점 집합 보로노이 다이어그램으로부터 원 집합 보로노이 다이어그램으로 위상 정보를 수정하는 중간 중간에 발생한다. 일단 원집합 보로노이 다이어그램의 정확한 위상을 구했다면, 이제 보로노이 모서리의 기하요소를 수정해야 한다.

보로노이 모서리의 기하 정보는 두 제너레이터 사이의 bisector인 것으로 알려져있다. 우리의 경우 bisector는 직선이거나 쌍곡선의 부분이다. 직선 bisector는 두 제너레이터 원의 반지름이 동일할 경우 발생하며, 쌍곡선 bisector는 두 원의 반지름이 서로 다를 경우 발생한다.

여러 종류의 bisector 표현법이 존재한다. Persson과 Held<sup>[10-11,22]</sup>가 제시한 표현법과, Kim<sup>[13]</sup>이 제시한 표현법을 주목할 필요가 있다. Persson과 Held는 모서리의 식을 제너레이터의 옵션 원소의 교차 식을 풀어서 매개변수 곡선식으로 표현하였다. 그들의 표현법은, 직선과 쌍곡선을 서로 다른 형태로 표현하였다. 게다가, 모서리의 식을 표현하는 데 약간의 예외가 존재한다. 이와 반대로, Kim은 모서리를 표현하는데 유리 이차 Bézier 곡선식을 이용하였다<sup>[13]</sup>. 이 표현법은 CAD/CAM분야에서 많이 사용되고 있으며<sup>[17]</sup>, bisector의 종류가 예를 들어 직선, 쌍곡선, 포물선, 타원인지에 상관 없이 하나의 통합된 형태로 표현할 수 있다. 그리하여, 이 표현법은 옵션팅<sup>[14]</sup>같은 응용을 단순화 시킬 수 있다. 그래서, 우리는 모서리를 유리 이차 Bézier로 표현하였다.

##### 4.1 유리 2차 Bézier로의 표현법

원 집합 보로노이 다이어그램의 모서리는 쌍곡선이거나 직선이다. 그리고 원추 곡선은 아래에 정의

되어 있는 유리 이차 Bézier 곡선의 형태로 변환시킬 수 있다는 것도 알고 있다.

$$\beta_1 = \frac{w_0(1-t)^2 \mathbf{b}_0 + 2w_1 t(1-t) \mathbf{b}_1 + w_2 t^2 \mathbf{b}_2}{w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2} \quad t \in [0, 1] \quad (5)$$

$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 는 조정점이며,  $w_0, w_1, w_2$ 는 각각의 조정점에 대응되는 웨이트이다. 원추 곡선 (즉, 직선, 포물선, 쌍곡선, 타원)은 두 점  $\mathbf{b}_0$ 와  $\mathbf{b}_2$ 가 곡선 위에 있고, 두 접선 벡터가 그 점 위에 있고, 나머지 하나의 곡선 위의 점이 존재하는 경우 유리 이차 Bézier 곡선  $\beta(t)$ 로 변환 할 수 있다는 것은 잘 알려져 있다<sup>[6-7]</sup>.

먼저 조정점들이 찾아졌다면, 각 조정점에 대응되는 가중치를 계산해야 한다. 만약 구하고자 하는 곡선이 표준형이라 가정한다면, 즉,  $w_0=w_2=1$ . 그러면,  $w_1$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$w_1 = \frac{\tau_1}{2\sqrt{\tau_0 \tau_2}} \quad (6)$$

$\tau_0, \tau_1, \tau_2$ 는 점  $\mathbf{p}$ 의 barycentric 좌표이다. 참고로 점  $\mathbf{p}$ 는 bisector 위의 한 점이며, 삼각형  $\Delta \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2$  내부에 있다고 가정하자. 이와 관련된 더 자세한 내용은 다음의 참고문헌에 잘 나와있다<sup>[6-7]</sup>.

##### 4.2 접선 벡터

우리의 문제에서, 보로노이 모서리의 두 꼭지점의 위치는 곡선 양 끝에서의 조정점  $\mathbf{b}_0$ 와  $\mathbf{b}_2$ 의 역할을 하고 있다. 나머지 하나의 조정점  $\mathbf{b}_1$ 을 구하기 위해서 양 끝 조정점  $\mathbf{b}_0$ 와  $\mathbf{b}_2$ 에서 bisector의 접선 벡터가 필요하다. 이는 아래와 같이 쉽게 계산할 수 있다.

