

역최적화 방법을 이용한 강인한 퍼지 제어기의 설계

Design of Robust Fuzzy Controllers via Inverse Optimal Approach

곽기호 · 임채환 · 박주영

Ki-ho Kwak, Chae-hwan Leem, and Joo-young Park

고려대학교 제어계측공학과

요 약

본 논문은 TS(Takagi-Sugeno) 퍼지모델로 근사 혹은 표현될 수 있는 비선형 시스템을 위한 TS 퍼지 제어기의 설계를 다룬다. 본 논문에서 사용하는 주된 전략은, 안정도, 감쇠율 및 불확실성에 대한 강인성 등의 설계요건을 만족시키는 리아푸노프 함수와 그에 대응하는 제어입력이 먼저 결정된 후에 비용함수가 결정되는 역최적화 방법이다. 이러한 설계방법은, 설계조건뿐만 아니라 최적제어기 고유의 강인성까지 만족시키는 제어기를 제공하므로 매우 유용하다. 본 논문에서 확립되는 설계절차는 모두 선형행렬부등식을 푸는 형태로 이루어진다. 선형행렬부등식 문제는 내부점 방법에 의하여 주어진 허용 오차 이내에서 풀릴 수 있으므로, 본 논문에서 제시하는 설계방법은 실용적인 특성을 갖는다. 제안된 설계 절차의 적용 방법은 설계 예제를 통하여 예시된다.

Abstract

In this paper, we study the problem of designing TS(Takagi-Sugeno) fuzzy controllers for the systems that can be approximated or represented by the TS fuzzy model. The main strategy used in this paper is the inverse optimal approach, in which the cost function is determined later than the Lyapunov function and its corresponding control input satisfying the design requirements such as stability, decay rate, and robustness against uncertainty. This approach is useful because it yields controllers satisfying the inherent robustness of optimal controllers as well as the considered design goals. The design procedures established in this paper are all in the form of solving LMIs(linear matrix inequalities). Since the LMIs arising in the design procedures can be solved within a given tolerance by the interior point methods, the design methods of this paper are efficient in practice. The applicability of the proposed design procedures is demonstrated by design examples.

Key Words : TS fuzzy model, TS fuzzy controller, Inverse optimal approach, Robustness, Linear matrix inequality.

1. 서 론

퍼지 이론의 시스템 제어 분야에 대한 적용은 최근 들어서 비약적인 발전을 거듭해왔다. 이와 같은 발전과 함께, 퍼지시스템을 위한 해석 및 제어기 설계 과정에 수학적 이론을 도입하는 노력이 점차 활발해지고 있다[1-11 등]. 이러한 노력은, 퍼지 제어 분야가 도입 초창기에 부딪혔던 비판에 대한 효과적인 대응으로 여겨진다. 퍼지 개념을 제어에 응용하기 시작하던 초창기에는 제어기의 설계가 주로 전문가의 의견 등을 반영하여 이루어졌으며, 시스템의 안정도가 이론적으로 보장되지 못하고 시뮬레이션에 의한 경험적 입증으로 대신되는 경우가 많았었다. 이러한 경향은 엄격한 이론적 검증을 중시하는 제어 분야의 특성상 불가피하게 많은 비판을 받아왔다. 하지만 최근에는, 이러한 논란을 불식시킬 수 있는 주요한 이론적 성과들이 계속적으로 보고되고 있다.

Ollero 등은 참고문헌 [1]에서 안정도와 강인성을 나타내는 지수를 정량적으로 정의하고, 이를 이용하여 퍼지 제어기

를 설계하는 절차를 제안하였다. Cao 등은 참고문헌 [2-4]에서 리아푸노프 안정도 이론을 이용하여 TS(Takagi-Sugeno) 퍼지시스템의 안정도 판별 기준을 제시하고, Riccati 식들을 이용한 퍼지 제어기 설계 방법을 제시하였다. TS 퍼지시스템은, 모델을 구성하는 각 퍼지 IF-THEN 규칙의 전제부가 퍼지 규칙 고유의 형태를 띠는 반면에 각 결론부는 퍼지 개념이 배제된 선형 상태 방정식 형태인 $\dot{x} = A_i x + B_i u$ 형태로 표현되는 시스템으로써, 국소적 선형 시스템들의 퍼지 결합(fuzzy blending)으로 해석될 수 있는 특징을 갖는다. TS 퍼지모델로 표현되는 비선형 시스템을 위한 제어기 설계 방법들 중 최근에 가장 주목을 받고 있는 방법 중 하나로는, Tanaka와 Wang 등에 의해 제안된 PDC(parallel distributed compensation) 기법을 들 수 있다[5 등]. PDC 기법은 퍼지 모델링과 선형 제어 이론, 그리고 퍼지 결합의 개념을 종합적으로 이용하는 체계적 퍼지 제어기 설계 이론으로써, 초기의 버전은 다음과 같은 세 단계로 이루어져 있었다. 첫 번째 단계에서는, 제어하고자 하는 비선형 시스템의 동특성을 TS 퍼지모델로 표현한다. 다음 단계에서는, 각 국소 선형 모델에 대하여 선형 상태 피드백 이득(linear state feedback control)을 구한 후 TS 퍼지모델을 이용한 퍼지 결합을 통하여 전체 퍼지 제어기를 구성한다. 마지막 단계에서는, 이상의 과정을 거쳐 구해진 퍼지 제어기가 안정도 등의 요건을 만족

접수일자 : 2001년 8월 17일

완료일자 : 2001년 12월 1일

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (과제번호 2001-1-30200-011-1) 지원으로 수행되었음.

하는지를 확인하고 만족스러운 결과가 얻어질 때까지 “각 국소 선형 시스템에 대한 선형 제어기 선택”과 “안정도 등의 설계 요건 확인”의 과정을 반복하게 된다. 이러한 설계 방법론은 궁극적으로 전체 시스템을 만족시키는 퍼지 제어기를 제공할 수 있기는 하였지만, 일단 퍼지 제어기의 국소 이득들을 선택한 이후에 이들이 안정도 등을 만족하는지 확인하는 시행착오를 거쳐야 한다는 단점을 가졌다. 그리고 보다 중요한 문제점으로, 선택된 이득들에 의해 전체 시스템의 안정도가 보장되지 못했을 때 이들 중 어느 이득에 얼마만큼의 책임이 있는지를 판단하는 것이 어려웠다. 이러한 어려움은 Tanaka, Wang 등에 의해 제안된 선형행렬부등식(LMI, linear matrix inequality) 기반 PDC 설계 기법[6-7 등]에 의해 상당 부분 해결되었고, 최근에는 관련 연구가 여러 가지 방향으로 진전되고 있다. 이 밖에, LMI 기반 TS 퍼지 제어기 설계와 관련한 연구를 수행한 바 있는 주요 연구진들로는 Joo[8], Hong[9], Joh[10], Lee, Park, Chen[11] 등이 있다. 이들에 의해 수행된 연구 내용들은, TS 퍼지 제어기를 이용한 마그네틱 베어링 시스템의 제어[9], 각 국소 모델의 극점을 정해진 콘벡스 영역에 자리잡게 하는 LMI 기반 설계 방법론[10], 혼돈 시스템의 제어[8,11] 등을 포함한다. 본 논문에서 중점적으로 다루고자 하는 주제를 한마디로 요약하면, TS 퍼지 제어기에 관한 깊이 있는 이해를 바탕으로 효과적인 설계방법론들을 제안하는 것이다. 이와 관련하여, 본 논문의 주요 주제를 항목별로 정리하면 다음과 같다: (1) PDC 기법을 비롯한 거의 대부분의 TS 퍼지 제어기 관련 연구들은, 우리가 왜 TS 퍼지모델 형태의 제어기를 사용해야 하는가를 묻는 질문에, 사용하기 간편하고 설계가 비교적 용이하기 때문임을 내세운다. 본 논문에서는 이러한 질문에 대해, 제어 대상이 되는 시스템이 TS 퍼지모델로 표현되는 경우에는 본 논문에서 설명하는 종류의 최적 제어 문제의 해가 TS 퍼지 제어기 형태를 취하게 된다는 사실을 관찰함으로써, 또 하나의 설득력 있는 답변을 제시하고, 이를 바탕으로 안정도, 감쇠율 등을 종합적으로 만족하는 효과적인 제어기 설계 방법론을 제안하고자 한다. (2) 주어진 시스템과 시스템을 표현하는 모델 사이에는 어느 정도의 불일치가 존재하기 마련이므로, 불확실성을 고려할 경우에는 보다 현실적인 결과를 얻을 수 있다. 본 논문에서 다루어지게 될 주제 중의 일부는, (1)의 과정을 통하여 확립된 연구 내용을 불확실성을 고려하는 방향으로 확장시키는 것을 포함한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 TS 퍼지모델에 대한 기본적인 사항을 소개한 후, 본 논문에서 제안하는 설계방법론의 이론적 근거가 되는 기본 정리들을 제시한다. 그리고, 제시된 기본 정리들을 바탕으로 하여, 강인성을 갖는 역최적 TS 퍼지 제어기를 설계하는 문제를 선형행렬부등식 문제로 공식화한다. 널리 알려진 바와 같이 선형행렬부등식 문제는 내부점 방법(interior point method)에 의하여 빠른 시간 내에 효과적으로 풀릴 수 있기 때문에, 선형행렬부등식을 이용한 풀이는 매우 효과적인 설계 방법론이 될 수 있다. 3장에서는 기존의 관련 연구에서 사용되었던 예제에 대하여 제안된 방법론을 적용함으로써 확립된 설계절차를 예시하고, 4장에서는 결론을 제시한다.

