

# 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어를 위한 안정화 문제 해석

## Stabilization Analysis for Switching-Type Fuzzy-Model-Based Controller

김주원\* · 주영훈\*\* · 박진배\*

Joo-Won Kim, Young-Hoon Joo, and Jin-Bae Park

\* 연세대학교 공과대학 전기전자공학과

\*\* 군산대학교 공과대학 전자정보공학부

### 요약

본 논문에서는 연속 시간과 이산 시간에서의 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기의 새로운 설계 기법에 대해서 논의한다. 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기의 설계에는 Takagi-Sugeno(TS) 퍼지 시스템이 사용된다. 이 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기는 "정복-분할(divide and conquer)"이라는 하향식 접근 방식을 이용한다. 이 방법은 여러 개의 규칙을 가지고 있는 시스템에서 유한의 하위 시스템으로 시스템을 분할하여 각각의 부분 해를 구하고 이들을 결합하여 전체 시스템의 해를 구하는 방법이다. 제어기의 설계 조건은 주어진 TS 퍼지 시스템의 안정화를 보장하는 선형 행렬 부등식들(LMIs)에 의해 결정된다. 적절한 시뮬레이션 예제를 통한 성능 비교를 통해 본 논문의 우수성을 입증한다.

### Abstract

This paper deals with a new design methodology for a switching-type fuzzy-model-based controller in continuous and discrete-time systems. Takagi-Sugeno (TS) fuzzy model is employed to design the switching-type fuzzy-model-based controller. A switching-type fuzzy-model-based controller is constructed based on the spirit of "divide and conquer". The global system which has several rules is divided into several subsystems and then, a solution is found at each subsystem. The global solution is determined by a conjunction of the solutions of each subsystem. The design conditions are formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs), which guarantee the stabilization of a given TS fuzzy system. Simulation examples are included for ensuring the proposed control method.

**Key Words :** Fuzzy-model-based control, switching-type controller, linear matrix inequality,

### 1. 서론

퍼지 논리 제어는 일반적으로 수학적으로 모델링하기 어렵거나 정성적인 제어를 위해 전문가의 경험적 지식이 사용되는 플랜트에 적합하다고 알려져 있다. 즉, 퍼지 제어기는 동역학적 측면에서 불확실하거나 복잡한 시스템에 적합하다고 알려져 있다. 퍼지 논리 제어기는 크게 두 가지로 나뉘어 연구되고 있다. 첫째는 모델 독립(model-free) 제어기 설계이고 다른 하나는 모델 기반(model-based) 제어기 설계이다. 그러나, 퍼지 논리 제어기의 설계는 전문가의 지식을 얻는데 어려움을 가지고 있고 대부분의 경우 정당화 될 수 없는 실험적, 경험적 지식에 상당 부분 의존하고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해, 많은 과학자들은 퍼지 제어 시스템의 체계적인 해석과 개발을 위한 노력에 전념해 오고 있다.

1985년에 Takagi와 Sugeno [1]는 현재 TS 퍼지 모델

이라고 불리우는 새로운 종류의 퍼지 추론 시스템을 제안하였다. 이 모델은 퍼지 규칙의 후반부에 선형 함수를 사용하여, 기존의 개발된 현대 제어 이론을 적용하는데 편리하다고 알려져 있다. TS 퍼지 모델에 기반해서 다양한 종류의 TS 퍼지 모델 기반 제어기가 제안되어 왔다. Takagi와 Sugeno [4]는 비선형 시스템을 입력의 선형함수의 조합으로 후반부를 표현하고, 이를 수질 정화 공정과 스틸 제조 공정의 제어에 적용하였다. Tanaka [9]는 TS 퍼지 모델로 주어지는 시스템의 제어를 위해 안정도 분석과 함께 병렬 분산 보상기(parallel distributed compensator: PDC)를 제안하고, 이를 차량의 제어에 응용하였다. 상기와 같이, 비선형 시스템을 제어하기 위해 다양한 종류의 퍼지 모델 기반 제어기가 제안되었다 [11-14]. 상기 제어기 설계에 대한 연구에서는 전체 시스템의 안정도가 Lyapunov 안정도 해석 기법과 LMI(linear matrix inequality) 방법을 사용하여 정의되었다. 제안된 안정화 조건은 모든 부분적인 선형 모델에서 Lyapunov 함수를 만족하는 공통 양 한정 행렬  $P$  (common positive-definite matrix)가 존재해야 한다. LMI 기반 접근 방식이 공통 양 한정 행렬  $P$ 의 존재를 결정하는데 사용됨에도 불구하고, 퍼지 규칙의 수가 매우 클

접수일자 : 2001년 11월 18일

완료일자 : 2001년 12월 15일

본 연구는 두뇌 한국 21 프로젝트에 의해 일부 지원받았습니다.

