

論文

패치로 보강된 구형 복합재료 패널의 후좌굴 거동 및 진동 특성해석

이정진*, 염찬홍*, 이인**

Post-buckling Behavior and Vibration Characteristics of Patched Reinforced Spherical Composite Panels

J.J. Lee*, C.H. Yeom*, I. Lee**

ABSTRACT

The finite element method based on the total Lagrangian description of the motion and the Hellinger-Reissner principle with independent strain is applied to investigate the nonlinear behavior and vibration characteristics for patched reinforced laminated spherical panels. The patched elements are formulated using variable thickness at arbitrary point on the reference plane. The cylindrical arc-length method is adopted to obtain a nonlinear solution. The post-buckled vibration is assumed to be small amplitude. The effect of patch in the spherical shell panel is investigated on the nonlinear response and the fundamental vibration characteristics. The present results show that the load-carrying capability can be improved by reinforcing patch. The fundamental frequency of patched panel is lower than that of equivalent shell panel. However, the fundamental frequency of patched panel does not decrease greatly due to the increase of nonlinear geometrical stiffness under loading.

초 록

토탈 라그랑지안 방법과 변형율을 가정한 Hellinger-Reissner 원리에 기초한 유한요소법을 이용하여 패치로 보강된 구형 복합재료 쉘의 후좌굴 거동 및 진동 특성을 살펴보았다. 패치 요소는 따로 다른 유한요소를 사용하지 않고 쉘의 중앙면과 다른 기준점을 잡아 두께 변수를 택하여 정식화를 하였다. 비선형 해법으로 원통형 호-길이법을 적용하였고, 후좌굴 진동은 미소 진폭을 갖는다고 가정하였다. 구형 쉘 패널에서 패치가 비선형 거동 및 진동수에 미치는 영향을 고찰하였고, 그 결과 패치는 하중지지도를 개선시키킨다. 패치로 보강된 패널의 1차 고유진동수는 등가 패널에 비하여 낮으나, 하중을 받는 경우 1차 고유진동수는 급격히 감소하지 않았다.

1. 서 론

패치 형태의 보강 구조물은 항공구조물이나 일반적인 구조물에서 균열을 수리하거나 하중지지도를 증가시키는 보강 구조물로도 사용된다. 스티프너와 같은 보강재로 보강하는 방법이 매우 효과적이거나, 복합재료의 경우 접합면에서의 취약성이 있기 때문에 스킨-스트링거 구조물은 면밀한 공정과 주의가 요망되고 있다. 이에 반해 패치 보강 구조물은 접합면에서의 취약성을 극복할 수 있고, 경제적인

측점에서도 장점이 있다. 따라서 패치 보강 구조물의 연구가 충분히 이루어진다면, 제한하중을 증가시켜 설계요구조건을 만족시킬 수 있다. 매우 얇은 구조물은 후좌굴(post-buckling) 특성을 갖기 때문에 임계하중(critical load)을 높일 수 있지만, 쉘의 경우 스냅핑(snapping)과 같은 불안정한 좌굴 특성을 가질 뿐 만 아니라, 고유진동수가 낮아지고, 진동 폭이 커진다. 따라서 본 연구에서는 비선형 유한요소법을 이용하여 스냅핑과 같은 거동을 완화시키거나 없애는 방안으로 패치 보강 구조물의 정적인 거동과 하중을

* 한국항공우주연구원

** 한국과학기술원, 교신저자(E-mail: inlee@asdl.kaist.ac.kr)

Hellinger-Reissner 원리를 이용하여 범함수 Π_R 를 독립된 변형율과 변위로 나타내면 아래와 같다.

$$\Pi_R = \int_V \{ \mathbf{E}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} \} dV + \mathbf{W}_0 + \int_V \mathbf{U}^T \rho \ddot{\mathbf{U}} dV \quad (5)$$

여기서 \mathbf{E} 는 가정한 변형율 벡터이며, $\bar{\mathbf{E}}$ 는 변위와 관계된 변형율 벡터이다. \mathbf{C} 는 재료의 탄성계수 행렬이며, \mathbf{W}_0 는 외부하중 벡터이며, $\ddot{\mathbf{U}}$ 는 가속도 벡터이며, ρ 는 질량의 밀도이며, V 는 체적을 의미한다.