2. 강인한 TS 퍼지 제어기의 설계 방법 제안

본 논문에서는 TS 퍼지모델[12-13]로 표현된 비선형 시

스템을 위한 퍼지 제어기의 설계와 관련한 문제들을 다룬다. TS 퍼지모델의 IF-THEN 규칙은 다음과 같은 형태로 주어진다 :

Plant 규칙 i :

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i_1} \text{ and } \dots \text{ and } z_r(t) \text{ is } M_{i_r}$$

$$\text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, r$$

여기에서, $z_i(t) \in R$ 와 M_{ij} 은 각각 전제부 변수와 퍼지 집합이고, r 은 IF-THEN 규칙의 개수이며, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$ 는 각각 상태 벡터와 입력 벡터이다. TS 퍼지모델의 일반적인 추론 방법(즉, singleton fuzzifier, product fuzzy inference, weighted average defuzzifier를 이용하는 추론 방법)을 사용하면, 전체 시스템의 상태 방정식은 다음과 같이 $z(t)$ 에 따라 변하는 가중평균 형태를 이용하여 표현된다 :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (2)$$

여기에서, 각 국소 선형 모델에 대한 가중치 역할을 하는 w_i 는 식 $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^r M_{ij}(z_j(t))$ 을 통하여 얻어지는데, 이때 각 $M_{ij}(z_j(t))$ 는 전제부 변수 $z_j(t)$ 가 퍼지 집합 M_{ij} 에 속하는 정도(membership grade)를 나타낸다. 하중함수 w_i 는 음이 아니고, 일반적으로 다음을 만족한다 :

$$\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \text{ for all } t > 0 \quad (3)$$

본 논문에서는 (3)이 언제나 만족되고, 전제부 변수 벡터 $z(t)$ 와 상태 벡터가 실시간으로 측정 가능한 경우만을 고려하기로 한다. 하중함수를

$$h_i(z(t)) = w_i(z(t)) / \sum_{i=1}^r w_i(z(t))$$

로 정규화 하면, 상태 방정식 (2)는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다 :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (4)$$

여기에서, 표준화된 하중함수 h_i 는 $h_i(z(t)) > 0, i = 1, \dots, r$ 과

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad \forall t \geq 0$$

를 만족한다. 이하에서는 수식의 길이가 지나치게 길어지는 것을 피하기 위하여, 문맥 상 무리가 없는 경우에는 $h_i(z(t))$ 를 h_i 로 간략하게 표현하기로 한다. 다음에서는 본 논문에서 다룬 이론적 내용을 설명하는 데 필요한 기본적인 개념들을 소개하기로 한다.

$u(t) = 0, \forall t \geq 0$ 인 경우에, TS 퍼지시스템 (4)는 다음과 같은 형태가 된다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) \quad (5)$$

리아푸노프(Lyapunov) 안정도 이론에 따르면, 0이 아닌 모든 제곱에 따라 감소하는 양의 정부호(positive definite)

함수 $V(x) = x^T P x$ 가 존재하면 시스템은 안정한데, 이러한 리아푸노프 함수를 갖는 시스템을 우리는 이차 안정(quadratically stable)이라고 부른다. 시스템 (5)에서, 0이 아닌 제적 $x(t)$ 에 따른 V 의 미분 값을 구하면 다음과 같다 :

$$\frac{dV}{dt}(t) = \sum_{i=1}^r h_i x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t)$$

$P > 0$ 인 경우 Q 를 P 의 역행렬로 정의하면, $A_i^T P + P A_i < 0$ 는 $Q A_i^T + A_i Q < 0$ 과 동치이므로, 시스템 (5)는 대칭행렬 Q 가 다음을 만족할 때 이차안정이 된다[5,14]:

$$Q > 0, A_i Q + Q A_i < 0, i = 1, \dots, r \quad (6)$$

여기에서 주목할 내용은, 위 부등식의 왼편은 행렬변수 Q 에 대해 선형이라는 사실이다. 부등식 (6)을 만족하는 Q 를 구하거나, 그러한 Q 가 존재하지 않는다는 것을 결정하는 것은 LMI feasibility problem으로 불리는 콘벡스 문제이다. 선형 행렬 부등식은 다음과 같은 형태의 구속조건을 의미한다 :

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N < 0 \quad (7)$$

여기서, $x = (x_1, \dots, x_N)$ 은 변수, A_0, \dots, A_N 은 대칭행렬이고, " $<$ "는 음의 정부호(negative definite)임을 의미한다. LMI feasibility problem 및 선형 행렬 부등식 관련 최적화 문제는 모두 내부점 방법[14]에 의해 풀 수 있으며, 이를 풀기 위한 상용 소프트웨어로는 MATLAB LMI Control Toolbox[15] 등이 있다. 많은 제어 관련 문제들이 선형 행렬 부등식으로 치환될 수 있는데, 시스템 (5)의 이차안정도도 그 중의 하나이다.

본 논문에서 다루는 주요 주제 중 하나는, 최적제어와 관련한 내용이다. 최적 제어 이론에서 가장 중요한 문제 중 하나는 비선형 상태방정식으로 표현되는 시스템 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 에 대하여 다음을 만족하는 피드백 제어 $u(x)$ 를 구하는 것이다 :

- ▶ 평형점 $x = 0$ 가, 전역적 점근 안정인(globally asymptotically stable) 상태가 된다.
- ▶ 다음과 같은 비용 함수(cost function) J 를 최소화 한다:

$$J = \int_0^{\infty} (\ell(x) + u^T R(x)u) dt \quad (8)$$

여기에서 $\ell(x)$ 는 x 에 관하여 양의 정부호인(positive-definite) 함수이고, R 은 양의 정부호, 즉, $R(x) = R(x)^T > 0, \forall x \neq 0$ 를 만족하는 대칭 행렬이다. 그리고, 최적해인 입력을 우리는 $u^*(x)$ 로 표기하고, 초기조건이 $x_0 \in R^n$ 인 상태에서 최적해가 입력으로 가해졌을 때 얻게되는 비용함수의 최소값 J 를 최적값 함수(optimal value function) $V(x_0)$ 라고 부른다. 널리 알려진 바와 같이, 이러한 문제는 다음과 같은 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 방정식을 이용하여 다룰 수 있다 :

보조정리 1[16] : 시스템 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 에 대하여, HJB 방정식

$$\ell(x) + L_f V(x) - (1/4)L_g V(x)R^{-1}(x)(L_g V(x))^T = 0, V(0) = 0 \quad (9)$$

을 만족시키고,

$$u^*(x) \triangleq -(1/2)R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \quad (10)$$

로 정의되는 제어입력이 시스템의 평형점 $x = 0$ 를 전역적 점근 안정이게 하는 양의 정부호 함수 $V(x) \in C^1(R^n)$ 가 존재한다고 하자. 이 경우에, u^* 는 비용함수 (8)을 최소화시키는 최적 안정 제어입력(optimal stabilizing control input)이 된다.

