

고속 월쉬 변환을 이용한 이동 유체간 열교환 상태 해석에 관한 연구

(A Study on State Analysis of Heat Exchange between
Counter-Flow Fluid via Fast Walsh Transform)

김태훈* · 이 승**

(Tai-Hoon Kim · Seung Lee)

요 약

분포정수계는 시스템이 두 개 이상의 독립변수로 표현되면서 또한 각 변수에 대한 미분을 포함하는 편미분 방정식으로 표현되므로, 분포정수계에 직접적인 최적제어 논리를 도입하는 것은 매우 어렵다. 본 연구에서 제시하고자하는 새로운 알고리즘은 월쉬 함수 고유특성을 그대로 유지할 수 있는 유한급수 전개방법을 이용함과 동시에 계산의 편리성을 위하여 고속 월쉬 변환을 사용하는 것으로서, 본 연구 방법을 사용하면 역행렬 연산이 필요 없게 되므로 기존의 방법에 의해 처리하기 힘든 분포정수계, 선형시변계, 비선형계의 해석 및 제어문제어도 쉽게 적용할 수 있다.

Abstract

This study uses the distributed parameter systems presented by the spatial discretization technique. In this paper, the distributed parameter systems are converted into lumped parameter systems, and fast Walsh transform and the Picard's iteration method are applied to analysis the state of the systems. This thesis presents a new algorithm which usefully exercises the optimal control in the distributed parameter systems. In exercising the optimal control of the distributed parameter systems, the excellent consequences are found without using the existing decentralized control or hierarchical control method. This study can be applied to the linear time-varying systems and the non-linear systems. Further researches are required to solve the problems of convergence in case of the numerous applicable intervals.

The simulation proves the effectiveness of the proposed algorithm.

key words : distributed parameter system, FWT, heat exchange, optimal control

1. 서 론

자연계 시스템의 대부분은 구조상 시간과 공간에 따라 널리 분포되어 있기 때문에, 집중정수 모델로

* 정회원 : 프라임테크 선임연구원
** 정회원 : 대림대 자동화·시스템과 교수·공박
E-mail : taihoon@netsgo.com

접수일자 : 2001년 9월 6일
1차심사일 : 2001년 9월 11일
심사완료일 : 2001년 11월 2일

표현하여 시스템 특성을 해석하고 제어하는 것에는 여러 가지 문제점들이 있다. 시스템의 상태는 시간과 공간의 영향을 받는 상태변수가 되기 때문에, 그 동적 특성은 편미분 방정식으로 표현되게 되고 또한 분포정수계로 모델링하게 된다[1-3].

분포정수계는 시스템이 두 개 이상의 독립변수로 표현되면서 또한 각 변수에 대한 미분을 포함하는 편미분 방정식으로 표현되므로, 분포정수계에 직접적인 최적제어 논리를 도입하는 것은 매우 어렵다. 따라서 분포정수계를 특정 동작점(equilibrium point)에서 집중정수계로 변환한 후에 기존의 최적제어방법을 도입함으로써 분포정수계에 대한 최적화를 수행하고 있다[4-6]. 하지만 분포정수계를 집중정수계로 모델링하여 처리하는 경우에는, 매우 큰 차원의 시스템으로 변환되기 때문에 제어기의 설계가 어렵고, 분산형 제어이론을 도입 할 경우 분산된 각 부 시스템 간의 상호 정보 전달 관계의 처리에 있어서 복잡한 과정을 거쳐야 하는 어려움이 있다.

본 연구에서 제시하고자하는 새로운 알고리즘은 윌쉬 함수 고유특성을 그대로 유지할 수 있는 유한 급수전개방법을 이용하며, 계산의 편리성을 위하여 고속 윌쉬 변환[7]을 사용하였다. 본 연구방법에서는 역행렬의 연산이 필요 없으며, 기존의 방법에 의해 처리하기 힘든 분포정수계, 선형시변계, 비선형계의 해석 및 제어문제에도 쉽게 적용할 수 있다.