Fig. 7(a)에서 보여주듯이,  $r_1 \geq r_2$ 인 두 원  $\mathbf{c}_1=(\mathbf{p}_1, r_1)$ 과  $\mathbf{c}_2=(\mathbf{p}_2, r_2)$ 가 있다고 가정하자.  $\mathbf{v}$ 는 초점  $\mathbf{p}_1$ 과  $\mathbf{p}_2$ 를 가지는 쌍곡선 위의 임의의 한 점이라고 하고 직선

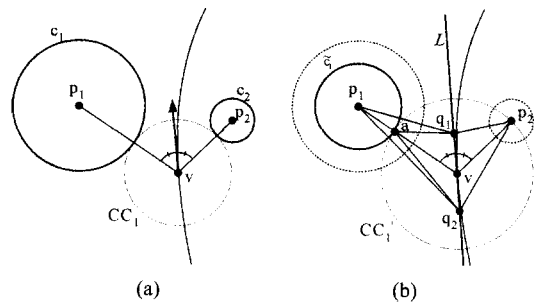


Fig. 7. Tangent vectors on a bisector. (a) bisector for two circles and a tangent vector on it. (b) a tangent line on the bisector at  $\mathbf{v}$ .

$L$ 은  $v$ 에서 각  $\angle p_1vp_2$ 을 이분한다고 하자. 그리고 Fig. 7(b)에서와 같이  $\tilde{c}_1$ 와  $\tilde{c}_2$ 는  $c_1$ 과  $c_2$ 로부터  $r=r_1-r_2>0$ 만큼 반지름이 축소된 원이라고 가정하자. 그러면,  $\tilde{c}_2$ 는 점  $p_2$ 가 되며,  $|v-p_1|-|v-p_2|=r$ 이다. 점  $q$ 를 직선  $L$ 위의 임의의 점이라고 하며,  $q \neq v$ 이다. 그러면,  $|q-p_2|=|q-a|$ 이고  $|q-a|+|p_1-a|>|q-p_1|$ 이므로  $|q-p_1|=|q-p_2|<r$ 가 된다. 그러므로 점  $q$ 는 쌍곡선 bisector 위에 놓일 수 없으며, 직선  $L$ 는 bisector 곡선의 점  $v$ 에서의 접선이 된다.

이러한 이유로, 보로노이 꼭지점  $v$ 에서의 접선 벡터는  $\angle p_1vp_2$ 의 이등분 선으로 쉽게 계산할 수 있다. 또한  $r_1=r_2$ 인 경우는 bisector 곡선이 직선이 되므로 쉽게 구할 수 있다. 참고로 이러한 직선 bisector도 꼭지점  $v$ 에서 각을 이등분한다. 제너레이터가 점이 되더라도 이러한 경우가 예외의 경우가 되지 않는다. 이에 덧붙여, 이러한 관찰은 제너레이터가 서로 교차하더라도 성립한다.

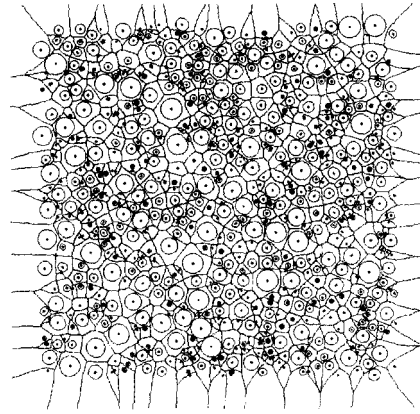
이제 bisector 곡선 위의 점을 어떻게 구하는가 하는 문제가 하나 남아있다. 이 문제는 두 제너레이터 원의 중심점을 지나는 직선 상의 양 제너레이터와 거리가 같은 한 점을 찾음으로써 쉽게 해결할 수 있다. 만일 이렇게 구한 점이 삼각형  $\Delta b_0b_1b_2$ 의 내부에 존재한다면 식 (6)으로 모서리의 식을 구할 수 있다. 이러한 경우 계산한 모서리는 삼각형의 내부에 놓이게 된다.