복합재료 쉘의 해석을 위하여 변위에 관계되는 변형율 $\bar{\mathbf{E}}$ 와 변위와 관계없는 변형율 \mathbf{E} , 그리고 자코비안(Jacobian) 행렬의 디터미넌트(determinant)가 쉘의 두께 방향으로 선형관계를 갖는다고 가정하면 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{E}}_0 + \zeta \bar{\mathbf{E}}_\zeta \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \zeta \mathbf{E}_\zeta \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_0 + \zeta \mathbf{J}_\zeta \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)의 관계를 이용하여 식 (5)를 다시 쓰면

$$\Pi_R = \sum (U_s + U_k + W_0) \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} U_s &= \int \{ \mathbf{E}_0^T \mathbf{C}_A \bar{\mathbf{E}}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^T \mathbf{C}_A \mathbf{E}_0 \} dA_e \\ &+ \int \{ \mathbf{E}_0^T \mathbf{C}_B \bar{\mathbf{E}}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^T \mathbf{C}_B \mathbf{E}_\zeta \} dA_e \\ &+ \int \{ \mathbf{E}_\zeta^T \mathbf{C}_B \bar{\mathbf{E}}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{E}_\zeta^T \mathbf{C}_B \mathbf{E}_0 \} dA_e \\ &+ \int \{ \mathbf{E}_\zeta^T \mathbf{C}_C \bar{\mathbf{E}}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{E}_\zeta^T \mathbf{C}_C \mathbf{E}_\zeta \} dA_e \end{aligned} \quad (8-a)$$

$$\begin{aligned} U_k &= I_1 \int \mathbf{U}_0^T \ddot{\mathbf{U}}_0 dA_e + I_2 \int \mathbf{U}_0^T \ddot{\mathbf{U}}_\zeta dA_e \\ &+ I_2 \int \mathbf{U}_\zeta^T \ddot{\mathbf{U}}_0 dA_e + I_3 \int \mathbf{U}_\zeta^T \ddot{\mathbf{U}}_\zeta dA_e \end{aligned} \quad (8-b)$$

식 (8)에서

$$\begin{aligned} dA_e &= |\mathbf{J}_0| d\xi d\eta \\ C_A(\xi, \eta) &= \int C d\zeta + r \int \zeta C d\zeta \\ C_B(\xi, \eta) &= \int \zeta C d\zeta + r \int \zeta^2 C d\zeta \\ C_C(\xi, \eta) &= \int \zeta^2 C d\zeta + r \int \zeta^3 C d\zeta \\ I_1 &= 2\rho \\ I_2 &= \zeta \left(\frac{2}{3} r - 2\zeta_0 \right) \\ I_3 &= \zeta \left(\frac{2}{3} + 2\zeta_0^2 - \frac{4}{3} r \zeta_0 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

편의를 위하여 아래와 같은 표현식을 도입하면

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_A & \mathbf{C}_B \\ \mathbf{C}_B & \mathbf{C}_C \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{E}} &= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_0 \\ \bar{\mathbf{E}}_\zeta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_\zeta \end{Bmatrix} \\ \mathbf{U} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_\zeta \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)을 이용하여 식 (8)를 다시 쓰면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} U_s &= \int \{ \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{E} \} dA_e \\ U_k &= \int \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{U}} dA_e \end{aligned} \quad (11)$$

중분 형태로 Green 변형율 벡터는 다음과 같이 표현되며,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{E}}^{(n+1)} = \bar{\mathbf{E}}^{(n)} + \Delta \bar{\mathbf{E}} + \Delta \bar{\boldsymbol{\eta}} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(n+1)} = \mathbf{E}^{(n)} + \Delta \mathbf{E} \end{aligned} \quad (12)$$

노달 점에서의 자유도를 5개 ($u, v, w, \theta_1, \theta_2$)를 갖는 변위 벡터 \mathbf{q}_e 는 아래와 같은 형상 함수로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{q}_e \quad (13)$$

\mathbf{q}_e 를 (n+1)- 번째 중분/반복 형태로 표현하면,

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_e^{(n+1)} = \mathbf{q}_e^{(n)} + \Delta \mathbf{q}_e \quad (14)$$

식 (12)와 (13)으로부터 증분 변위와 변형율은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}_e &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}_e \\ \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{B} \Delta \mathbf{q}_e \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 \mathbf{B} 는 변위에 대한 형상 함수의 미분 행렬이다.