2. 윌쉬 함수 고속 변환

윌쉬 함수 m 항 전개를 이용하는 경우 모든 윌쉬

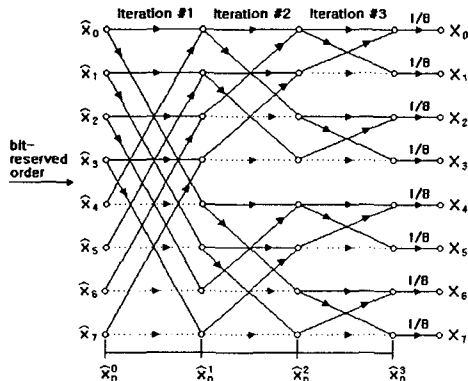


그림 2.1 연속배열 고속 윌쉬 변환
Fig. 2.1 The sequency order FWT

함수는 m 개의 세부구간에서 +1 혹은 -1 값을 취한다. 이러한 윌쉬 함수의 특성으로부터 고속 윌쉬 변환 처리가 가능해진다.

연속배열된 고속 윌쉬 변환은 먼저 자연 배열된 윌쉬 함수의 계수를 계산한 후 연속배열과 자연배열의 관계를 이용하여 연속배열된 윌쉬함수의 계수를 순차적으로 구한다. 그러나 이 방법은 그레이코드를 이진코드로 변환하는 과정이 포함되기 때문에 효과적인 알고리즘이 되지 못한다. 따라서 Andrews와 Pratt에 의해 제안된 방법[8]을 사용하면 다음의 그림 2.1과 같게 된다. 그림 2.1에서 점선은 감산을 나타내고 실선은 가산을 나타낸다.

그림에서와 같이 고속 윌쉬 변환은 다음의 과정을 따른다.

[1] 윌쉬 함수 m 항 전개를 이용하는 경우 고속 윌쉬 변환은 $\log_2 m$ 개의 단으로 나눈다.

[2] 최초의 단($p=0$)에 \bar{x}_j 를 비트 자리바꿈(bit-reverse)하여 증가순서대로 재배열하고 p 번째 단과 $p-1$ 번째 단과의 관계는 다음과 같다.

$$x_{(h)}^p = x_{(h)}^{p-1} + x_{(j+h)}^{p-1} \quad (2.1)$$

$$x_{(j+h)}^p = x_{(h)}^{p-1} - x_{(j+h)}^{p-1} \quad (2.2)$$

단, $j = m/2^p$, $h = l + k \times 2^v$, $k = 0, 1, \dots, 2^{p-1} - 1$,
 $l = 0, 1, \dots, j-1$, $v = \log_2(j+1)$

[3] 고속윌쉬변환과 역변환은 똑같은 과정에 의해 이루어지며 고속윌쉬변환의 경우에는 계산결과에 $1/m$ 을 곱하면 된다.

윌쉬 함수 m 항 전개를 이용하는 경우 고속윌쉬 변환은 $p (= \log_2 m)$ 개의 단계가 필요하고 각 단계에서 m 번의 가·감산이 필요하므로 $m \log_2 m$ 번의 가·감산을 통하여 이루어진다.

3. 분포정수계의 집중정수 모델링

분포정수계(Distributed Parameter Systems)는 공간과 시간의 함수인 2개의 독립변수를 갖는 편미분 방정식으로 표현되며, 본 연구에서는 공간분할기법[9-10], 갤러킨(Galerkin) 접근방법[11-12], 리쯔(Ritz) 접근방법[12] 중에서 공간분할기법을 사용하여 분포

정수계를 집중정수계로 모델링 하였다.

3.1 고차 편미분 방정식 형태의 분포정수계 모델링

다음과 같은 분포정수계를 고려한다

$$\frac{\partial x(y, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial x(y, t)}{\partial y} + a_0 x(y, t) + b_0 u(y, t) \quad (3.1)$$

초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$x(y, 0) = x_0(y) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial x(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial x(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=y_f} = 0 \quad (3.3)$$

식(3.1)-(3.3)으로 표현되는 분포정수계에 대한 집중정수모델을 구하기 위해 공간 위치를 나타내는 변수 y 를 $n-1$ 개로 분할하여 미소증분을

$$\Delta y = \frac{y_f}{n-1} \quad (3.4)$$

라고 하고 중앙차분법을 이용하여 공간이산모델로 표현되는 집중정수모델을 결정한다. 시간의 도함수 $x(y, t)$ 를 다음과 같다고 할 때

$$\frac{\partial x(y, t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} x_i(t), \quad \text{단, } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