임의의 형태로 주어지는 비선형 방정식과 비용함수에 대하여 HJB 방정식 (9)의 일반해를 구하는 것은 매우 어렵고, 많은 경우에 불가능한 것으로 알려져 있다. 하지만 최적 안정해 $u^*(x)$ 는 $R(x) = I$ 일 때에, 양의 정부호 함수 $\ell(x)$ 의 구체적 수식표현과는 무관하게 항상 일정한 안정도 마진을 갖게 되는 강인성(robustness)을 가지게 되므로[16], 우선 $\ell(x)$ 을 고정시키지 않은 상태에서 $x = 0$ 을 전역적으로 안정화시키는 제어 입력을 구한 후에 다음 단계에서 이 제어 입력이 어떠한 $\ell(x)$ 과 $R(x) = I$ 에 대해서 (8)식 형태의 비용함수를 최소화시켰음을 보이는 역최적화 방법[17]을 사용하는 것이 제어를 구하기 위한 효과적인 방법이 될 수 있다. 다음에서는 $R(x) = I$ 를 가정하고, 제어입력

$$u^*(x) \triangleq -(1/2)(L_g V(x))^T \quad (11)$$

이 평형점 $x = 0$ 을 전역적 점근 안정이게 하고, 모든 $x \neq 0$ 에 대해 다음 부등식이 만족되는 경우를 생각하자 :

$$-L_f V(x) + (1/4)\{L_g V(x)\}\{L_g V(x)\}^T > \lambda(x) > 0$$

(여기에서 $\lambda(x)$ 는 설계자에 의하여 정의되는 양의 정부호 함수이다.)

이 경우에, 위의 보조정리에 따르면 제어입력 u^* 는 양의 정부호 함수 $\ell(x) \triangleq -L_f V(x) + (1/4)\{L_g V(x)\}\{L_g V(x)\}^T$ 와 $R(x) = I$ 에 의해 정의되는 비용함수 (8)을 최소화시키는 최적 안정해가 됨을 알 수 있다. 이러한 논리를 재정리하면, 위의 보조 정리는 다음과 같은 형태로 변형될 수 있다 :

보조정리 2 [16] : 주어진 시스템 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 과 양의 정부호 함수 $\lambda(x)$ 에 대하여, 다음의 두 조건을 모두 만족하는 양의 정부호 함수 $V(x) \in C^1(R^n)$ 가 존재하는 경우를 생각하자.

$$\text{『조건 1』 } \ell(x) \triangleq -L_f V(x) + (1/4)\{L_g V(x)\}\{L_g V(x)\}^T > \lambda(x) (> 0), \forall x \neq 0 \quad (12)$$

『조건 2』 제어입력 $u^*(x) \triangleq -(1/2)\{L_g V(x)\}^T$ 는 평형점 $x = 0$ 을 전역적 점근 안정이게 한다.

이 경우에, 『조건 2』에서 정의된 u^* 는 비용함수 $J = \int_0^{\infty} (\ell(x) + u^T u) dt$ 를 최소화시키는 최적 안정 제어입력이다.

위의 보조정리 2는, 다음과 같이 표현될 수 있는 TS 퍼지 시스템 (4)에 적용될 수 있다 :

$$\dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\} u(t) \quad (13)$$

이 상태방정식은

$$f(x) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^r h_i A_i x \right\}, g(x) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\}$$

인 경우에 해당한다. 정리를 적용하여 구체적인 해를 구할

수 있도록 하기 위하여, $V(x)$ 가 양의 정부호인 이차함수 $x^T Px$ 형태가 됨을 가정하고 부등식 (12)를 전개하면 다음을 얻는다 :

$$\begin{aligned} \ell(x) &= -L_f V(x) + (1/4)\{L_g V(x)\}(L_g V(x))^T \\ &= -(\partial V/\partial x)f(x) + (1/4)\{L_g V(x)\}(L_g V(x))^T \\ &= -x^T\left\{\sum_{i=1}^r h_i(A_i^T P + PA_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j PB_j B_j^T P\right\}x \\ &> \lambda(x) > 0 \end{aligned}$$

따라서, $V(x) = x^T Px$, $P > 0$, $\lambda(x) = x^T Lx$, $L > 0$ 인 경우에 TS 퍼지시스템 (13)에 대한 보조정리 2의 『조건 1』은 다음과 동치가 된다 :

$$\sum_{i=1}^r h_i(A_i^T P + PA_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j PB_j B_j^T P < -L < 0 \quad (14)$$

그리고, 이 경우에 대해 보조정리 2의 『조건 2』에 제시된 제어입력 u^* 의 수식을 전개하면 다음을 얻는다 :

$$\begin{aligned} u^* &= -\{L_g V(x)\}^T/2 = -\{L_g(x^T Px)\}^T/2 \\ &= -\left\{2x^T P\left(\sum_{i=1}^r h_i B_i\right)\right\}^T/2 = -\sum_{i=1}^r h_i B_i^T Px \quad (15) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(-B_i^T P)x \end{aligned}$$

여기에서 우리는, 위의 전개 과정의 최종 결과가 TS 퍼지 제어기의 식[5]인

$$u = \sum_{i=1}^r h_i K_i x$$

형태가 됨을 관찰할 수 있다. 따라서, 우리가 그 동안 퍼지적인 사고와 편의를 고려하여 사용해왔던 TS 퍼지 제어기가 사실은 이상에서 설명한 바와 같은 최적화 문제의 해의 형태를 띠고 있음을 확인할 수 있다. 이러한 사실은 본 논문의 교신저자(corresponding author) 등이 학술대회논문인 [19] 등에서 관찰한 바와 같다. 정리 1은 우리에게 $P > 0$ 과 부등식 (14)가 만족되는 경우에, TS 퍼지 제어기 (15)가 원점을 전역적 접근 안정이게 하면 (15)는 우리가 구하는 최적 안정 제어입력이 됨을 알려준다. 그런데, 우리는 다음의 보조정리를 통하여 TS 퍼지시스템 (13)의 경우에는, $P > 0$ 과 부등식 (14)가 만족되면 제어입력 (15)는 평형점 $x = 0$ 을 항상 전역적 접근 안정이게 함을 밝힐 수 있다. 따라서, $P > 0$ 과 조건 (14)는 퍼지시스템 (13)에 대하여 보조정리 2의 『조건 1』뿐만 아니라, 『조건 2』까지도 충족시킬 수 있는 충분조건이 된다.

보조정리 3 : 퍼지시스템 (13)에 대하여, $P > 0$ 과 부등식 (14)를 동시에 만족시키는 양의 정부호 이차함수 $V(x) = x^T Px$ 가 존재하면, 제어입력 (15)는 반드시 시스템 (13)의 평형점 $x = 0$ 을 전역적 접근 안정이게 한다.