식 (12)의 가정된 변형율의 증분 형태는 40개 변형을 변수를 취하여 나타내면 아래와 같은 관계식으로 표현할 수 있다[6].

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P} \Delta \boldsymbol{\alpha} \quad (16)$$

여기서 \mathbf{P} 행렬은 5×40 인 크기를 갖는다.

식 (12)-(16)를 이용하여 $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ 에 대하여 $\delta \Pi_R = 0$ 를 취하면, 다음과 같은 적합 방정식이 도출된다.

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_e + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F}_e \quad (17)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B} dA_e \\ \mathbf{H} &= \int \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} dA_e \\ \mathbf{F}_e &= \int \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{E}}^{(n)} - \mathbf{E}^{(n)}) dA_e \end{aligned} \quad (18)$$

식 (17)을 이용하여, 전체 유한요소 방정식 형태에서 $\Delta \mathbf{q}$ 에 대하여 $\delta \Pi_R = 0$ 를 취하면 선형화된 평형 방정식은 아래와 같다.

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}^{(n+1)} = \Delta \mathbf{Q} \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T &= \mathbf{K} + \mathbf{K}_g \\ \mathbf{K} &= \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \\ \mathbf{K}_g &= \mathbf{S}^{*T} \mathbf{B}_{NL} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{I}} \mathbf{N} \\ \Delta \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_{ex} - \mathbf{Q}^{(n)} - \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F} \\ {}^{(n)}\mathbf{Q} &= \int \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{E}^{(n)} dA \\ W_0 &= \mathbf{Q}_{ex} \Delta \mathbf{q}_e \\ \mathbf{S}^* &= \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{E}^{(n)} \end{aligned} \quad (20)$$

식 (19)에서 \mathbf{K}_T 는 전체 유한요소 방정식의 접선 방향의 강성 행렬이며, \mathbf{M} 은 질량 행렬이고, \mathbf{K}_g 는 기하학적인 비선형 강성 행렬이다.

식 (19)에서 관성이 없는 경우 정적인 비선형 문제가 되며, 본 연구에서는 비선형 해법으로 호-길이(arc-length) 방법을 취하여 스냅-쓰루(snap-through) 거동을 나타내는 하중-변위 평형선도를 구했다. 본 연구에서는 비선형 해의 안정성을 위하여 변위와 회전각에 의한 에너지 놈(norm)의 공차를 1×10^{-4} 이내로 정의하였다.

내부 하중을 받는 셸의 진동 해석을 위하여 평형 상태에서 미소 가진에 의한 진폭이 작다는 가정을 하였다. 이와 같은 가정은 다음과 관계식을 얻는다.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}^{(n+1)} = \ddot{\mathbf{q}}^{(n)} + \Delta \ddot{\mathbf{q}} = \Delta \ddot{\mathbf{q}} \quad (21)$$

또한, $\Delta \mathbf{q}$ 가 단순조화 운동을 한다고 가정하면,

$$\Delta \mathbf{q} = e^{i\omega t} \Delta \mathbf{q} \quad (22)$$

따라서, 내부 하중을 받는 상태의 자유 진동 문제는 아래와 같은 고유치 문제로 표현할 수 있다.

$$(\mathbf{K}_T - \omega^2 \mathbf{M}) \Delta \mathbf{q} = 0 \quad (23)$$

3. 해석 결과 및 검토

3.1 검증 및 비교

본 연구의 유한요소법을 검증하기 위하여 그림 2의 패치가 없는 구형 셸 판넬에 대하여 비선형 정적 거동과 선형 진동 해석을 기존의 해석 결과와 비교하였다. 먼저, 비선형 정적 거동을 비교하기 위하여 $a/b=1$, $a/R=10$ 그리고 $a/h=100$ 이고 모든 변이 단순지지된 복합적층 패넬이 균일한 외압을 받는 예제를 선택하였다. 복합적층 패넬은