때, Lyapunov 함수를 만족시키는 공통 양 한정 행렬  $P$  를 찾는 것은 매우 어려운 일이다. 따라서, 여러 논문에서 퍼지 모델 기반 제어기의 완화된 안정화 조건(relaxed stabilization condition)을 유도해 내는 방법을 제안하였다 [7-9]. 다른 종류의 접근 방식이 에서 제안되었는데, 여기서 그들은 불확실한 선형 시스템 이론을 TS 퍼지 시스템의 안정도를 분석하는데 사용하였다[5-6]. 이것은 또한 퍼지 규칙 사이의 정확하게 결정될 수 없는 상호 관계를 나타내는 상한 경계를 나타낸다.

본 논문에서는 상기에서 제시한 완화된 안정화 방법을 좀 더 완화된 안정화 조건을 만족시키는 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기를 설계하는 것이다. 자세히 말하면, 전체적인 TS 퍼지 시스템을 몇 개의 하위 TS 퍼지 시스템으로 나누고 각각의 하위 TS 퍼지 시스템에서의 안정도를 분석하는 것이다. 이 논문의 결정적인 공헌은 다음과 같이 요약될 수 있다. 전체 규칙 수 보다 크지 않은 퍼지 규칙이 동시에 발화된다면 TS 퍼지 모델은 더 작은 하위 TS 퍼지 모델의 집합들로 나눌 수 있다. 그리고, 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기의 안정도 분석은 PQ(Piecewise Quadratic) Lyapunov 함수에 의해 행해질 수 있다. 최종적으로, 제안된 방법의 장점은 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 입증될 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저, 제 2 장에서는 연속 시간과 이산 시간에서의 TS 퍼지 모델이 소개될 것이다. 또한, PDC(Parallel Distributed Compensation)에 의한 안정도 분석 방법이 설명된다. 제 3 장에서는 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기의 설계에 있어서 안정화 조건이 언급될 것이다. 제 4 장에서는 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기를 설계하고 두 개의 예제로써 제안된 제어 기법의 장점을 설명한다. 마지막으로, 제 5 장에서 본 논문에 대한 간결한 정리로 결론을 짓는다.

## 2. Takagi-Sugeno 퍼지 시스템

### 2.1 연속 시간 및 이산 시간 TS 퍼지 모델

비선형 시스템은 위상 평면의 여러 동작점에서 함수를 선형화함으로써 TS 퍼지 모델로 표현할 수 있다 [1-3]. TS 퍼지 시스템은 퍼지 IF-THEN 규칙의 집합으로 표현되는데, 각 규칙은 상태 공간의 어떤 영역에서는 입출력이 국부적으로 선형으로 표현된다. 전체 시스템은 그러한 국부 선형 모델의 집합이다. 사용된  $i$ 번째 부분 공간에서의 연속 시간 TS 퍼지 시스템은 다음과 같다.

Plant Rule  $i$  :

$$\begin{aligned} \text{If } x_1(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } F_n^i, \\ \text{Then } \dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $F_j^i (j=1, \dots, n, i=1, \dots, r)$ 는 퍼지 집합이며, Rule  $i$ 는  $i$  번째 퍼지 추론 규칙을 나타낸다. TS 퍼지 시스템의 비퍼지화된 출력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

이 때,

$$w_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n F_j^i(x_j(t)), \quad \mu_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))}$$

여기서,  $F_j^i(x_j(t))$ 는  $F_j^i$ 에서  $x_j(t)$ 의 소속 함수의 크기이다.  $w_i(x(t))$ 는 다음과 같은 특성을 가진다.

$$w_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r w_i(x(t)) > 0, \quad i=1, 2, \dots, r.$$

그리고, 다음과 같은 식이 성립된다.

$$\mu_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) = 1, \quad i=1, 2, \dots, r.$$

연속 시간에서의 경우와 마찬가지로 이산 시간 TS 퍼지 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

Plant Rule  $i$  :

$$\begin{aligned} \text{If } x_1(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } F_n^i, \\ \text{Then } x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

이산 시간에서  $t$ 와  $t+1$ 은 시간 간격에서의 인덱스를 나타낸다.

이산 시간에서 비퍼지화된 출력은 다음 식과 같다.

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4)$$

### 2.2 TS 퍼지 시스템의 안정도 해석

본 절에서는 TS 퍼지 시스템의 안정도 해석 방법에 대해 다룬다. TS 퍼지 모델 (1)과 (3)을 위한 전역적인 퍼지 모델 기반 제어기를 설계하기 위하여 본 논문에서는 PDC 기법[4]을 채택한다. 즉, 각 제어기 규칙은 퍼지 모델 규칙에 대응되는 것으로부터 각각 설계된다. 설계된 제어기는 퍼지 모델과 같은 전반부를 갖고, 후반부는 선형 상태 궤환 법칙을 갖는다. 식 (1)과 (3)과 같은 전반부를 사용하면, PDC의  $i$ 번째 제어기 규칙은 다음과 같다.