중앙차분법에 의해 공간변수에 대한 2차 편미분은 다음과 같이 근사화 된다.

$$\frac{\partial x(y, t)}{\partial y} = \frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{\Delta y} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2} = \frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{\Delta y^2} \quad (3.7)$$

단, $x_i(t) = x(y_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$

식(3.5)-(3.7)을 식(3.1)에 대입하면 다음과 같이 n 개의 1차 선형 미분방정식으로 근사화된다.

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = \widehat{a}_2 x_2(t) + \widehat{a}_1 x_1(t) + \widehat{a}_0 x_0(t) + b_0 u_1(t) \quad (3.8a)$$

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = \widehat{a}_2 x_{i+1}(t) + \widehat{a}_1 x_i(t) + \widehat{a}_0 x_{i-1}(t) + b_0 u_i(t) \quad (3.8b)$$

$$\frac{d}{dt} x_n(t) = \widehat{a}_2 x_{n+1}(t) + \widehat{a}_1 x_n(t) + \widehat{a}_0 x_{n-1}(t) + b_0 u_n(t) \quad (3.8c)$$

$$\text{단, } \widehat{a}_0 = \frac{a_2}{\Delta y^2}, \quad \widehat{a}_1 = -\frac{a_1}{\Delta y} - 2\frac{a_2}{\Delta y^2}, \quad \widehat{a}_2 = \frac{a_1}{\Delta y} + \frac{a_2}{\Delta y^2}$$

식(3.8)에서 $x_0(t)$ 와 $x_{n+1}(t)$ 은 식(3.3)의 경계조건으로부터 결정된다. 즉, 식(3.3)의 $y=0$ 인 경계조건을 중앙차분법을 이용하여 근사화하면 다음과 같다.

$$\frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{\Delta y} = 0 \quad (y=0 \quad \text{즉, } i=0) \quad (3.9)$$

$$x_1(t) = x_0(t) \quad (3.10)$$

또한 유사하게 $y = y_f$ 에 대하여 다음과 같다.

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) \quad (3.11)$$

위 식(3.10)과 (3.11)의 관계를 이용하면 식(3.1)은 다음과 같은 n 차 상태방정식으로 변환할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.13)$$

단, $\mathbf{x}_0 = [x_0(\Delta y) \ x_0(2\Delta y) \ \dots \ x_0(n\Delta y)]^T$,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = b_0 \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\widehat{a}_1 + \widehat{a}_0) & \widehat{a}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{a}_0 & \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{a}_0 & \widehat{a}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{a}_0 & \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{a}_0 & (\widehat{a}_1 + \widehat{a}_2) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.2 행렬식 표현 분포정수계의 모델링

다음과 같은 분포정수계를 고려한다.

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial t} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial y} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(y,t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y,t) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{x}(y,0) = \mathbf{x}_0(y) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{x}(0,t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(y_f,t) = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{x}(y,t) = \begin{bmatrix} x_1(y,t) \\ x_2(y,t) \\ \vdots \\ x_p(y,t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(y,t) = \begin{bmatrix} u_1(y,t) \\ u_2(y,t) \\ \vdots \\ u_q(y,t) \end{bmatrix}$$

식(3.16)-(3.17)로 표현되는 분포정수계에 대한 집중정수모델을 구하기 위해 공간분할기법을 적용하고 시간의 도함수 $\mathbf{x}(y,t)$ 를 다음과 같다고 할 때

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t), \quad \text{단, } i=1,2,\dots,p \quad (3.18)$$

중앙차분법에 의해 공간변수는 다음과 같이 근사화 된다(단, $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}(y_i,t)$).