(증명) 시스템 (13)에 제어입력 (15)를 가하면 페루프는 다음과 같이 표현된다:

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^r h_i A_i - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_j B_j^T P\right)x \quad (16)$$

따라서, 이 시스템의 0이 아닌 상태 궤적 $x(t)$ 를 따라서

$V(x) = x^T Px$ 의 미분값 dV/dt 를 구하면 다음과 같다 :

$$\begin{aligned} dV/dt &= (\partial V/\partial x)(dx/dt) \\ &= 2x^T P\left(\sum_{i=1}^r h_i A_i - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_j B_j^T P\right)x \\ &= x^T\left\{\sum_{i=1}^r h_i(A_i^T P + PA_i) - 2\left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j PB_j B_j^T P\right)\right\}x \\ &= x^T\left\{\sum_{i=1}^r h_i(A_i^T P + PA_i) - \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j PB_j B_j^T P\right)\right\}x - \|\sum_{i=1}^r h_i B_i^T Px\|^2 \\ &\leq x^T\left\{\sum_{i=1}^r h_i(A_i^T P + PA_i) - \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j PB_j B_j^T P\right)\right\}x \end{aligned}$$

따라서, 부등식 (14)가 만족되면 위의 식의 dV/dt 는 음이 되므로, 리아푸노프 안정도 정리[16]에 의하여 페루프의 평형점 $x = 0$ 은 전역적 접근 안정이게 된다.///

이상에서 설명한 내용들은 다음과 같은 정리로 종합될 수 있다 :

정리 1 : 주어진 퍼지시스템

$$\dot{x}(t) = \left\{\sum_{i=1}^r h_i A_i x(t)\right\} + \left\{\sum_{i=1}^r h_i B_i\right\}u(t)$$

과 양의 정부호 함수 $\lambda(x) = x^T Lx$ 에 대하여, 다음 조건을 만족하는 대칭행렬 P 가 존재하는 경우를 생각하자.

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i(A_i^T P + PA_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j PB_j B_j^T P + L < 0 \end{cases} \quad (17)$$

이 경우에 TS 퍼지 제어기 $u^* \triangleq \sum_{i=1}^r h_i(-B_i^T P)x$ 는, $\lambda(x)$ 보다 큰 양의 정부호 함수

$$\ell(x) \triangleq -x^T\left\{\sum_{i=1}^r h_i(A_i^T P + PA_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j PB_j B_j^T P\right\}x \quad (18)$$

에 의해 정의되는 비용함수 $J \triangleq \int_0^\infty (\ell(x) + u^T u)dt$ 를 최소화시키고 평형점 $x = 0$ 을 전역적 접근 안정이게 하는 최적 안정 제어입력이다.

(증명) 부등식 (17)이 만족되면 $P > 0$ 과 부등식 (14)가 동시에 만족되므로 보조정리 3의 조건이 모두 만족된다. 따라서, 보조정리 3에 따라서 제어입력 $u^* = \sum_{i=1}^r h_i(-B_i^T P)x$ 는 평형점 $x = 0$ 를 전역적 접근 안정이게 하는 제어입력이다. 이에 따라, 조건 (17)은 TS 퍼지 시스템 (13)에 대하여 보조정리 2의 조건 2를 만족시킨다. 또한, (17)의 두 번째 조건은 TS 퍼지 시스템 (13)에 대하여 보조정리 2의 조건 1을 만족시키므로, 결국 보조정리 2의 모든 조건이 만족됨을 알 수 있다. 따라서 TS 퍼지시스템 (13)에 대해 보조정리 2를 적용하면, 제어입력 (15)는 (18)에 의해 정의되는 비용함수 J 를 최소화시키고 평형점 $x = 0$ 을 전역적 접근 안정이게 하는 최적 안정 제어입력이 확인된다. ///

정리 1을 이용한 제어기 설계방법은, $\ell(x)$ 를 미리 고정하지 않은 상태에서 (17)을 만족하는 P 와 제어입력 u^* 를 구한 후 다음 단계에서 $\ell(x)$ 를 (18)과 같이 정해주므로 역최적화 방법이 된다. 정리 1의 내용은, 최적 제어기 (15)가 안정도뿐만 아니라 여타 성능요건을 충족시킬 수 있도록 개선하

는 방향으로 확장할 수 있다. 본 논문에서는, 다음과 같은 설계요건이 추가되는 경우를 고려한다: [추가설계요건] 폐루프(closed-loop)의 감쇠율(decay rate)이 $\beta (>0)$ 보다 크다.

시스템의 감쇠율은, 모든 상태계적 $x(t)$ 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\beta t) \|x(t)\| = 0$$

을 만족하는 β 값들 중 가장 큰 값(즉, sup 값)을 의미한다 [14]. 양의 정부호인 이차함수 $V(x) = x^T P x$ 를 이용하면, 감쇠율의 하한값(a lower bound)은 다음에 소개하는 논리에 의하여 구할 수 있다[14]: 0이 아닌 모든 상태계적에 대해

$$dV(x(t))/dt < -2\beta V(x(t)), \forall t \geq 0 \quad (19)$$

이 만족되는 경우를 생각하자. 이 경우에 일계(first order) 선형 미분방정식의 해의 성질과 $V(x)$ 가 양의 정부호 이차식임을 활용하면 다음을 얻을 수 있다 :

$$\begin{aligned} dV(x(t))/dt &< -2\beta V(x(t)), \forall t \geq 0 \\ \Rightarrow V(x(t)) &< V(x(0)) \exp(-\beta t), \forall t \geq 0 \\ \Rightarrow \exists C > 0 \text{ s.t. } &\|x(t)\| < C \exp(-\beta t), \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

위의 결과에 감쇠율의 정의를 적용하면, (19)는 결국 시스템의 감쇠율이 β 이상 되도록 하기 위한 충분조건이 됨을 알 수 있다. 우리가 고려하는 폐루프 (16)과 양의 정부호인 이차식 $V(x) = x^T P x$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} M_{ij}(P) &\triangleq A_i^T P + P A_i - P B_j B_j^T P, \forall i, \forall j \\ N_{ij}(P) &\triangleq \{M_{ij}(P) + M_{ji}(P)\} / 2, \forall i \neq j \end{aligned}$$

로 정의되는 행렬 $M_{ij}(P)$ 과 $N_{ij}(P) = \{N_{ij}(P)\}^T$ 를 사용하여 $dV(x(t))/dt$ 를 전개하면 다음을 얻는다 :

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= x^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P + P A_i - 2P B_j B_j^T P) \right\} x \\ &\leq x^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P + P A_i - P B_j B_j^T P) \right\} x \\ &= x^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) \right\} x \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) < -2\beta P \quad (< 0) \end{cases}$$

이 성립하면 폐루프 (16)의 감쇠율이 β 이상이 됨을 보장할 수 있다. 그리고, 정리 1의 조건 (17)과 위의 감쇠율 조건으로부터, 주어진 행렬 $L > 0$ 과 양수 β 에 대하여, 조건

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) < -2\beta P - L \quad (< 0) \end{cases} \quad (20)$$

이 성립할 경우에는 안정도와 감쇠율 조건, 그리고 $\lambda(x) > \lambda(x)$, $\forall x \neq 0$ 이 모두 만족됨을 알 수 있다. 이상의 내용을 종합하여 정리하면 다음과 같이 요약된다 :

정리 2 : 퍼지시스템

$$\dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\} u(t)$$

과 주어진 행렬 $L > 0$ 및 양수 β 에 대하여, 다음 조건을 만족하는 대칭행렬 P 가 존재하는 경우를 생각하자.

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) + 2\beta P + L < 0 \end{cases} \quad (21)$$

이 경우에 TS 퍼지 제어기 $u^* \triangleq \sum_{i=1}^r h_i (-B_i^T P) x$ 는 다음을 만족한다 :

(1) $\lambda(x) = x^T L x$ 보다 큰 양의 정부호 함수

$$\lambda(x) \triangleq -x^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i (A_i^T P + P A_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j P B_j B_j^T P \right\} x$$

에 의해 정의되는 비용함수 $J \triangleq \int_0^{\infty} (l(x) + u^T u) dt$ 를 최소화시킨다.

(2) 평형점 $x=0$ 을 전역적 접근 안정이게 한다.

(3) 폐루프의 감쇠율이 β 이상이 되도록 한다.

위의 정리의 조건 (21)를 만족시키는 P 는 여러 가지 방법[5,14,18-19]으로 구할 수 있다. 다음에서는, 관련 연구에서 주로 사용하는 풀이기법을 따라서, (21)를 만족시키는 LMI 조건을 구해보기로 한다.