Controller Rule  $i$  :

$$\begin{aligned} \text{If } x_1(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } F_n^i, \\ \text{Then } u = -K_i x \text{ where } (i=1, \dots, r) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $K_i = [k_1^i, \dots, k_n^i]$ 는 궤환 이득 (feedback gain) 벡터이다. 퍼지 제어기 (5)는 분석적으로는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) (-K_i x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \\ &= - \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) K_i x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

연속 시간과 이산 시간에서의 전체적인 페루프 퍼지 시스템은 식 (2)와 (4), 그리고, (6)을 조합하면 식 (7)과 (8)로 나타낸다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (7)$$

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (8)$$

퍼지 시스템 (7)과 (8)의 전형적인 안정화 조건은 다음과 같다.

<연속 시간 TS 퍼지 시스템>

**정리 1** [2] 연속 시간 퍼지 제어 시스템 (7)의 평형 상태는 다음과 같은 두 개의 부등식을 만족시키는 공통 양행렬  $P$  가 존재하면 전역에서 점근적으로 안정 가능하다.

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P (A_i - B_i K_j) < 0 \quad (9)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad (10)$$

여기서,  $G_{ij} = A_i - B_i K_j$  이다.

<이산 시간 TS 퍼지 시스템>

**정리 2** [2] 이산 시간 퍼지 제어 시스템 (8)의 평형 상태는 다음과 같은 두 개의 부등식을 만족시키는 공통 양행렬  $P$  가 존재하면 전역에서 점근적으로 안정 가능하다.

$$(A_i - B_i K_j)^T P (A_i - B_i K_j) - P < 0 \quad (11)$$

for  $i=1, 2, \dots, r$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P \leq 0, \quad i < j \leq r. \quad (12)$$

여기서,  $G_{ij} = A_i - B_i K_j$  이다.

### 3. 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기

본 장에서는 스위칭 모드 제어 이론을 이용한 새로운 안정도 조건을 제안한다. 여기서, PQ Lyapunov 함수가 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기의 안정도 분석에 사용된다. 설명에 앞서, 다음과 같은 가정을 정의할 필요가 있다.

**가정 1** 모든 시간  $t > 0$  에 대하여 동시에 발화되는 퍼지 규칙의 수  $s$ 는 전체 규칙의 수  $r$ 보다 작다.

이 경우에 우리는 전체 입력 상태 공간에서 순간적으로, 동시에 발화되는 퍼지 규칙의 수  $s$ 를 가지는 하위 상태 공간  $S_l (l=1, 2, \dots, m)$ 를 정의할 수 있다.  $S_l$ 의 특성 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\eta_l(x(t)) = \begin{cases} 1 & x \in S_l \\ 0 & x \notin S_l \end{cases} \quad \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) = 1. \quad (13)$$

#### 3.1 연속 시간 퍼지 시스템의 경우

$S_l$ 의 퍼지 규칙의 인덱스들의 집합을  $I_l$ 로 정의하면 모든 하위 상태 공간에서의 퍼지 시스템 (2)는 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}_l(x(t))x(t) + \bar{B}_l(x(t))u(t) \\ &= \sum_{i \in I_l} \mu(x(t)) A_i(x(t)) + \sum_{i \in I_l} \mu(x(t)) B_i(x(t))u(t), \\ &\text{where } x(t) \in S_l \end{aligned} \quad (14)$$

그러므로, 전체 시스템은 식 (13)과 (14)를 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) (\bar{A}_l(x(t))x(t) + \bar{B}_l(x(t))u(t)) \quad (15)$$

실제로, 시스템 (15)는 더 작은 퍼지 시스템들의 부분적인 선형 조합으로 이루어져 있다. 식 (15)의 결과는 다음과 같은 정리로 요약 가능하다.

**정리 3** 각 하위 시스템이 모든 시간  $t > 0$ 에 대하여 동시에 발화되는 퍼지 규칙의 수  $s$ 가 전체 퍼지 규칙의 수  $r$ 보다 작을 때, 퍼지 시스템 (2)는 부분적인 선형 시변 시스템 (15)로 변환 가능하다.

몇몇의 학자들에 의해 부분 선형 시스템의 안정도 해석에 대한 연구가 진행되었으며[8], PQ Lyapunov 함수는 이 시스템의 안정도 해석에 범용적으로 사용된다. 그러므로, 본 논문에서는 스위칭 모드 퍼지 제어기의 안정도 해석을 위해 퍼지 모델 기반 제어기의 Lyapunov 안정도를 해석하는 PQ Lyapunov 함수를 사용한다. PQ Lyapunov 함수를 사용하기 위해서는 인접의 하위 시스템간의 경계에서 해당되는 PQ Lyapunov 함수가 불연속이기 때문에 Lyapunov 함수가 조심스럽게 다루어져야 한다. 그러므로, 우선 다음과 같은 가정을 필요로 한다.

**가정 2** [5]  $l$ 번째 하위 시스템이  $l$ 번째 상태 공간에 존재한다면, 그 하위 시스템은 일정한 주기  $t$  시간 동안  $l$ 번째 상태 공간에 머물게 된다. 이 때,  $t > \tau, \tau > 0$ 은 고정된 상수 값을 가진다. 그리고, 영역  $S_l$  사이의 순간적인 통과 시간의 크기는 유한하다.