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial y} = \frac{\mathbf{x}_{i+1}(t) - \mathbf{x}_i(t)}{\Delta y} \quad (3.19)$$

이때, 식(3.18)과 (3.19)를 식(3.15)에 대입하면 n 개의 1차 선형 미분방정식으로 근사화될 수 있으며, 여기에 식(3.17)의 경계조건을 적용하면 다음의 식(3.20)처럼 n 차 상태방정식으로 변환할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.20)$$

$$\text{단, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_0 & \widehat{\mathbf{A}}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{A}}_0 & \widehat{\mathbf{A}}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{\mathbf{A}}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

3.3 평가함수의 모델링

분포정수계에서 식(3.21)로 표현되는 평가함수를 최소화하는 제어입력 $\mathbf{u}(y,t)$ 를 결정하고자 할 때, 평가함수를 집중정수모델의 평가함수로 근사화 시켜야 하는 문제를 포함하고 있다. 이 평가함수를 공간분할 기법에 의하여 근사화 하는 방법을 설명한다. 다음의 평가함수에서

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_f} [x^2(y,t) + u^2(y,t)] dy \right\} dt \quad (3.21)$$

식(3.21)의 대괄호로 표시된 수식은 공간분할기법에 의해 다음과 같이 근사화 된다.

$$\begin{aligned} J_y &= \int_0^{y_f} [x^2(y,t) + u^2(y,t)] dy \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x^2(i\Delta y,t) + x^2((i+1)\Delta y,t)}{2} \Delta y \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{u^2(i\Delta y,t) + u^2((i+1)\Delta y,t)}{2} \Delta y \end{aligned} \quad (3.22)$$

또한 $x_i(t) = x(i\Delta y,t)$ 이므로

$$\begin{aligned} J_y &= \sum_{i=0}^{N-1} \{x_i^2(t) + u_i^2(t)\} \\ &\quad + \frac{x_1^2(t) + x_n^2(t)}{2} + \frac{u_1^2(t) + u_n^2(t)}{2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

식(3.21)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \Delta y \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (3.24)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4. 고속 월쉬 변환에 의한 분포정수 계의 해석과 최적제어

다음과 같이 표현되는 시스템의 해를 Picard의 반복연산법에 의하여 구하는 문제를 고려한다. 식(4.1)과 같이 주어지는 n차 선형계의 해는

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

식(4.1)을 적분하고 최초 해를 $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ 으로 가정하면 다음과 같다

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \int_0^t \mathbf{x}^0(\tau) d\tau + \mathbf{B} \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

반복 적용할 때 k번째의 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \int_0^t \mathbf{x}^{k-1}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

단, $k=1, 2, 3, \dots$

주어진 식(4.1)의 상태방정식이 Lipschitz 조건을 만족한다면 Picard에 의한 식(4.3)의 반복 연산에 의해 다음을 만족하는

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \| \mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t) \| \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

식(4.1)의 미분방정식의 해가 존재한다[13]. $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때, 구간 $[0, T)$ 에서 월쉬 함수를 적용하여 식(4.3)의 해를 구하는 문제를 고려한다. 우선 $\mathbf{x}^k(t)$ 와 초기조건 및 $\mathbf{u}(t)$ 를 각각 다음과 같이 월쉬 함수로 나타낸다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{X}_i^k \text{Wal}(i, t) = \mathbf{X}^k \text{Wal}(t) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{X}_{0,i} \text{Wal}(i, t) = \mathbf{X}_0 \text{Wal}(t) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{U}_i \text{Wal}(i, t) = \mathbf{U} \text{Wal}(t) \quad (4.7)$$

단, $\text{Wal}(t)$ 는 m개의 월쉬 함수로 구성되는 m차 월쉬 벡터, $\mathbf{X}^k = [\mathbf{X}_0^k, \mathbf{X}_1^k, \dots, \mathbf{X}_{m-1}^k]$ 는 $\mathbf{x}^k(t)$ 의