[0/90/0/90/0/90/0/90/0] 적층 형태로 구성되었으며, 그 물성치는 Table 1과 같다. 대칭조건을 이용하여 1/4 모델만을 해석 대상으로 하였다. 요소 분할은 3×3과 4×4로 하였고, 기존의 결과와 비교한 해는 Fig. 3에 나타나 있다. 3×3과 4×4의 요소분할에 의한 결과는 거의 차이가 없으며, 참고 문헌 [1]과 [7]의 결과와 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 참고 문헌 [7] 결과는 8×8 요소분할에 의한 결과이다.

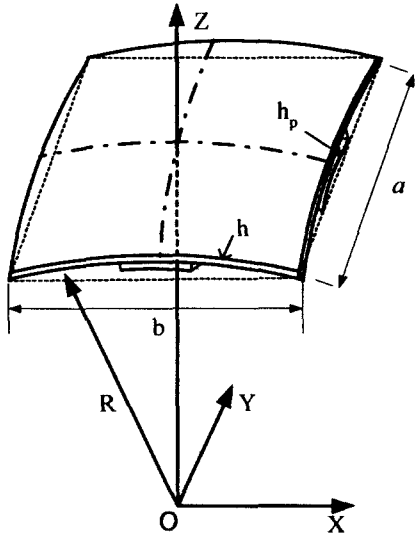


Fig. 2 Configuration of patched spherical panel.

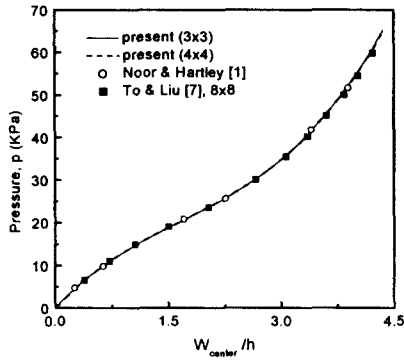


Fig. 3 Nonlinear response of simply supported spherical panel with a/h=100.

Table 1 Material properties

Properties	Values
E ₁	206.85 GPa
E ₂	5.1713 GPa
G ₁₂	3.1028 GPa
G ₁₃	2.5856 GPa
G ₂₃	2.5856 GPa
ν ₁₂	0.25

Table 2 Comparison of non-dimensional frequencies ($\lambda = \omega a \sqrt{\rho/E}$) for simply supported and clamped moderately thick spherical panels ($\nu = 0.3, a/b = 1, a/R = 0.5$)

mode	Clamped condition		
	Present	Exact [8]	Ritz [9]
1	1.7359	1.7454	1.7638
2	2.7972	2.8046	2.8281
3	2.7972	2.8046	2.8281
4	3.7422	3.7546	3.7653
5	3.7422	3.7546	3.7653
6	3.7696	3.7827	3.8062
7	4.2927	4.3091	4.3337
8	4.3567	4.3861	4.4078
9	4.4042	4.4243	4.4359
10	5.0933	5.1212	5.1442

mode	Simply supported		
	Present	Exact [8]	Ritz [9]
1	1.2763	1.2804	1.2900
2	2.3292	2.3301	2.3631
3	2.3292	2.3301	2.3631
4	3.3560	3.3570	3.3846
5	3.7377	3.7493	3.7537
6	3.7377	3.7493	3.7537
7	3.9504	3.9437	3.9755
8	3.9548	3.9566	3.9835
9	4.4039	4.4239	4.4358
10	4.7727	4.7715	4.7975

다음으로 진동 해석을 검증하기 위하여 등방성 재질의 구형 쉘 패널을 검증 예제로 선택하였다. 이 예제는 Reddy[8]에 의해 완전해 (exact solution)가 구해졌으며, Lim 등[9]이 Ritz 방법으로 자유 진동 해석을 수행하였다. 기하학적인 형상은 $a/b=1$ 이고 $a/R=0.5$ 이며, 재료의 포아송비는 0.3이다. Table 2는 $a/h=5$ 인 약간 두꺼운 패널의 경우 단순지지 조건과 고정지지 조건에 대하여 10번째 진동 모드까지의 고유진동수를 나타낸 결과이다. 여기서 요소 분할은 8×8 로 전체 모델에 대하여 수행하였다. 완전해와 Ritz 방법에 의한 결과와 비교할 때 고차 모드의 진동수까지 상당히 일치됨을 알 수 있다.