먼저 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어를 나타내기 위해 입력  $u(t) = 0$ 인 시스템을 고려해보면, 다음과 같이 식 (15)의 Lyapunov 안정도를 해석하는 도구로 쓰이는 PQ Lyapunov 함수를 사용한다. 하위 시스템  $S_l$ 에서의 Lyapunov 함수를 다음과 같은  $V_l(t)$ 로 두면,

$$V_l(t) = x(t)^T P_l x(t)$$

전역적인 Lyapunov 함수는 식 (16)과 같은 구조를 지닌다.

$$V(t) = \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) x(t)^T P_l x(t) \quad (16)$$

**보조 정리 1** 퍼지 시스템 (1)이 제어 입력이 없을 때, 다음과 같은 두 개의 부등식을 만족하는 대칭 행렬  $P_l$  이 존재한다면, 퍼지 시스템 (1)은 점차적으로 안정하다.

$$P_l > 0 \quad (17)$$

$$\overline{A}_l(x(t))^T P_l + P_l \overline{A}_l(x(t)) < 0, \quad (18)$$

$(l=1, 2, \dots, m)$

**증명 :** Lyapunov 함수를 (16)과 같이 두자. 그러면, Lyapunov 함수의 시간 미분은

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) \left\{ x(t)^T \left( \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) \overline{A}_l(x(t))^T \right) P_l \right. \\ &\quad \left. + P_l \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) \left( \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) \overline{A}_l(x(t)) \right) x(t) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) x(t)^T \left( \overline{A}_l(x(t))^T P_l + P_l \overline{A}_l(x(t)) \right) x(t) \end{aligned} \quad (19)$$

그러므로 부등식 (17)과 (18)이 만족되면, 식 (19)는 0보다 작게 되어 Lyapunov 안정화 조건을 만족시킨다. 따라서 보조정리 1이 증명된다. -증명끝-

보조정리 1은 Lyapunov 함수와 “정복-분할” 접근 방식을 기반으로 하여 유도되었다. 이것은 각 하위 상태 공간에서의 안정화 조건에 대하여 나타내고 있다. 만약, 제어 입력  $u(t)$ 가 존재한다면 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

**정리 4** 각각의 하위 퍼지 시스템에 다음과 같은 두 개의 부등식을 만족하는 대칭 행렬  $P_l$  이 존재한다면 제어 (5)에 의하여 퍼지 시스템 (1)은 점차적으로 안정 가능하다.

$$P_l > 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &(\overline{A}_l(x(t)) - \overline{B}_l(x(t)) \overline{K}_l)^T P_l + \\ &P_l (\overline{A}_l(x(t)) - \overline{B}_l(x(t)) \overline{K}_l) < 0 \\ &(l=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (21)$$

이 때,

$$\overline{K}_l = \sum_{i \in I_l} \mu_i(x(t)) K_i$$

**증명 :** Lyapunov 함수를 (16)과 같이 두면 페루프 퍼지 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) \overline{A}_l(x(t)) x(t) - \\ &\quad \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) \overline{B}_l(x(t)) \times \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) \overline{K}_l x(t) \\ &= \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) (\overline{A}_l(x(t)) - \overline{B}_l(x(t)) \overline{K}_l) x(t) \end{aligned}$$

따라서, 보조 정리 1을 사용하면 위 정리는 쉽게 증명된다.

정리 4로부터 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\overline{A}_l(x(t)) X_l + X_l \overline{A}_l(x(t))^T - \overline{B}_l(x(t)) M_l - M_l^T \overline{B}_l(x(t))^T < 0, \quad (22)$$

여기서,  $X_l = P_l^{-1}$ ,  $M_l = \overline{K}_l X_l$  이다.

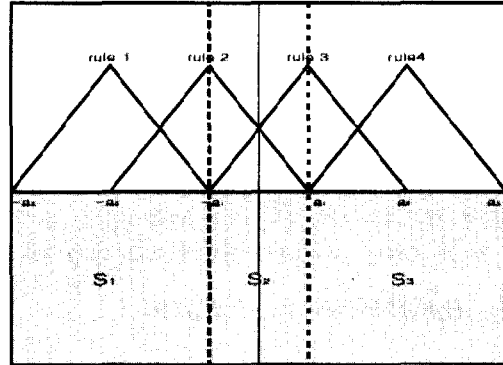


그림 1. 상태공간에서의 퍼지 분할  
Fig. 1 Fuzzy partition of the state space

### 3.2 이산 시간 퍼지 시스템의 경우

이산 시간 퍼지 시스템에서 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기에 의해 제어된 시스템의 안정화 조건은 연속 시간의 경우와 유사하게 유도된다. 또한, 가정 1, 하위 상태 공간  $S_l$ 과 특성 함수  $\eta_l(x(t))$ 이 안정화 조건의 유도에 사용된다. 모든 하위 상태 공간에서 퍼지 시스템 (3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \overline{A}_l(x(t))x(t) + \overline{B}_l(x(t))u(t) \\ &= \sum_{i \in I_l} \mu_i(x(t)) A_i(x(t)) + \sum_{i \in I_l} \mu_i(x(t)) B_i(x(t)) u(t), \end{aligned} \quad (23)$$

이 때,  $x(t) \in S_l$  이다.