월쉬 계수 행렬($n \times m$)로 결정해야 할 값이다. 또한 \mathbf{X}_i^k 는 상태벡터 $\mathbf{x}^k(t)$ 의 i 번째 월쉬 계수로 n차 벡터이다. 초기조건에 대한 월쉬 계수행렬은 $\mathbf{X}_0 = [\mathbf{X}_{00}, 0, \dots, 0]$ 으로 첫 번째 계수만 $\mathbf{X}_{00} = \mathbf{x}_0$ 의 값을 취하며 나머지는 모두 0의 값을 취한다. \mathbf{U}_i 는 $\mathbf{u}(t)$ 에 대한 i 번째 월쉬 계수로 r차 벡터이고, $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{m-1}]$ 로 $\mathbf{u}(t)$ 에 대한 월쉬 계수행렬($r \times m$)이다. 식(4.5)-(4.7)의 관계를 식(4.3)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^k \text{Wal}(t) &= \mathbf{X}_0 \text{Wal}(t) + \mathbf{A} \int_0^t \mathbf{X}^{k-1} \text{Wal}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \int_0^t \mathbf{U} \text{Wal}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{X}_0 \text{Wal}(t) + \mathbf{A} \mathbf{X}^{k-1} \int_0^t \text{Wal}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \mathbf{U} \int_0^t \text{Wal}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

위 식(4.8)에서 월쉬 함수의 적분은 시간 t의 함수이다. 적분 가능한 임의 함수를 월쉬 함수로 전개할 수 있는 것과 마찬가지로 월쉬 함수의 적분 역시 월쉬 함수로 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\int_0^t \text{Wal}(\tau) d\tau = \mathbf{P}_m \text{Wal}(t) \quad (4.9)$$

\mathbf{P}_m 은 시퀀시배열 월쉬 함수의 적분연산행렬로 다음의 식 (4.10)과 같으며, m은 월쉬 함수 전개 함수이고, 식에서 \mathbf{P}, \mathbf{R} 은 정방행렬이며 첨자는 행렬의 크기를 나타낸다.

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{m/2} & -\frac{1}{2m} \mathbf{R}_{m/2} \\ \frac{1}{2m} \mathbf{R}_{m/2} & \mathbf{0}_{m/2} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = 1/2 \quad (4.10)$$

또한 \mathbf{R} 은 역대각 단위행렬이고 앞으로 적분연산 행렬을 편의상 \mathbf{P} 로 표기한다. 식(4.10)에 월쉬 함수의 적분연산행렬을 도입하고 양변의 월쉬 벡터를 소거하면 다음의

$$\mathbf{X}^k = \mathbf{X}_0 + \mathbf{A} \mathbf{X}^{k-1} \mathbf{P} + \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{P} \quad (4.11)$$

대수 방정식으로부터 $\mathbf{x}^k(t)$ 의 월쉬 계수행렬인 \mathbf{X}^k 를 구할 수 있다. 그런데 적분연산행렬 \mathbf{P} 는 많

은 0요소를 포함하고 있다. 월쉬 함수 $m(=2^n)$ 항 전개를 이용하는 경우 m^2 개의 요소 중 $2m-1$ 개의 요소만이 $\pm 2^{-(n+1)}$ ($n=0, 1, \dots, p$)의 값을 취하므로 이러한 특성을 이용하면 식(4.11)의 \mathbf{X}^k 를 다음과 같이 구할 수 있다.

[1] $i = 0$ 인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_{00} + \mathbf{A} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{X}_{2^j-1}^{k-1} + \mathbf{B} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{U}_{2^j-1} \quad (4.12)$$

[2] $i = 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1$
(단, $n = 1, 2, \dots, p-1$)인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\mathbf{A} \mathbf{X}_{2^n-1-i}^{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{U}_{2^n-1-i}] + \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{2^{j+1}} [\mathbf{A} \mathbf{X}_{2^j-1-i}^{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{U}_{2^j-1-i}] \quad (4.13)$$

[3] $i = 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1$ (단, $n = p$)인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\mathbf{A} \mathbf{X}_{2^n-1-i}^{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{U}_{2^n-1-i}] \quad (4.14)$$

식(4.12)-(4.14)에서 결정된 \mathbf{X}^k 를 고속 월쉬 역변환하면 $\mathbf{x}^k(t)$ 를 구할 수 있는데, 전 단계에서 구한 $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 를 비교하여 식(4.4)의 조건을 만족하는 $\mathbf{x}^k(t)$ 가 식(4.3)의 해가 된다.