그러나, 만일 곡선 위의 점이 삼각형  $\Delta b_0b_1b_2$ 의 외부에 존재하게 되었다고 가정하자. 그러한 경우, barycentric 좌표  $\tau_i$ 은 음수가 되며,  $\tau_0$ 과  $\tau_2$ 는 양수가 된다. 식 (6)에 의해  $w_i$ 이 음수가 됨으로, 유리 이차 Bezier의 형태로 구한 곡선은 우리가 원하는 영역에 놓이지 않게 된다. 이러한 경우, 우리가 원하는 곡선은  $w_1$ 을  $w_1$ 의 절댓값으로 취함으로써 쉽게 구할 수 있다<sup>16)</sup>.

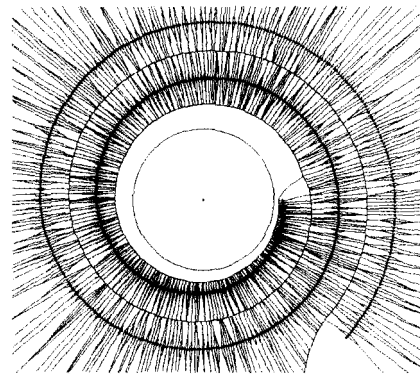
### 5. 실험

원 집합 보로노이 다이어그램을 계산하는 알고리즘을 Intel Celeron 300 MHz 프로세서에서 Microsoft Visual C++로 구현하고 실험하였다. 제시한 알고리즘을 크게 세 개의 모듈로 구현하였다: i) 점 집합의 보로노이 다이어그램 생성 모듈, ii) 메인 모듈인 원 집합의 보로노이 다이어그램 생성 모듈, iii) 데이터 로드 및 저장 모듈, iv) GUI 모듈.

메인 모듈은 다음의 세 가지 모듈로 구성되어 있다: i) 모서리 플립 모듈, ii) 외접원 계산 모듈, iii)



(a)



(b)

Fig. 8. Examples (non-intersecting circle generators).

모서리의 기하정보 (즉, bisector) 계산 모듈. 이들 중 모서리 플립 모듈에는 주어진 모서리의 플립 여부를 판단하고 플립 연산을 수행하는데, 이는 앞의 논문의 주제였다<sup>17)</sup>. 보로노이 꼭지점의 위치를 계산하는 모듈과 보로노이 모서리의 기하 정보를 계산하는 모듈은 본 논문의 주제이다.

Fig. 8은 원 집합 보로노이 다이어그램의 또 다른 예를 보여주고 있다. Fig. 8(a)의 제너레이터 집합은 1,000개의 서로 교차하지 않는 임의의 반지름을 갖는 원들이다. Fig. 8(b)의 경우는 나선 상에 원들의 중심이 위치하고 서로 교차하지 않으며 임의의 반지름을 가지는 800개의 원들과, 나선의 중심부에 큰 반지름을 가지는 제너레이터 원이 있는 경우이다.

Fig. 9는 Fig. 8에서의 제너레이터 집합에 대한 수행 시간을 나타내었다. 수행시간은  $VD(C)$ 와  $VD(P)$  모두 나타내었으며, 각각 동그란 점과, 정사각형 점으로 표시하였다. 참고로 표에서의  $VD(C)$ 를 계산하는 데 걸리는 시간은  $VD(P)$ 를 계산하는 데 걸리는

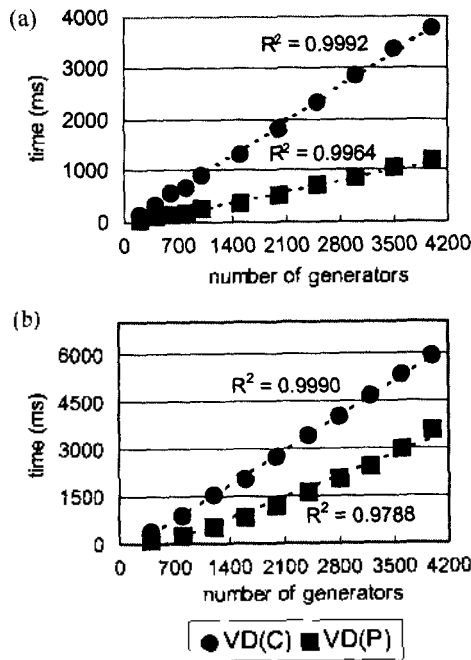


Fig. 9. Computation time behavior of the cases in Fig. 8.