그러므로, 전체 시스템은 식 (13)과 (23)을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t+1) = \sum_{l=1}^m \eta_l(x(t)) (\overline{A}_l(x(t))x(t) + \overline{B}_l(x(t))u(t)) \quad (24)$$

식 (24)는 또한 더 작은 하위 퍼지 시스템의 부분적인 선형 조합으로 이루어진다. 식 (24)의 결과는 다음과 같은 정리로 요약 가능하다.

**정리 5** 각 하위 시스템이 모든 시간  $t > 0$ 에 대하여 동시에 발화되는 퍼지 규칙의 수  $s$ 가 전체 퍼지 규칙의 수  $r$ 보다 작을 때, 퍼지 시스템 (4)는 부분적인 선형 시변 시스템 (24)로 변환 가능하다.

$\tau$ 가 시스템 (23)이 하나의 영역  $S_l$ 에서 또 다른 영역  $S_j$  ( $(j=1, 2, \dots, m), j \neq l$ )로 전환하는 순간의 통과 시간이라고 하면, 다음과 같은 가정이 성립될 수 있다.

**가정 3**  $l$  번째 하위 시스템이  $l$  번째 상태 공간에 위치하면, 그 하위 시스템은 일정한 주기의 시간  $t$  동안  $l$  번째 상태 공간에 머물게 될 것이다. 이 때,

$$x(t) \in S_l \text{ at } t = \tau_i \text{ and } x(t) \in S_j, \quad j \neq l, \\ t = \tau_{i+1}$$

그리고, 영역  $S_l$  사이의 순간 통과 시간의 크기는 유한하다.

이산 시간에서의 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어를 나타내기 위해 다시 제어입력이 0 인 퍼지 시스템과 PQ Lyapunov 함수를 사용한다. 그러면, 다음과 같은 보조 정리를 얻을 수 있다.

**보조 정리 2** [6] 퍼지 시스템 (3)의 제어 입력이 0 일 때, 다음 두 부등식을 만족하는 대칭 행렬  $P_l$  이 존재하면 퍼지 시스템 (3)은 점차적으로 안정하다.

$$P_l > 0 \tag{25}$$

$$\bar{A}_l(x(t))^T P_l \bar{A}_l(x(t)) - P_l < 0, \quad (l=1, 2, \dots, m) \tag{26}$$

**증명** : 보조 정리 2의 증명은 보조 정리 1의 증명과 유사한 방법으로 증명이 가능하다.

만약 제어 입력  $u(t)$ 가 존재하면 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

**정리 6** 다음 두 부등식을 만족하는 대칭 행렬  $P_l$  이 존재하면 퍼지 제어기 (5)에 의해 퍼지 시스템 (3)은 점차적으로 안정 가능하다.

$$P_l > 0 \tag{27}$$

$$(\bar{A}_l(x(t)) - \bar{B}_l(x(t)) \bar{K}_l)^T P_l (\bar{A}_l(x(t)) - \bar{B}_l(x(t)) \bar{K}_l) - P_l < 0, \\ (l=1, 2, \dots, m) \tag{28}$$

이 때,  $\bar{K}_l = \sum_{i \in I_l} \mu_i(x(t)) K_i$

**증명** : Lyapunov 함수를 (16)과 같이 두면 페루프 퍼지 시스템은

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^m \eta_i(x(t)) \bar{A}_i(x(t))x(t) - \sum_{i=1}^m \eta_i(x(t)) \bar{B}_i(x(t)) \\ \times \sum_{i=1}^m \eta_i(x(t)) \bar{K}_i x(t) \\ = \sum_{i=1}^m \eta_i(x(t)) (\bar{A}_i(x(t)) - \bar{B}_i(x(t)) \bar{K}_i)x(t)$$

가 되고 보조 정리 2를 사용하면 정리 6은 증명 가능하다.

정리 6의 안정화 조건으로부터 이산 시간에서의 스위칭 모드 제어기의 설계가 가능하다. 다음은 위 정리의 안정화 조건을 선형 행렬 부등식 형태로 정리한 식이다. 변환에는 Schur complement 방법이 사용되었다[10].

$$\begin{bmatrix} X_l & (\bar{A}_l(x(t))X_l - \bar{B}_l(x(t))M_l)^T \\ (\bar{A}_l(x(t))X_l - \bar{B}_l(x(t))M_l) & X_l \end{bmatrix} > 0 \tag{29}$$

이 때,  $X_l = P_l^{-1}$ ,  $M_l = \bar{K}_l X_l$  이다.