이상의 과정과 같이 본 연구의 방법은 역행렬의 연산이 필요 없으며, 고속 월쉬 변환과 역변환을 이용하기 때문에 매우 간편하게 시스템의 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

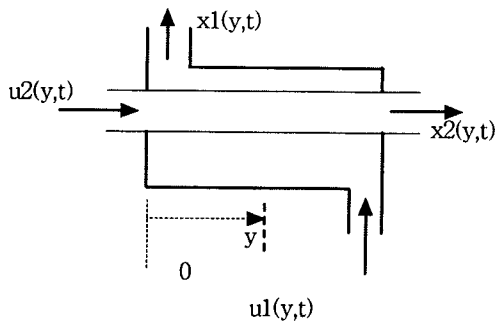


그림 5.1 흐르는 유체간의 열 교환
Fig. 5.1 Heat Exchange between Counter-Flow Fluid

5. 유체간의 열 교환 시스템

인접해 있는 두 개의 얇은 금속판으로 서로 반대 방향으로 흐르는 유체간의 열 교환은 다음과 같다.

그림 5.1에서 $x_1(y, t)$ 는 제 1 유체의 온도이며, $x_2(y, t)$ 는 제 2 유체의 온도이다. $u_1(y, t)$ 와 $u_2(y, t)$ 는 각각 유체의 가열 입력을 나타낸다.

각각의 유체의 속도를 v_1, v_2 유체간의 열 전도율을 c_1, c_2 , 또한 가열 입력과 유체간의 열 전달 비율을 c_3 라 할 때 이 모델은 다음과 같은 행렬 편미분 방정식의 분포정수계로 표현된다(단, 금속체에 대한 열 손실은 무시한다고 가정한다).

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial t} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial y} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(y, t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y, t) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{x}(y, 0) = \mathbf{x}_0(y)$$

$$\text{단, } \mathbf{x}(y, t) = \begin{bmatrix} x_1(y, t) \\ x_2(y, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(y, t) = \begin{bmatrix} u_1(y, t) \\ u_2(y, t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_0(y) = \begin{bmatrix} 1+y \\ 1+y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0, t) = 0, \quad \mathbf{x}(y_i, t) = 0,$$

$$y_i = 8, \quad \Delta y = 4$$

이때 다음과 같은 평가함수에 대한 최적제어를 고려한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_i} [\mathbf{x}^T(y, t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(y, t) + \mathbf{u}^T(y, t) \mathbf{R} \mathbf{u}(y, t)] dy \right\} dt \quad (5.2)$$

증분의 크기 $\Delta y = \frac{y_i}{n-1}$ 이다. $n=3$ 이라 할 때 다음과 같이 모델링 된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (5.3)$$

단, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7/8 & 1 & -1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -9/8 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9/8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ x_{13}(t) \\ x_{23}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) \\ u_{21}(t) \\ u_{12}(t) \\ u_{22}(t) \\ u_{13}(t) \\ u_{23}(t) \end{bmatrix},$$

식(5.2)를 분포정수계의 평가함수로 변형하면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (5.4)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = 4 \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

그림 5.2, 5.3은 분포정수계의 최적상태궤적을 4장의 과정에 의해 얻은 결과이며, 분포정수계를 6차의 집중정수계로 모델링하고 윌쉬 함수 64항 전개를 이용하여 얻은 결과이다. 그림 5.2에서 6개의 상태변수는 유체의 온도분포 $x(y,t)$ 를 3개로 분할하여 집중정수계로 모델링할 때 나타나는 상태변수이다. 이들 집중정수 모델에 대한 상태변수를 합성하여 분포정수계의 온도분포를 나타내는 변수 $x(y,t)$ 를 3차원 그래프로 나타내면 그림 5.3과 같다.

6. 검토 및 고찰

본 연구의 적용 예에서는 Picard의 반복연산에서 나타나는 오차의 수렴 한계값을 10^{-8} 로 하였을 때의 결과이다.

적용 예와 유사한 연구 결과는 A.P. Sage[14]와 M.L. Wang[15] 등에 의해 얻어진바 있다. Sage는 단순히 공간분할기법만을 사용하여 분포정수계를 집중정수계로 모델링하였고, Wang은 레젠드라 함수의 특성을 이용하여 레젠드라 계수들을 상태벡터로 구성되는 집중정수 모델을 구성하였다.