우선

$$\sum_{i=1}^r h_i^2 + 2 \sum_{i < j} h_i h_j = \left(\sum_{i=1}^r h_i \right)^2 = 1$$

가 성립함을 이용하면, 다음은 (21)의 두 번째 부등식이 성립하기 위한 충분조건이 됨을 알 수 있다 :

$$\begin{cases} M_{ii}(P) + 2\beta P + L < 0, \forall i \\ N_{ij}(P) + 2\beta P + L < 0, \forall i < j \end{cases} \quad (22)$$

여기에서, (22)의 각 좌변에 대하여 $Q \triangleq P^{-1}$ 를 이용한 congruence transformation [14]을 적용한 후, (22)의 각 조건을 Q 를 이용하여 고쳐 쓰면 다음과 같은 LMI 기반 TS 퍼지 제어기 설계방법을 얻게 된다 :

[설계방법 1]

(1) 주어진 행렬 $L > 0$ 과 양수 β 에 대하여 다음 조건을 만족하는 $Q = Q^T$ 와 $X = X^T > 0$ 를 구한다 :

$$\begin{cases} Q > 0 \\ \Psi_{ii}(Q) + 2\beta Q + X < 0, \forall i \\ \Gamma_{ij}(Q) + 2\beta Q + X < 0, \forall i < j \\ \begin{bmatrix} X & Q \\ Q & L^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (23)$$

(여기에서 Ψ_{ii} 와 Γ_{ij} 는 각각 다음과 같이 정의되는 항이다 :

$$\Psi_{ii}(Q) \triangleq Q A_i^T + A_i Q - B_i B_i^T \quad (24)$$

$$\Gamma_{ij}(Q) \triangleq \{Q(A_i + A_j)^T + (A_i + A_j)Q - B_i B_j^T - B_j B_i^T\} / 2 \quad (25)$$

그리고, (23)의 세 번째 그룹의 부등식 중 $h_i h_j = 0, \forall x$ 가 성립하는 순서쌍 (i, j) 의 경우에는, 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 $h_i(x(t)) h_j(x(t)) = 0$ 이 되므로 설계과정에서 고려할 필

요가 없다.)

(2) 각 이득값이 $K_i = -B_i Q^{-1}$, $i = 1, \dots, r$ 인 TS 퍼지

제어기 $u = \sum_{i=1}^r h_i K_i x$ 는 퍼지시스템 (13)에 대하여 정리 2의 (1)-(3)을 만족시키는 제어기이다.

주어진 시스템과 시스템을 표현하는 모델 사이에는 어느 정도의 불일치가 존재하기 마련이므로, 불확실성을 고려할 경우에는 보다 현실적인 결과를 얻을 수 있다. 본 논문에서 다루게 될 두 번째 주제는, 이상의 과정을 통해 구한 설계 방법론을 불확실성이 고려된 경우까지 적용 가능하도록 확장하는 것이다. 여기에서 우리가 고려하는 모델은, 퍼지 IF-THEN 규칙의 각 국소 상태방정식(local state equation)의 시스템 행렬 부분에 시간에 따라 변하는 미지행렬(unknown matrix) $\Delta A_i(t)$ 가 추가되는 경우이다 :

Plant 규칙 i :

$$\begin{aligned} \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_r(t) \text{ is } M_{ir} \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + B_i u(t), \end{aligned} \quad (26)$$

$i = 1, \dots, r$

여기에서 $\Delta A_i(t)$ 를 제외한 모든 항에 대한 정의는 불확실성이 배제된 상태에서 기술되었던 (1)의 경우와 같다. 관련 참고문헌[11] 등을 고려하여, 불확실성 관련 항 $\Delta A_i(t)$ 는 $F_i(t)^T F_i(t) \leq I$ 를 만족하는 미지의 시변행렬(time-varying matrix) $F_i(t)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있음을 가정한다 :

$$\Delta A_i(t) = D_i F_i(t) E_i \quad (27)$$

여기에서 D_i 와 E_i 는 모두 올바른 개수의 행과 열을 갖는 상수행렬이다. 이하에서는 수식의 길이가 지나치게 길어지는 것을 방지하기 위하여 문맥상 별다른 문제점이 없는 경우에는, $\Delta A_i(t)$ 와 $F_i(t)$ 를 각각 ΔA_i 와 F_i 로 표기하기로 한다. 위의 Plant 규칙으로 표현되는 퍼지시스템은 표준적인 변환과정을 거치면 다음과 같은 상태방정식으로 변환될 수 있다[11,20] :

$$\dot{x} = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i (A_i + \Delta A_i) x \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\} u \quad (28)$$

이 상태방정식은

$$f(x) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^r h_i (A_i + \Delta A_i) x \right\}, \quad g(x) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\}$$

인 경우에 해당하므로, $V(x) = x^T P x$, $P > 0$, $\lambda(x) = x^T L x$, $L > 0$ 를 가정하고 부등식 (12)를 전개하면 다음을 얻게 된다 :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\triangleq -L_f V(x) + (1/4) \{L_g V(x)\} \{L_g V(x)\}^T \\ &= -x^T \left[\sum_{i=1}^r h_i \{ (A_i + \Delta A_i)^T P + P (A_i + \Delta A_i) \} \right] x \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j P B_i B_j^T P \\ &> -x^T L x > 0 \end{aligned}$$

따라서 이 경우에 보조정리 2의 『조건 1』은 다음과 동치가 된다 :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P + P A_i + \Delta A_i^T P + P \Delta A_i - P B_i B_j^T P) \\ &= \sum_{i=1}^r \bar{M}_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} \bar{N}_{ij}(P) \end{aligned} \quad (29)$$

$< -L, \forall x \neq 0$

(여기에서, $\bar{M}_{ij}(P)$ 와 $\bar{N}_{ij}(P)$ 는 각각 다음과 같이 정의되는 행렬이다 :

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij}(P) &\triangleq A_i^T P + P A_i - P B_i B_j^T P + \Delta A_i^T P + P \Delta A_i, \quad \forall i, \forall j \\ \bar{N}_{ij}(P) &\triangleq \{ \bar{M}_{ij}(P) + \bar{M}_{ji}(P) \} / 2, \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

(15)의 제어입력을 시스템 (28)에 가해주면, 시스템의 페루프는 다음과 같은 상태방정식을 갖게 된다 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left\{ \sum_{i=1}^r h_i (A_i + \Delta A_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_i B_j^T P \right\} x \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i + \Delta A_i - B_i B_j^T P) \right\} x \end{aligned} \quad (30)$$

여기에서, 보조정리 3의 증명과정과 같은 절차를 밟으면, 페루프 (30)의 0이 아닌 상태궤적 $x(t)$ 를 따라서 구한 $V(x) = x^T P x$ 의 t 에 관한 미분값은 다음을 만족함을 보일 수 있다 :

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= 2x^T P \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i + \Delta A_i - B_i B_j^T P) \right\} x \\ &\leq x^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 \bar{M}_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \bar{N}_{ij}(P) \right\} x \end{aligned}$$

따라서, 양의 정부호인 이차함수 $V(x) = x^T P x$ 를 사용할 때,

$$\sum_{i=1}^r h_i^2 \bar{M}_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \bar{N}_{ij}(P) < -2\beta P - L \quad (31)$$

가 $L = L^T > 0$ 과 $\beta > 0$ 에 대해 만족되면 페루프의 전역적 점근 안정도가 보장되고, 시스템의 감쇠율이 β 이상이 됨을 보장되며, $\lambda(x) > \lambda(x) = x^T L x, \forall x \neq 0$ 이 성립한다. 그리고, $\sum_{i=1}^r h_i^2 + 2 \sum_{i < j} h_i h_j = 1$ 이 성립함과 부등식 좌우에 $Q = P^{-1}$ 을 곱해주는 congruence transformation 을 이용하면, 다음에 보여진 Q 와 X 에 관한 부등식은 (31)의 충분조건이 됨을 알 수 있다 :

$$\begin{cases} \Psi_{ii}(Q) + 2\beta Q + X + Q \Delta A_i^T + \Delta A_i Q < 0, \forall i \\ \Gamma_{ij}(Q) + 2\beta Q + X + Q(\Delta A_i + \Delta A_j)^T / 2 + (\Delta A_i + \Delta A_j) Q / 2 < 0, \forall i < j \\ \begin{bmatrix} X & Q \\ Q & L^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (32)$$