3.2 패치 패널의 비선형 거동 및 진동해석

Fig. 2의 패치가 없는 구형 패널에서 $a/h=400$ 이고 적층판 구성은 $[0/90]_s$ 이며, Table 1에 주어진 물성치를 갖는 복합재료 패널의 비선형 거동을 살펴보았다. 유한요소 모델은 1/4만을 대상으로 하여 4×4 요소분할을 하였다. 이 패널이 균일한 외압을 받을 때 비선형 거동은 Fig. 4와 같이 스냅-쓰루 현상이 보이고 있다. 약 747 Pa에서 횡방향의 변위가 급격히 증가하는 스냅핑이 발생한다. 이 때의 1차 고유진동수 변화는 Fig. 5에 나타나 있다. 하중을 받음에 따라 고유진동수는 점점 낮아지며, 극점에서 가장 낮은 고유진동수를 가지며, 2개의 극점에서의 고유진동수는 비슷하다. 아랫 극점 이후의 하중에서는 기하학적인 비선형 강성의 증가로 고유진동수는 증가하는 경향을 보이고 있다.

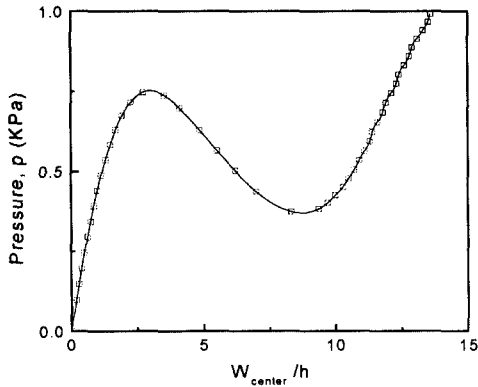


Fig. 4 Nonlinear response of simply supported $[0/90]_s$ spherical unpatched panel with $a/h=400$ under uniform external pressure.

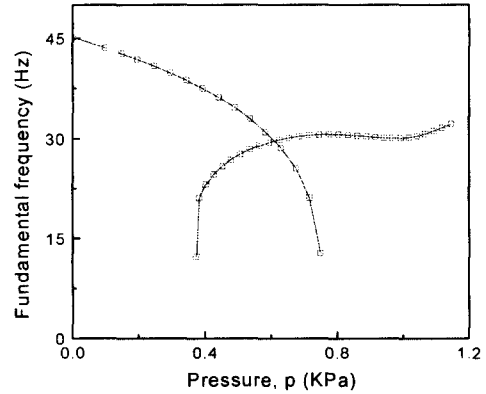


Fig. 5 Fundamental frequency of $[0/90]_s$ spherical unpatched panel with $a/h=400$ under uniform external pressure.