식 (22) 와 (29)를 제 2 장에서의 결과 (9), (10)과 (11), (12)와 각각 비교해 보면, 이 장에서 제안된 방법이 훨씬 더 간결함을 알 수 있다. 이것은 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기는 각각의 하위 상태 공간내의 하위 시스템의 안정화 조건을 만족하기만 하면 된다는 것을 의미한다. 그림 1은 네 개의 퍼지 규칙을 가진 시스템의 상태 공간의 분할을 보여준다. 전체 시스템의 상태 공간은 세 개의 하위 시스템의 상태 공간으로 나뉘어 질 수 있다. 각각의 하위 시스템에 대한 제어를 설계할 수 있다. 하위 상태 공간  $S_1$ 은 두 개의 퍼지 규칙(규칙 1과 규칙 2)을 가지고 있다. 따라서, 제어기  $\bar{K}_1$ 은 퍼지 규칙 1과 2에 대응하는 안정화 조건만 만족시키면 된다. 동일한 원리로 각각의 하위 시스템에 대응되는 안정화 조건에 의해 제어기  $\bar{K}_2$ 와  $\bar{K}_3$ 도 결정될 수 있다.

#### 4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

이 장에서는 실제로 3장에서 제시한 안정화 조건을 만족하는 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어를 설계해 보고 제안된 방법의 우수성을 검증해 볼 것이다. 제안된 설계 기법의 효과를 나타내기 위해 다음과 같은 시스템 행렬을 갖는, 즉, 네 개의 퍼지 규칙을 가지는 TS 퍼지 시스템을 채택한다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.75 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어를 설계하기 위해서, 먼저, 전체 시스템의 상태 공간을 세 개의 하위 시스템의 상태 공간으로 나눈다. 그리고, 각각의 하위 상태 공간상의 상태 제환 제어 이득 행렬  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$ 를 결정하는 것이다. 이 각각의 제어 이득 행렬들은 TS 퍼지 시스템의 하위 시스템 내의 각각의 퍼지 규칙들에 대한 안정화 조건을 만족시킬 것이다. 다음으로 연속 시간 TS 퍼지 시스템에 대한 안정화 조건을 만족시키는 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어를 설계한다. 정리 4의 부등식을 만족시키는 제어를 설계하면 그 때의 제어 이득 행렬은 다음과 같다.

$$\bar{K}_1 = [ 1.6720 \quad 0.3924 ], \quad \bar{K}_2 = [ 0.8140 \quad -0.5514 ] \\ \bar{K}_3 = [ 1.0718 \quad -0.3418 ]$$

제환 이득 행렬을 식 (15)에 대입하면, 부등식을 만족시키는 양의 공통 대칭 한정 행렬을 각각 구할 수 있다. 따라서, 정리 4의 안정화 조건에 의하여 스위칭 모드 퍼

지 모델 기반 제어기를 사용하여 TS 퍼지 시스템을 점차적으로 안정화시킬 수 있다. 연속 시간에서 각각의 제어 이득 행렬  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$ 에 대한 양의 공통 대칭 한정 행렬은 다음과 같다.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.0077 & -0.4097 \\ -0.4097 & 0.6366 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.7483 & -0.1799 \\ -0.1799 & 0.6882 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1.3811 & -0.2214 \\ -0.2214 & 0.6982 \end{bmatrix}$$

다음으로, 이산 시간 TS 퍼지 시스템을 위한 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기를 설계해 보면 정리 6의 부등식을 만족하여야 한다. 이 때, 제어 이득 행렬은 다음과 같다.

$$\bar{K}_1 = [-0.0298 \quad 0.9467], \quad \bar{K}_2 = [-0.0502 \quad -0.8247]$$

$$\bar{K}_3 = [-0.0525 \quad 0.7089]$$

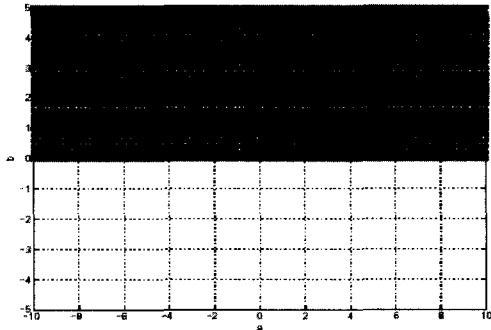


그림 2. 정리 1의 안정도 조건을 위한 가능 영역  
Fig. 2 Feasibility region for the stability conditions of Theorem 1

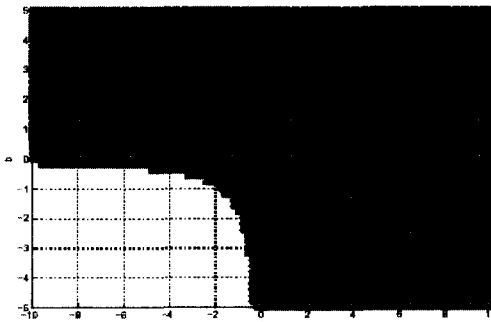


그림 3. 정리 5의 안정도 조건을 위한 가능 영역  
Fig. 3 Feasibility region for the stability conditions of Theorem 5

이 때, 제어 이득 행렬을 식 (24)에 대입하면, 정리 6의 안정화 조건을 만족시키는 세 개의 양의 공통 대칭 한정 행렬을 얻을 수 있다. 이산 시간에서의 양의 공통 대칭 한정 행렬은 다음과 같다.