이상에서 고찰한 내용은 다음의 정리로 요약될 수 있다 :

정리 3 : 식 (28)로 표현되는 퍼지시스템

$$\dot{x} = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i (A_i + \Delta A_i) x \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\} u$$

과 주어진 행렬 $L > 0$ 및 양수 β 에 대하여, 다음 조건을 만족하는 대칭행렬 Q 와 X 가 존재하는 경우를 생각하자.

$$\begin{cases} Q > 0 \\ \Psi_{ii}(Q) + 2\beta Q + X + Q \Delta A_i^T + \Delta A_i Q < 0, \forall i \\ \Gamma_{ij}(Q) + 2\beta Q + X + Q(\Delta A_i + \Delta A_j)^T / 2 + (\Delta A_i + \Delta A_j) Q / 2 < 0, \forall i < j < 0 \\ \begin{bmatrix} X & Q \\ Q & L^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (33)$$

이 경우에 TS 퍼지 제어기 $u^* \triangleq \sum_{i=1}^r h_i (-B_i^T Q^{-1}) x$ 는

다음을 만족한다 :

(1) $\lambda(x) = x^T L x$ 보다 큰 양의 정부호 함수

$$l(x) \triangleq -x^T \left[\sum_{i=1}^r h_i \{ (A_i + \Delta A_i)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A_i + \Delta A_i) \} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j Q^{-1} B_i B_j^T Q^{-1} \right] x$$

에 의해 정의되는 비용함수 $J \triangleq \int_0^{\infty} (l(x) + u^T u) dt$ 를 최소화시킨다.

(2) 평형점 $x=0$ 을 전역적 점근 안정이게 한다.

(3) 페루프의 감쇠율이 β 이상이 되도록 한다.

본 논문에서 고려하는 바와 같이, 불확실성 관련 항 $\Delta A_i(t)$ 가 $F_i(t)^T F_i(t) \leq I$ 를 만족하는 미지의 시변 행렬 $F_i(t)$ 에 대하여

$$\Delta A_i(t) = D_i F_i(t) E_i$$

로 표현될 수 있는 경우에는 부등식 (33)은 다음의 보조정리를 통하여 $F_i(t)$ 가 소거된 형태로 변형될 수 있다. 여기에서 소개하는 보조정리 4는 참고문헌 [11]과 [20] 등에서 이미 소개한 내용을 편리하게 적용할 수 있는 형태로 수정한 것이다 :

보조정리 4[11,20] : 주어진 상수행렬 D, E 와 $S = S^T$ 에 대하여 다음은 서로 동치이다:

- ① $F^T F \leq I$ 를 만족하는 모든 F 에 대하여 $S + DFE + E^T F^T D^T < 0$ 가 성립한다.
- ② $\begin{bmatrix} S + \epsilon DD^T & E^T \\ E & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0$ 을 만족하는 양수 $\epsilon > 0$ 이 존재한다.

이제 불확실성에 관한 등식 (27)을 정리 3의 부등식 (33)에 대입하면, (33)의 두번째 및 세번째 그룹의 부등식은 다음과 같이 표현된다 :

$$\begin{cases} \Psi_{ii}(Q) + 2\beta Q + X + D_i F_i(E_i Q) + (E_i Q)^T F_i^T D_i^T < 0, \forall i \\ \Gamma_{ij}(Q) + 2\beta Q + X + (1/2)[D_i \ D_j] \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & F_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ E_j \end{bmatrix} Q \\ \quad + \begin{bmatrix} E_i \\ E_j \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & F_j \end{bmatrix} \{ (1/2)[D_i \ D_j] \}^T < 0, \forall i < j \end{cases} \quad (34)$$

여기에서 서로 다른 i, j 에 대하여 $F_i^T F_i \leq I$ 과 $F_j^T F_j \leq I$ 가 모두 성립함

$$\begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & F_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & F_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

이 성립함은 동치이므로, 보조정리 4를 이용하여 정리 3의 조건 (33)을 고쳐 쓰면 다음과 같은 LMI 기반 TS 퍼지 제어기 설계방법을 얻게 된다 :

[설계방법 2]

(1) 주어진 행렬 $L > 0$ 과 양수 β 에 대하여 다음 조건을 만족하는 $Q = Q^T, X = X^T$ 와 $\epsilon_{ij}, i = 1, \dots, r, i \leq j$ 를 구한다 :

(여기에서 Ψ_{ii}, Γ_{ij} 의 의미는 식 (24)-(25)에서 정의된 바와 같고, (35)의 두 번째와 네 번째 행의 부등식 중 $h_i h_j = 0, \forall x$ 가 성립하는 순서쌍 (i, j) 의 경우에는, 모든

$t \geq 0$ 에 대해서 $h_i(x(t)) h_j(x(t)) = 0$ 이 되므로 설계과정에서 고려할 필요가 없다.)

$$\begin{cases} Q > 0, X > 0 \\ \epsilon_{ii} > 0, \forall i, \epsilon_{ij} > 0, \forall i < j \\ \begin{bmatrix} \Psi_{ii}(Q) + 2\beta Q + X + \epsilon_{ii} D_i D_i^T & * \\ E_i Q & -\epsilon_{ii} I \end{bmatrix} < 0, \forall i \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}(Q) + 2\beta Q + X + \epsilon_{ij} (D_i D_i^T + D_j D_j^T) / 4 & * \\ \begin{bmatrix} E_i \\ E_j \end{bmatrix} Q & -\epsilon_{ij} I \end{bmatrix} < 0, \forall i < j \\ \begin{bmatrix} X & Q \\ Q & L^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (35)$$

(2) 각 이득값이 $K_i = -B_i Q^{-1}, i = 1, \dots, r$ 인 TS 퍼지 제어

기 $u = \sum_{i=1}^r h_i K_i x$ 는 퍼지시스템 (28)에 대하여 정리 3의 (1)-(3)을 만족시키는 제어기이다.

3. 예 제

이상에서 우리는, 전형적인 TS 퍼지시스템과 불확실성이 고려된 TS 퍼지시스템을 위하여 각종 설계요건을 만족시킬 수 있는 TS 퍼지 제어기의 설계방법을 제시하였다. 이들은 모두 LMI를 푸는 과정을 이용하기 때문에 MATLAB LMI Control Toolbox 등을 이용하여 매우 손쉽게 답을 구할 수 있는 장점이 있다. 다음에서는, 간단한 예제를 이용하여 제안된 설계방법론의 적용을 예시하도록 한다. 참고문헌 [21]의 예제 2에서 고려된 비선형 진동 시스템(mass-spring-damper system)은 다음과 같은 운동방정식을 갖는다 :

$$M\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \psi(\dot{x}) u \quad (36)$$

여기에서 M 은 질량, $g(x, \dot{x}) = D(c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x})$ 은 damper 에 대한 비선형항, $f(x) = c_3 x + c_4 x^3$ 은 spring에 대한 비선형항, $\psi(\dot{x}) = 1 + c_5 \dot{x}^3$ 은 입력에 대한 비선형항을 나타내며, 각 파라미터 값은 다음과 같이 주어진다 :

$$M = 1, D = 1, c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0.01, c_4 = 0.1, c_5 = 0.13$$

그리고 시스템의 변위 x 와 속도 \dot{x} 의 동작 범위는 $x \in [-1.5, 1.5]$ 와 $\dot{x} \in [-1.5, 1.5]$ 를 만족함을 가정한다. 상태변수 및 상태벡터를 각각 $x_1 \triangleq \dot{x}, x_2 \triangleq x$ 과 $x \triangleq [x_1 \ x_2]^T$ 로 잡으면, 시스템 (36)은 다음과 같은 상태 방정식으로 표현된다 :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - 0.01x_2 - 0.1x_2^3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + 0.13x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (37)$$

이 시스템은 다음과 같은 TS 퍼지모델로 표현할 수 있다 :

규칙1 : IF x_1 is about 0 and x_2 is about 0,

THEN $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$,

규칙2 : IF x_1 is about 0 and x_2 is about ± 1.5 ,

THEN $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$,

규칙3 : IF x_1 is about 1.5 and x_2 is about 0,

THEN $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$,

규칙4 : IF x_1 is about 1.5 and x_2 is about ± 1.5 ,

THEN $\dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t)$,

규칙5 : IF x_1 is about -1.5 and x_2 is about 0,

THEN $\dot{x}(t) = A_5 x(t) + B_5 u(t)$,

규칙6 : IF x_1 is about -1.5 and x_2 is about ± 1.5 ,

THEN $\dot{x}(t) = A_6 x(t) + B_6 u(t)$.