표 6.1에서 본 연구의 방법과 Sage의 방법을 이용하였을 때의 평가함수 값을 비교하여 나타내었다. 표 6.2는 2점 경계치 문제에서 나타나는 반복연산의 횟수와 오차의 수렴여부를 나타낸다.

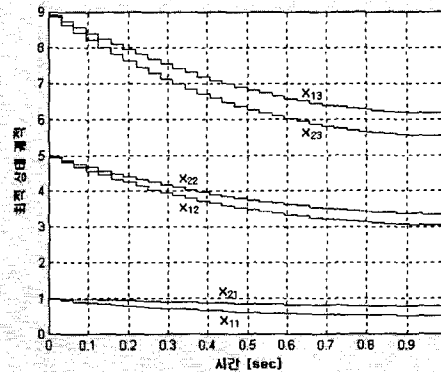


그림 5.2 적용 예의 상태 궤적(2차원)
Fig. 5.2 State Trajectory of Example (2D)

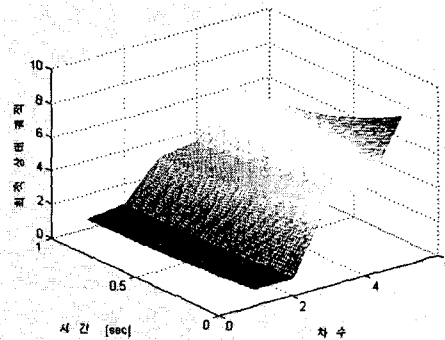


그림 5.3 적용 예의 상태 궤적(3차원)
Fig. 5.3 State Trajectory of Example (3D)

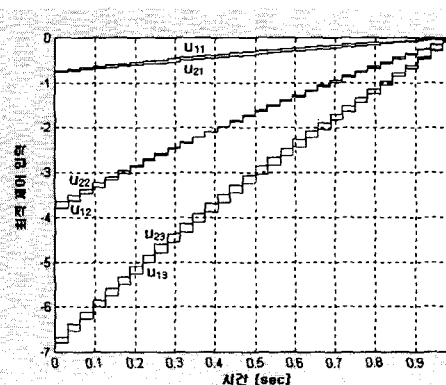


그림 5.4 적용 예의 최적제어입력(2차원)
Fig. 5.4 Optimal Control Input of Example (2D)

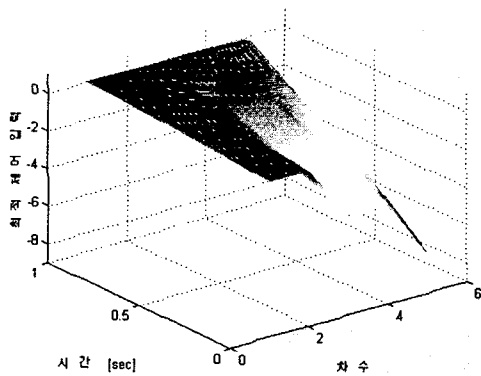


그림 5.5 적용 예의 최적제어입력 (3차원)
Fig. 5.5 Optimal Control Input of Example (3D)

표 6.1 적용 예의 평가함수 값 비교
Table 6.1 Comparison of Performance values of Example

M	본 연구	Sage의 방법
32	.20109988E+03	.20264539E+03
16	.20112682E+03	.20411614E+03
8	.20123473E+03	.20697394E+03

7. 결론

본 연구에서는 분포정수계를 공간분할기법을 사용하여 집중정수계로 모델링하고 고속 월쉬 변환과 Picard의 반복연산법을 고차 편미분 방정식과 행렬 편미분 방정식에 적용하여 분포정수계의 상태 해석을 간편하게 수행할 수 있는 새로운 알고리즘을 제시하였다.

본 연구 방법을 사용하면, 고속 월쉬 변환과 Picard의 반복연산법에 의한 단순한 가·감산처리에 의하여, 분포정수계를 집중정수계로 모델링할 경우 시스템의 차수가 증가하게 되는데 따른 연산량의 증가에 무관하게 시스템의 해석을 수행할 수 있다.

또한 월쉬 함수를 도입할 때 수반되는 고차 적분 연산행렬이 많은 0 요소를 포함하는데 착안하여 고차 적분연산행렬을 직접 이용하지 않고 대응되는 요소만을 이용함으로써 리카티 방정식의 해 및 시스템의 해를 보다 간편하게 결정할 수 있다.

표 6.2 적용 예에 대한 오차의 수렴정도
Table 6.2 Convergence of Error of Example
($e(t) \leq 10^{-8}$)

진개 반복 횟수	m=8	m=16	m=32
1	.239296E-00	.119999E-00	.600439E-01
2	.731994E-01	.365976E-01	.182987E-01
3	.465974E-01	.228248E-01	.113540E-01
4	.748171E-02	.349166E-02	.171556E-02
5	.219160E-02	.939702E-03	.451518E-03
6	.193825E-03	.731762E-04	.339590E-04
7	.348379E-04	.110557E-04	.488268E-05
8	.207535E-05	.527440E-06	.217995E-06
9	.269542E-06	.522781E-07	.198484E-07
10	.122396E-07	.000000E-00	.000000E-00
11	.000000E-00		

참 고 문 헌

- [1] Seidman, T.I., Approximation Methods for Distributed Parameter Systems, Distributed Parameter Systems, Pergamon Press, Elmsford, NY, 1983.
- [2] Kitamura, s., Y.Taniguchi, "Parameter Estimation of One and Two-Dimensional Heat Conduction Processes using a Microcomputer", Int. J. of Control, Vol.34, pp955-963, 1981.
- [3] K. Watanabe, M. Iwasaki, "A Fast Computational Approach in Optimal Distributed Parameter State Estimation", Trans. of Asme, Vol.105, pp1-10, 1983.
- [4] D.J. Cooper, "Comparition of linear distributed parameter filters to lumped approximants", AIChE J., Vol.32, pp.186-194, 1986.
- [5] T.J. Codon, "Simple method for design of Lyapunov functional in distributed parameter systems", Int. J. Control, Vol.46, pp.709-717, 1987.
- [6] M. S. Corrington, "Solution of Differential and Integral Equations with Walsh Functions", IEEE Trans. Circuit Theory, vol.20, pp.470-476, 1973.
- [7] M. Ruzaghi, "Fourier Series Approach for the Solution of Linear Two-Point Boundary Value Problems with Time Varying Coefficients", Int. J. System Science, vol.21, no.9, pp.1733-1794, 1990.
- [8] 안두수, 적교함수와 응용, 북두출판사, 1997.
- [9] Koda, M., "Finite Difference Implementation of Distributed Parameter Filters", Automatica, Vol.15, pp.687, 1979.
- [10] P. A. Omer, "Least square simulation of distributed parameter systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.20, pp.75-83, 1975.
- [11] Y. Yoshimura, "Identification on heat transfer system

- using the Celerkin method", Int. J. System Science, Vol.13, pp. 247-255, 1982.
- [12] S. G. Tzafestas, "Design of distributed parameter optimal controllers and filters via Walsh-Celerkin expansions", Control System Lab. Uni. of Patras, Greece, pp.201-217, 1978.
- [13] Shuh-Chuan Tsay and Tsu-Tian Lee, "Analysis and Optimal Control of Linear Time-varying Systems via General Orthogonal Polynomials", Int. J. System Science, vol.18, no.8, pp.1579-1594, 1987.
- [14] AP. Sage, Optimal system control, Prentice-Hall, N. J., 1977.
- [15] M. L. Wang, R. Y. Chang, "Optimal Control of Linear Distributed Parameter Systems by Shifted Legendre Polynomials", Trans. of ASME, Vol.105, pp.222-226, 1983.

◇ 저자소개 ◇

김 태 훈 (金泰勳)

1971년 2월 1일 생. 1995년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1997년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 2001년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사 과정 수료. 2000~현재 프라임테크 선임연구원.

이 승 (李勝)

1963년 5월 12일생. 1988년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1990년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2000년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1993~현재 대림대학교 자동화시스템공학과 공학부 부교수.