Fig. 4에서의 스냅-쓰루 현상을 완화시키거나 없애기 위하여 Fig. 2와 같이 중앙부에서 25%만큼 직교방향으로 구형 패널의 두께만큼 똑같은 적층 형태로 보강하였다. 그림 6은 패널의 안쪽에 보강한 경우와 바깥쪽에 보강한 패널의 비선형 거동을 나타낸 것이다. 또한 보강한 패치만큼 무게를 증가시킨 1.5배의 두께를 갖는 등가 패널(equivalent panel)의 비선형 거동과 비교하였다. 1.5배 두께를 증가시킨 패널은 여전히 스냅-쓰루를 보이는 반면에, 패널의 두께 만큼 보강한 패치 패널은 불안정한 하중-평형 선도가 보이고 않고 전형적인 비선형 거동을 나타낸다. 바깥쪽에 보강한 패널이 기하학적인 굽힘 강성이 크기 때문에 안쪽에 보강한 패널보다 강성화 경향으로 나타난다. 외압이 적은 경우 등가 패널에서 강성화 경향이 나타나지만, 외압이 증가함에 따라 등가 패널은 특정 하중 이상에서 급격히 변위가 증가한다. Fig. 7은 Fig. 6의 비선형 거동을 보이는 각 패널의 1차 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 바깥쪽에 보강한 패널의 고유진동수는 안쪽에 보강한 패널의 것보다 크다. 낮은 하중 받는 경우, Fig. 6에서 보여준 것처럼 강성이 등가 패널에서 가장 크기 때문에 고유진동수 역시 가장 크다. 하중이 증가함에 따라 등가 패널은 급격히 고유진동수가 떨어지나, 패치 패널은 완만하게 고유진동수가 감소한다. 이는 비선형이 크지 않은 경우 질량의 효과가 강성 효과보다 크기 때문이다. 여기서 가장 낮은 고유진동수를 살펴보면, 등가 패널과 바깥쪽에 보강한 패치 패널의 최소 고유진동수는 비슷하며, 안쪽에 보강한 패치 패널의 최소 고유진동수는 바깥쪽에 보강한 패치 패널보다 크다.

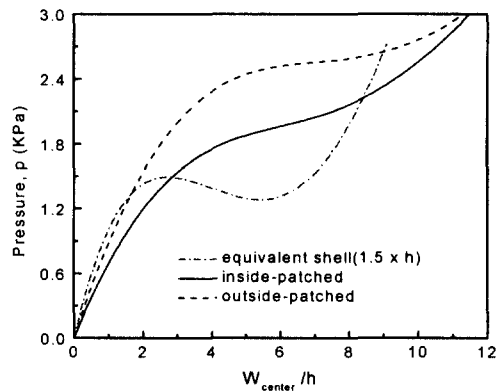


Fig. 6 Nonlinear response of orthogonal patched spherical panel with $hp=h$ under uniform external pressure.

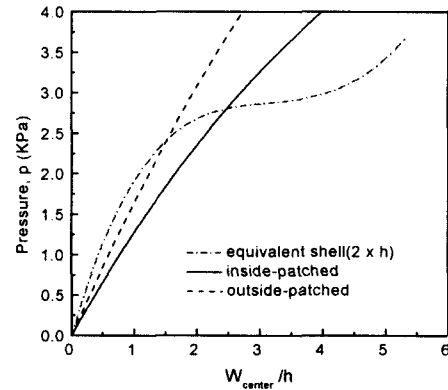


Fig. 8 Nonlinear response of orthogonal patched laminated spherical panel with $hp=2h$ under uniform external pressure.

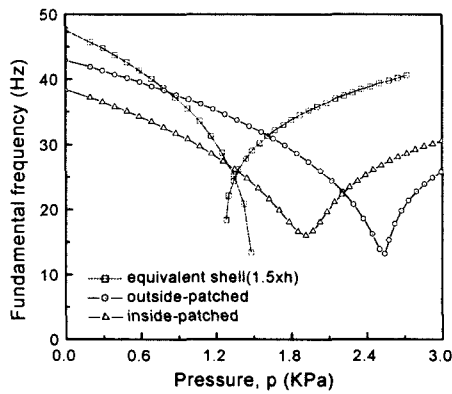


Fig. 7 Fundamental frequency of orthogonal patched laminated spherical panel with $hp=h$ under uniform external pressure.