위의 TS 퍼지모델의 각 IF-THEN 규칙에 사용된 퍼지 집합의 멤버십 함수는, 다음의 수식 및 그림 1-2와 같이 정의된다.

$$w_{11}(x_1) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{27} x_1^3 & \text{for } x_1 \geq 0 \\ 1 + \frac{8}{27} x_1^3 & \text{for } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$w_{12}(x_1) = \begin{cases} \frac{8}{27} x_1^3 & \text{for } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{for } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$w_{13}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } x_1 \geq 0 \\ -\frac{8}{27} x_1^3 & \text{for } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$w_{21}(x_2) = 1 - \frac{4}{9} x_2^2$$

$$w_{22}(x_2) = \frac{4}{9} x_2^2$$

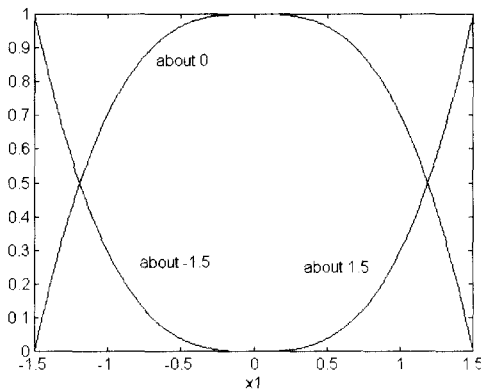


그림 1. x_1 에 대한 퍼지 집합

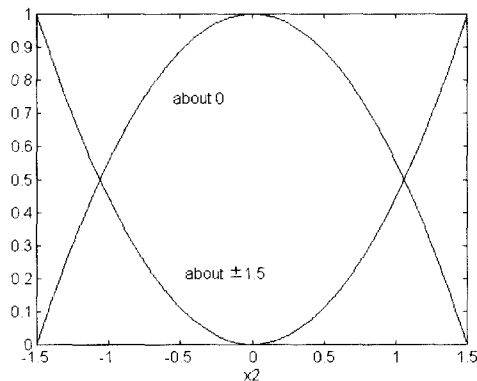


그림 2. x_2 에 대한 퍼지 집합.

TS 퍼지모델을 위한 일반적인 추론 방법을 사용하면, 위의 퍼지시스템은 다음과 같은 상태 방정식으로 표현된다 :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^6 h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (38)$$

여기에서, 국소 모델을 위한 시스템 행렬 A_i 와 입력 행렬 B_i 및 정교화 된 하중함수 h_i 는 각각 다음과 같이 구해진다 :

$$A_1 = A_3 = A_5 = \begin{bmatrix} -1 & -0.01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_4 = A_6 = \begin{bmatrix} -1 & -0.235 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1.4388 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_5 = B_6 = \begin{bmatrix} 0.5613 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_1(x(t)) = w_{11}(x_1(t))w_{21}(x_2(t)), \quad h_2(x(t)) = w_{11}(x_1(t))w_{22}(x_2(t)),$$

$$h_3(x(t)) = w_{12}(x_1(t))w_{21}(x_2(t)), \quad h_4(x(t)) = w_{12}(x_1(t))w_{22}(x_2(t)),$$

$$h_5(x(t)) = w_{13}(x_1(t))w_{21}(x_2(t)), \quad h_6(x(t)) = w_{13}(x_1(t))w_{22}(x_2(t))$$

이러한 퍼지시스템에 대하여, 감쇠율에 대한 하한값 $\beta = 0.3$ 과 비용함수에 관한 조건 $\lambda(x) \geq \lambda(x) = 0.01x_1^2 + x_2^2$ 를 설계요건으로 삼고 [설계방법 1]의 선형 행렬 부등식 (23)을 MATLAB LMI Control Toolbox로 풀면 다음과 같은 Q 가 얻어진다 :

$$Q = \begin{bmatrix} 1.2042 & -1.0147 \\ -1.0147 & 0.9373 \end{bmatrix}$$

따라서, $K_i = -B_i Q^{-1}$, $i = 1, \dots, r$ 를 통해서 구해지는 각 K_i 값을 다음과 같다 :

$$K_1 = [-9.4723 \quad -10.2551], \quad K_2 = [-9.4723 \quad -10.2551],$$

$$K_3 = [-13.6283 \quad -14.7546], \quad K_4 = [-13.6283 \quad -14.7546],$$

$$K_5 = [-5.3163 \quad -5.7557], \quad K_6 = [-5.3163 \quad -5.7557]$$

그리고, 위의 국소 이득을 사용하는 TS 퍼지 제어기 $u = \sum_{i=1}^6 h_i K_i x$ 는 퍼지시스템 (38)에 대하여 정리 2의 (1)-(3)을 만족시키는 최적 제어가 된다. 이렇게 구한 최적 제어를 시스템 (37)에 적용하면, 초기 조건 $x(0) = [1 \ 1]^T$ 와 $[-1 \ -1]^T$ 에 대하여 그림 3의 결과를 얻게 된다.

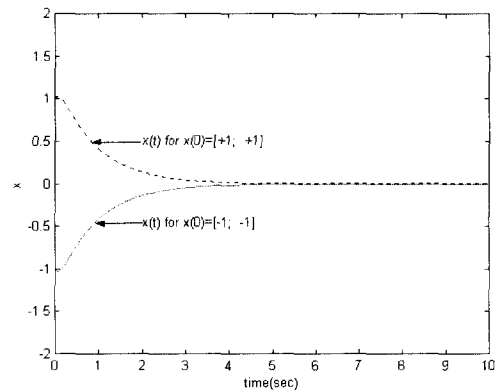


그림 3. 각 초기 조건에 따른 시스템의 응답

다음에서는 [설계방법 2]를 적용해보기 위하여, 위의 예제에서 주어진 damping constant 값 $D = 1$ 이 30%의 불확실성을 가지는 경우를 생각해 보자. 이 경우에는 실제의 damping constant 값은 $1 + 0.3a$ (여기에서 a 는 $|a| \leq 1$ 를 만족함)로 쓰여질 수 있다. 이러한 불확실성을 포함한 퍼지시스템의 상태방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다 :

$$\dot{x} = \left\{ \sum_{i=1}^6 h_i (A_i + \Delta A_i) x \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^6 h_i B_i \right\} u \quad (39)$$

여기에서 모든 시스템 행렬 A_i 과 입력 행렬 B_i 는 불확실성이 고려되지 않았던 위의 경우와 같은 행렬 값을 가지고, 불확실성을 나타내는 행렬 ΔA_i 는 다음과 같이 표현될 수 있다 :

$$\Delta A_i = \begin{bmatrix} 0.3a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.3} & \\ & 0 \end{bmatrix} a [\sqrt{0.3} \quad 0], \quad i=1, \dots, 6$$