실제로 연속 시간과 이산 시간 TS 퍼지 시스템에서의 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기의 이득 행렬들은 전체 시스템의 안정도를 보장한다. 또한, 각각의 하위 시스템들의 고유값들은 연속 시간의 경우 상태공간 내의 좌반면에 존재하고, 이산 시간의 경우에는 단위원 내에 존재하게 된다.

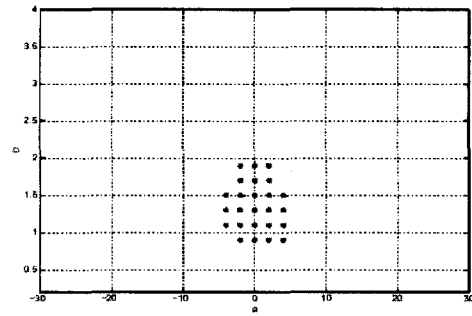


그림 4. 정리 2의 안정도 조건을 위한 가능 영역  
Fig. 4 Feasibility Region of the stability conditions of Theorem 2

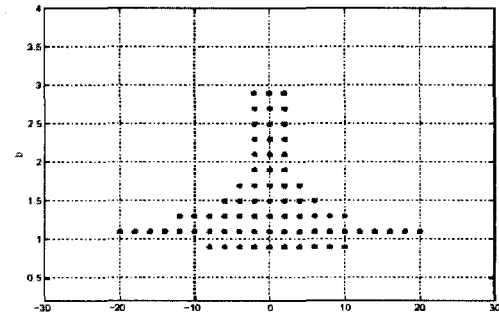


그림 5. 정리 6의 안정도 조건을 위한 가능 영역  
Fig. 5 Feasibility region of the stability conditions of Theorem 6

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.8048 & 0.0246 \\ 0.0246 & 0.3469 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1.3009 & 0.0504 \\ 0.0504 & 0.3223 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 2.7787 & 0.0835 \\ 0.0835 & 0.3023 \end{bmatrix}$$

다음 두 개의 예제로써 본 논문의 이점에 대해 자세히 설명하고자한다. 전체 시스템의 안정화 조건에 관한 완화된 정도를 나타내기 위해 시스템 행렬 내의 행렬 변수  $a, b$ 를 다음과 같이 두었다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.75 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그림 2와 그림 3은 연속 시간에서의 제안된 방법의 안정화 조건의 완화 정도를 나타낸다. 변수  $a, b$ 의 변화에 따른 TS 퍼지 시스템의 안정한 영역을  $a-b$  평면에 나타내었다. 결론적으로 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기에 의해 제어된 연속 시간 TS 퍼지 시스템의 안정한 영역이 PDC에 의한 일반 상태 궤환 제어기에 의해 제어된 TS 퍼지 시스템의 안정한 영역보다 더 넓음을 명백히 알 수 있다.

이와 유사한 방법으로, 이산 시간의 경우에 대해서 동일한 시스템 행렬에 대하여 동일한 실험을 수행해 보면

결과는 그림 4, 그림 5와 같은 결과를 얻을 수 있다. 마찬가지로 점으로 표시된 영역이 안정한 영역이다. 그러므로, 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 연속 시간과 이산 시간에서 제안된 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기에 의한 제어 방법은 주어진 플랜트에서 적절한 제어를 설계할 수 있는 더 높은 가능성을 가지며 각각의 제어가 안정화 조건을 만족 시켜야 하는 퍼지 규칙의 수를 줄일 수가 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서 우리는 연속 시간과 이산 시간 TS 퍼지 시스템을 위한 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어기의 설계 문제를 다루었다. Lyapunov의 관점에서 접근적 안정도를 보장하는 적절한 제어기의 설계하기 위하여, 몇 가지 조건을 유도하였다. 제안된 방법에서 각각의 조건은 각각의 하위 상태 공간에 대응하는 안정화 조건을 나타내는 것이다.

여러 개의 퍼지 규칙을 갖는 복잡한 비선형 시스템이 있다고 할 지라도, 제어기 설계자는 전체 시스템을 몇 개의 하위 시스템으로 나눌 수 있다. 다음으로, 각각의 하위 시스템에 대한 안정화 조건을 만족시키는 제어기를 설계할 수 있다. 이 논문에서는 이 이론을 스위칭 모드 퍼지 모델 기반 제어를 설계하는데 사용하였다. 연속 시간과 이산 시간의 TS 퍼지 제어 시스템 설계를 하는 것은 하위 시스템 집합의 제어기를 설계하는 것으로 분해할 수 있으며 각각의 하위 시스템은 독립적으로 설계될 수 있다. 각각의 부분 해를 결합하여 전체 시스템의 설계 문제를 해결할 수 있다. 이 과정이 바로 "정복-분할"이론에 근거한 접근 방법이다. 본 논문에서 제안된 방법은 특히 TS 퍼지 시스템 내의 퍼지 규칙의 수가 많을 때, 더욱 적합하다. 그 이유는 기존의 이론에 의하면 설계된 제어기가 전체 퍼지 규칙에 대하여 모든 안정화 조건을 만족 시켜야 하는데 반해, 본 논문에서 제안된 방법은 각각의 하위 시스템에서의 안정화 조건을 만족시키는 제어기를 설계함으로써 양의 공통 대칭 한정 행렬을 쉽게 찾을 수 있었고, 보다 완화된 안정화 조건을 갖는 제어기 설계를 가능하게 하였다.