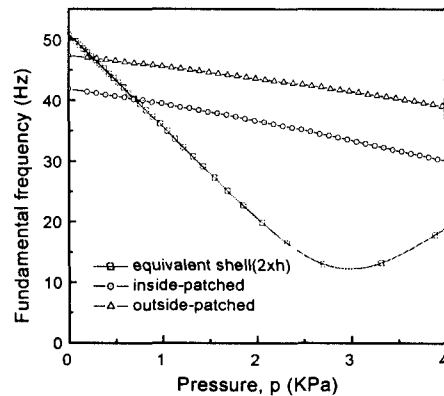


Fig. 9 Fundamental frequency of orthogonal patched laminated spherical panel with $hp=2h$ under uniform external pressure

패치의 두께를 패널의 두께의 2배로 증가한 경우를 살펴 보았다. 총 무게는 2배로 증가하였다. 등가 패널($a/h=200$)의 경우도 Fig. 8에서 보는 것처럼 스냅-스루 현상은 보이지 않으나, 약 2.7 Kpa의 입력에서 연성화 경향이 크게 나타난다. 그에 반해 패치로 보강한 패널은 거의 선형화 경향을 보이고 있다. 이 때의 1차 고유진동수 변화는 Fig. 9에서 보여주고 있다. 고유 진동수 역시 거의 선형적으로 감소하는 경향으로 나타난다. Fig. 7과 마찬가지로 낮은 하중에서는 질량 효과가 강성 효과보다 크기 때문에 패치 패널

의 고유진동수는 작아진다.

4. 결론

본 연구에서는 변형율을 가정한 혼합유한요소법을 적용하여 패치가 직교방향으로 보강된 구형 쉘 패널의 후좌굴 거동과 진동 특성을 살펴보았다. 스냅-쓰루와 같은 불안정한 좌굴 현상을 보이는 구형 쉘 패널에 직교 방향으로 패치를 보강했을 때 스냅핑 거동은 나타나지 않았다. 또한 1

차 고유진동수도 급격히 떨어지지 않았다. 패치의 보강 위치에 따라 비선형 거동이 달라지며, 바깥쪽에 보강한 패치 패널이 기하적인 강성 효과가 크기 때문에 강성화 경향이 크다. 하중이 낮은 경우, 패치가 없는 패널에서 강성화 경향이 크고 고유진동수도 가장 크게 나타난다. 그러나 내부 하중이 증가함에 따라 비선형 효과가 크게 나타나기 때문에 보강한 패널의 고유진동수는 패치가 없는 패널에 비하여 크게 떨어지지 않는다. 따라서 패치는 구조물의 수리를 하는데 유용한 것은 물론이고 하중지지도를 개선시킬 뿐만 아니라 급격한 고유진동수의 감소를 방지하는데 효과적임을 알 수 있다.

of Doubly-curved rectangular Shallow Shells using a Refined First-order Theory," *Computer methods in Applied Mechanics*, Vol. 127, 1995, pp. 145-162.

참고문헌

- 1) Noor, A. K. and Hartley, S. J., "Nonlinear shell Analysis via Mixed Isoparametric Elements," *Computers and Structures*, Vol. 7, 1977, pp. 615-626.
- 2) Chang, T. Y. and Sawamiphakdi, K., "Large Deformation Analysis of laminated Shells by Finite Element Method," *Computers and Structures*, Vol. 13, 1981, pp. 331-340.
- 3) Chao, W. C. and Reddy, J. N., "Analysis of Laminated Composite Shells using a Degenerated 3-D Element," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 1991-2007.
- 4) Saigal, S. and Kapania, R. K., "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Imperfect Laminated Shells," *J. Composite Materials*, Vol. 20, 1986, pp. 197-214.
- 5) Rhiu, J. J. and Lee, S. W., "A Nine Node Finite Element for Analysis of Geometrically Nonlinear Shells," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 1945-1962.
- 6) Yeom, C. H. and Lee, S. W., "An Assumed Strain Finite Element Model for Large Deflection Composite Shells," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp. 1749-1768.
- 7) To, C. W. S. and Liu, M. L., "Geometrically Nonlinear Analysis of Layerwise Anisotropic Shell Structures by Hybrid Strain based Lower Order Elements," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 37, 2001, pp. 1-34.
- 8) Reddy, J. N., "Exact Solution of Moderately Thick laminated Shells," *ASCE J. Engineering Mechanics*, Vol. 110, No. 5, 1984, pp. 794-809.
- 9) Liew, K. M. and Lim, C. W., "A Ritz Vibration Analysis