여기에서 편의상 $F_i \triangleq a, \forall i$ 로 정의하면, ΔA_i 는 다음과 같은 D_i 및 E_i 에 대해서 $\Delta A_i = D_i F_i E_i, |F_i| \leq 1, \forall i$ 를 만족하게 된다 :

$$D_i = \begin{bmatrix} \sqrt{0.3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_i = [\sqrt{0.3} \quad 0]$$

여기에서, 불확실성을 고려하지 않았던 경우와 마찬가지로 감쇠율에 대한 하한값 $\beta = 0.3$ 과 비용함수에 관한 조건 $\mathcal{L}(x) \geq \lambda(x) = 0.01x_1^2 + x_2^2$ 를 설계요건으로 삼고 [설계방법 2]를 적용하면 다음과 같은 Q 와 K_i 가 얻어진다 :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.7201 & -0.5457 \\ -0.5457 & 0.4654 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = [-12.3704 \quad -10.0395], \quad K_2 = [-12.3704 \quad -10.0395],$$

$$K_3 = [-17.7979 \quad -14.4443], \quad K_4 = [-17.7979 \quad -14.4443],$$

$$K_5 = [-6.9429 \quad -5.6347], \quad K_6 = [-6.9429 \quad -5.6347].$$

이러한 K_i 값을 가지는 TS 퍼지 제어기와 앞에서 불확실성을 고려하지 않고 설계한 제어기를 각각 D 의 실제 값이 0.7인 경우인 다음 시스템에 적용하여 보았다 :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7x_1 - 0.01x_2 - 0.1x_2^3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + 0.13x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (40)$$

초기 조건 $x(0) = [1 \ 1]^T$ 와 $[-1 \ -1]^T$ 에 대하여 시뮬레이션을 수행한 결과 그림 4가 얻어졌다. 그림에 나타난 바와 같이 불확실성을 고려한 경우와 그렇지 않은 경우 모두 평형점을 향하여 부드럽게 수렴하는 특성을 보여주었으며, 불확실성을 고려한 경우가 그렇지 않은 경우보다 약간 더 빠른 수렴특성을 보였다.

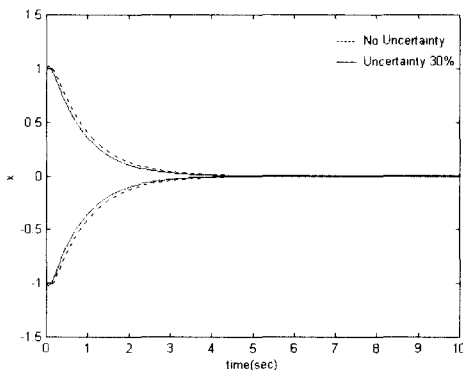


그림 4. 불확실성 유무에 따른 시스템의 응답 비교

4. 결론

본 논문에서는, TS 퍼지모델로 근사 혹은 표현될 수 있는

비선형 시스템을 대상으로 일정한 설계요건을 만족시킬 수 있는 TS 퍼지 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 우선 이론 전개 과정에서 핵심적인 역할을 하는 기본 정리들을 제시한 후, 역최적화 방법론을 이용하여 안정도와 감쇠율 등의 설계요건을 만족시키는 최적 TS 퍼지 제어기를 구하는 절차를 선형 행렬 부등식을 푸는 형태로 확립하였다. 그리고, 확립된 설계절차를 IF-THEN 규칙의 각 국소 시스템 행렬에 불확실성이 존재하는 경우에도 적용될 수 있도록 확장하였다. 제시된 설계 방법들은 특수한 알고리즘의 구현을 요구하지 아니하고, MATLAB LMI Control Toolbox와 같은 보편적인 소프트웨어를 통하여 쉽게 답을 구할 수 있는 선형 행렬 부등식 형태로 이루어져 있으므로 실용적 면을 갖는다. 그리고, 구해진 제어기는 설계자에게 요구되는 설계요건을 만족시킬 수 있을 뿐만 아니라, 최적 제어기가 일반적으로 갖게 되는 강인성까지 갖추게 되는 장점을 갖는다. 개발된 설계 절차의 적용방법은, 간단한 비선형 진동 시스템의 제어 문제를 통하여 예시되었다. 본 논문의 방법론과 관련한 향후 연구과제로는, 광범위한 시뮬레이션을 통하여 다른 방법으로 설계된 TS 퍼지 제어기들과의 성능 비교를 수행하는 것과 추가적인 이론 분석을 통하여 역최적 TS 퍼지 제어기의 특성을 규명하는 것 등을 들 수 있다.

참고 문헌

- [1] A. Ollero, J. Aracil and A. Garcia-Cerezo, "Robust design of rule-based fuzzy controllers," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 70, pp. 249-273, 1995.
- [2] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 27, pp. 193-203, 1996.
- [3] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 28, pp. 397-404, 1997.
- [4] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Analysis and design for a class of complex control systems, Part I: Fuzzy modeling and identification, Part II: Fuzzy controller design", *Automatica*, vol. 33, pp. 1017-1039, 1997.
- [5] H. Wang, K. Tanaka and M. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 14-23, 1996.
- [6] K. Tanaka, T. Ikeda and H. Wang, "Design of fuzzy control systems based on relaxed LMI stability conditions," *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 598-603, 1996.
- [7] K. Tanaka, T. Ikeda and H. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based design," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, pp. 250-265, 1998.
- [8] Y. H. Joo, G. Chen, and L. S. Shieh, "Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling for digital control of chaotic systems," *IEEE*

Transactions on Fuzzy Systems, vol. 7, pp. 394-408, 1999.

- [9] S.-K. Hong and R. Langari, "Robust fuzzy control of a magnetic bearing system subharmonic disturbances," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, pp. 366-371, 2000.
- [10] J. Joh, R. Langari, E. T. Jeung, and W. J. Chung, "A new design method for continuous Takagi-Sugeno fuzzy controller with pole placement constraints: An LMI approach," in *Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pp. 2969-2974, 1997.
- [11] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, pp. 369-379, 2001.
- [12] M. Sugeno and G. T. Kang, "Structure identification of fuzzy model," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, pp. 15-33, 1988.
- [13] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [14] S. Boyd, L. ElGhaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 15, (SIAM, Philadelphia, 1994).
- [15] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, (MathWorks Inc., Natick, MA, 1995).
- [16] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [17] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, *Robust Control of Nonlinear Systems*, Birkhauser, Boston, 1996.
- [18] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto, "Parametrized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, pp. 324-332, 2001.
- [19] Y. Park, J. Park, and M.-J. Tak, "Optimal stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems with application to spacecraft control," *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Denver, Colorado, USA, vol. 2, pp. 1910-1918, 2000.
- [20] L. Xie, "Output feedback H^∞ control of systems with parameter uncertainties," *International Journal of Control*, vol. 63, pp. 741-750, 1996.
- [21] K. Tanaka, T. Ikeda and H. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H^∞ control theory and linear matrix inequalities," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 1-13, 1996.

저 자 소 개

곽기호(Kiho Kwak)

1999년 : 고려대학교 제어계측학과 졸업(공학사)

2001년 : 고려대학교 대학원 제어계측공학과 졸업(공학석사)

관심분야 : 퍼지에어, MEMS

E-mail : solo00@cie.korea.ac.kr



임채환(Chae-Hwan Leem)

2000년 : 고려대학교 제어계측공학과 졸업(공학사)

2000년~현재 : 고려대학교 대학원 제어계측공학과 석사과정

관심분야 : 신경망, 지능시스템, 퍼지제어, SVM



박주영(Jooyoung Park)

1983년 : 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사)

1985년 : 한국과학기술원 졸업(공학석사)

1992년 : University of Texas at Austin 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(공학박사)

1985년 3월~1988년 7월 : 한국전력 월성 원자력발전소 근무

1992년 8월~1993년 2월 : 한국전력 전력경제연구소 근무

1993년 3월~현재 : 고려대학교 서창캠퍼스 제어계측공학과 부교수

관심분야 : 신경망, 퍼지제어, 비선형시스템

E-mail : jpark@korea.ac.kr