그러나, 본 논문에서는 간단한 시스템 행렬 내에서의 안정화 조건에 대한 이론적인 측면을 다루는데 그친 한계를 가지고 있다. 불확실성을 포함한 모델링하기 어려운 수많은 실제 비선형 시스템에 대한 제안 방법과 관련된 연구가 수행되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics*, vol. SMC-15, no.1, pp. 116-132, Jan./Feb. 1985.
- [2] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 250-265, 1998.
- [3] K. Tanaka and M. Sugeno, "On Design of Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers," in *Proc. 10th Fuzzy Syst. Symp.*, pp. 411-414, 1994.
- [4] H. O. Wang, K. Tanaka and M. Griffin, "Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi and Sugeno's Fuzzy model," in *Proc. FUZZ-IEEE, Yokohama, Japan*, 1995, pp. 531538.
- [5] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Stability analysis and Design for a class of continuous-time fuzzy control systems," *Int. J. Control*, vol. 64, pp. 1069-1087, 1996.
- [6] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Analysis and Design for a class of Complex Control Systems Part II," *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1029-1039, 1997.
- [7] G. Feng, S. G. Cao and N. W. Rees, "An Approach to  $H_{\infty}$  Control of a Class of Nonlinear Systems," *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1469-1474, 1996.
- [8] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 4, pp. 475-482, 1998.
- [9] P. Khargonekar, I. R. Petersen and K. Zhou, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and  $H_{\infty}$  Control Theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, No 3, pp. 356-361, 1990.
- [10] H. J. Lee, J. B. Park and G. Chen, "Robust Fuzzy Control of Nonlinear Systems with parameter Uncertainties," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 369-379, 2001.
- [11] H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, No 1, pp. 14-23, 1996.
- [12] Y. H. Joo, G. Chen and L. S. Shieh, "Hybrid State-Space Fuzzy Model-Based Controller with Dual-Rate Sampling for Digital Control of Chaotic Systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 7, pp. 394-408, 1999.
- [13] W. Chang, Y. H. Joo, J. B. Park, and G. Chen, "Design of Robust Fuzzy-Model-Based Controller with Sliding Mode Control for SISO Nonlinear Systems," *Fuzzy Sets and System*, 2001. To be published.
- [14] G. Feng, "Approaches to Quadratic Stabilization of Uncertain Fuzzy Dynamic Systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 48, no. 6, pp. 760-779, 2001.

저 자 소개



**김주원(Joo-Won Kim)**

1999년 : 연세대학교 전기공학과 졸업.  
2001년~현재 : 동 대학원 전기전자공학과 석사과정

관심분야: TS 퍼지 시스템, 시스템 모델링, 신경회로망, 유전알고리즘

E-mail : joowon@yonsei.ac.kr  
Tel. : +82-2-2123-2773



**주영훈(Young-Hoon Joo)**

1978년 : 연세대학교 전기공학과 졸업.  
1984년 : 연세대 대학원 전기공학과 졸업.  
1995년 : 동 대학원 전기공학과 졸업 (공학박사).

1986~1995년 : 삼성전자(주) 자동화연구소 (선임연구원)

1998~1999년 : 미국 휴스턴대학 전기 및 컴퓨터공학과 Post-doctor.

1995~ 현재 : 군산대 공대 전자정보공학부 부교수.

2000~ 현재 : 한국퍼지 및 지능시스템학회 이사 및 편집 부위원장.

2001~ 현재 : 대한전기학회 제어계측분과 편집위원

관심분야: 퍼지제어, 지능제어, 유전 알고리즘, 신경회로망 지능형 로봇, 인터넷기반 가상 실험실.

E-mail : yhjoo@kunsan.ac.kr  
Tel. : +82-63-469-4706



**박진배(Jin-Bae Park)**

1977년 : 연세대 전기공학과 졸업.

1990년 : Kansas State Univ. 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공학박사)

1990~1991년 : Kansas State Univ. 전기 및 컴퓨터 공학과 조교수.

1998~1999년 : 연세대 창업보육센터장

1998~1999년 : 연세대 연세공학원 (부원장)

1994. 9~ 현재 : 연세대 공과대학 전기전자공학과(교수)

1999년~ 현재 : 대한전기학회 평의원.

1999년~ 현재 : 제어자동화시스템공학회 이사

관심분야: 자동제어, 강인제어, 지능제어. 계측제어, 필터링 이론 및 시스템 동정

E-mail : jbpark@yonsei.ac.kr  
Tel. : +82-2-2123-2773