시간을 뺀 시간이다. 그리고 VD(P)를 계산하는 프로그램 코드는 본 논문의 저자들 중 한 명인 Sugihara 홈페이지에서의 코드를 사용하였다<sup>[26]</sup>.

VD(C)와 VD(P)의 계산 시간을 비교함에 있어서, VD(C)를 계산하는 시간이 예상했던 것처럼 많이 걸리지 않는다는 것을 추론할 수 있다. 표에서  $R^2$ 로 나타나 있는 결정계수를 보면(참고로 이는 통계학의 회귀분석 기법에서 쓰인다.) 최악의 경우 수행 시간은  $O(n^2)$ 임에 반해 실험상의 수행 시간은 강력한 선형의 패턴을 보이는 것을 알 수 있다. 우리는 이 외에도 다른 많은 경우들을 실험해 보았는데, 대부분의 경우 이와 비슷한 선형 패턴을 보이는 것으로 나타났다. 이러한 실험을 통해 제시한 알고리즘은 매우 효율적이며 안정적이라고 말할 수 있다.  $O(n^2)$ 인 최악의 경우의 시나리오는 이론적으로는 가능하나, 실제 상황에서는 매우 나타나기 어려운 경우라 판단된다.

### 6. 결 론

이 논문에서는 원 집합 보로노이 다이어그램의 정확한 꼭지점의 좌표와, 모서리의 기하 정보를 계산하는 알고리즘을 제시하였다. 원들은 이차 유클리드

공간에 놓여 있고, 원들의 반지름은 모두 동일할 필요가 없다. 그리고 원들이 서로 교차하는 경우도 허용한다. 제시한 알고리즘은 점 집합 보로노이 다이어그램의 위상으로부터 원 집합 보로노이 다이어그램의 올바른 위상을 얻는 앞의 논문에서 제시한 알고리즘과 결합하였을 때 올바로 수행된다.

올바른 위상을 얻는 중간 과정에 새 제너레이터 원이 주어졌을 때, 하나의 꼭지점의 가능한 위치를 복소 평면에서의 피비우스 변환을 통하여 계산하게 된다. 이 분제는 아폴로니우스의 10번째 문제로도 잘 알려져 있다. 제시한 알고리즘의 계산 시간은 빠르며, 정확한 해를 구하며, 안정적이다.

정확한 위상과 꼭지점의 정확한 좌표가 구해진 후, 보로노이 모서리의 기하 정보를 계산해야 한다. 모서리 곡선 식은 유리 이차 Bézier 곡선의 형태를 적용하였으며, 간단한 몇몇의 연산을 통해 계산되어진다.

우리는 현재 선분과 원호가 포함된 폴리곤의 보로노이 다이어그램을 구하는데 적용할 수 있을 것이라고 생각하고 있다. 그리고, 첫번째 논문에서 제시한 알고리즘의 접근법과 비슷한 방법으로 평면에서의 폴리곤과, 3D에서의 구의 보로노이 다이어그램을 구하는 안정적인 알고리즘으로 확장할 수 있을 것이라고 기대하고 있다.

### 감사의 글

본 연구는 정보통신부의 2000년도 “대학교초연구 지원사업” 지원으로 수행되었으며 지원에 감사 드립니다. 또한 본 논문을 성실하게 심사해 주신 심사 위원님들께 감사 드립니다.

### 참고문헌

1. Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.
2. Courant, R. and Robbins, H., *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, 1996.
3. Dörrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solutions*, Dover, New York, 1965.
4. Drysdale, R. L. and Lee, D. T., Generalized Voronoi diagram in the plane. *Proceedings of the 16th Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing*, pp. 833-842, 1978.
5. Drysdale, R. L., Generalized Voronoi diagrams and geometric searching, Ph.D. Thesis, Department of



Computer Science, Tech. Rep. STAN-CS-79-705, Stanford University, 1979.

6. Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide, 4<sup>th</sup> edition*, Academic Press, San Diego, 1996.
7. Farin, G., *NURBS: From Projective Geometry to Practical Use, 2<sup>nd</sup> edition*, AK Peters, Natick, 1999.
8. Fortune, S., A Sweep-line Algorithm for Voronoi Diagrams, *Algorithmica*, Vol. 2, pp. 153-174, 1987.
9. Hamann, B. and Tsai, P.-Y., A tessellation algorithm for the representation of trimmed NURBS surfaces with arbitrary trimming curves, *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. (6/7), pp. 461-472, 1996.
10. Held, M., On the Computational Geometry of Pocket Machining, *LNCS*, Springer-Verlag, 1991.
11. Held, M., Lukács, G. and Andor, L., Pocket Machining Based on Contour-Parallel Tool Paths Generated by Means of Proximity Maps, *Computer-Aided Design*, Vol. 26, No. 3, pp. 189-203, 1994.
12. Johnson, R. A., *Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*, Houghton Mifflin, Boston, 1929.
13. Kim, D.-S., Hwang, I.-K. and Park, B.-J., Representing the Voronoi diagram of a simple polygon using rational quadratic Bézier curves, *Computer-Aided Design*, Vol. 27, No. 8, pp. 605-614, 1995.
14. Kim, D.-S., Polygon offsetting using a Voronoi diagram and two stacks, *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 14, pp. 1069-1076, 1998.
15. Kim, D.-S., Lee, S.-W. and Shin, H., A cocktail algorithm for planar Bézier curve intersections, *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 13, pp. 1047-1051, 1998.
16. 김덕수, 장태범, 조영송, "유리 Bézier 곡선과 곡면의 호도그래프", 한국 CAD/CAM학회 논문집, 제 3권, 제 2호, pp. 135-139, 1998.
17. 김동욱, 김덕수, 조동수, Sugihara, K., "점 집합의 브로노이 다이어그램과 원 집합의 브로노이 다이어그램의 관계: I. 위상적 측면", (submitted to 한국 CAD/CAM학회 논문집).
18. Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics, 7<sup>th</sup> Edition*, John Wiley & Sons, 1993.
19. Lee, D. T. and Drysdale, R. L., Generalization of Voronoi diagrams in the plane, *SIAM J. COMPUT.*, Vol. 10, No. 1, pp. 73-87, 1981.
20. Mäntylä, M., *An introduction to solid modeling*, Computer Science Press, Rockville, 1988.
21. Okabe, A., Boots, B. and Sugihara, K., *Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagram*, John Wiley & Sons, Chichester, 1992.
22. Persson, H., NC machining of arbitrarily shaped pockets, *Computer-Aided Design*, Vol. 10, No. 3, pp. 169-174, 1978.
23. Preparata, F. P. and Shamos, M. I., *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag, New York,

- 1985.
24. Sharir, M., Intersection and closest-pair problems for a set of planar discs, *SIAM J. COMPUT.*, Vol. 14, No. 2, pp. 448-468, 1985.
25. Sugihara, K., Approximation of generalized Voronoi diagrams by ordinary Voronoi diagrams, *Graphical Models and Image Processing*, Vol. 55, No. 6, pp. 522-531, 1993.
26. Sugihara, K., <http://www.simplex.tu-tokyo.ac.jp/~sugihara/>.



**김 동 욱**

1999년 한양대학교 산업공학과 학사  
 2001년 한양대학교 산업공학과 석사  
 2001년-현재 한양대학교 산업공학과 박사과정  
 관심분야: computational geometry, computer graphics



**김 덕 수**

1982년 한양대학교 산업공학과 학사  
 1985년 New Jersey Institute of Technology 산업공학과 석사  
 1990년 The University of Michigan 산업공학과 박사  
 1989년~1991년 Schlumberger Technology CAD/CAM Co. Senior Software Engineer  
 1991년~1995년 삼성 종합 기술원 선임 연구원  
 1995년-현재 한양대학교 산업공학과 부교수  
 관심분야: geometric modeling, computational geometry, STEP and Internet applications

**조 동 수**

1985년 한양대학교 산업공학과 학사  
 1992년 한양대학교 산업공학과 석사  
 1997년-현재 한양대학교 산업공학과 박사과정(국제 신경영 컨설팅 실장)  
 1984-1992 기아자동차에서 근무  
 관심분야:



**Kokichi Sugihara**

1971년 동경대학교 계수공학과 학사  
 1973년 동경대학교 계수공학과 석사  
 1980년 동경대학교 계수공학과 박사  
 1991년-현재 동경대학교 대학원 계수공학과 교수  
 관심분야: