The Korean Communications
in Statistics Vol. 8, No. 3, 2001
pp. 711-717

Optimizations of Imperfect Repair Models[1)]

Eui Yong Lee[2)] and Seung-Kyoung Choi[3)]

Abstract

Two imperfect repair models for system are considered, one introduced by Brown and Proschan(1983) and the other by Lee and Seoh(1999). We, in this paper, after assigning repair costs to the system, optimize both repair models, when the underlying life distributions of the system are exponential, uniform and Weibull.

Keywords : imperfect repair model, decreasing mean residual life, long-run average cost, optimal proportion of perfect repair.

1. 서론

불완전수리모형(imperfect repair model)은 Brown과 Proschan(1983)에 의해 처음으로 소개되었다. 그 후, 이 모형은 많은 연구자에 의해 일반화되었고, 그 중 최근에 연구된 모형이 Lee와 Seoh (1999), Jung, Park과 Yum(1999) 등의 일반화된 불완전수리모형이다. Brown과 Proschan(1983)의 불완전수리모형은 시스템의 고장시 완전수리(perfect repair)가 확률 $p(0<p<1)$로, 불완전수리가 확률 $1-p$로 이루어지는 모형이다. 시스템의 수명분포를 F라 하면, 시간 $t>0$에서 불완전수리된 시스템의 고장시간(failure time)은 다음과 같은 분포를 가진다.

$$\overline{F}(x \mid t)=\frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)}, \qquad x>0.$$

Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형은 시스템의 고장시 완전수리와 불완전수리의 선택이 마르코프 연쇄과정(Markov chain)에 따라 결정되는 모형이다. 즉, 새로운 시스템으로 출발한 후, 따라오는 시스템의 수리는 아래와 같은 추이확률행렬(transition probability matrix)에 따라 결정된다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix} \end{array}$$

---

1) This paper was supported by Sookmyung Women's University Research Fund, 2000.
2) Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742.
E-mail : eylee@sookmyung.ac.kr
3) Lecturer, Department of Informatics & Statistics, Kunsan National University, Kunsan 573-701.
E-mail : csk76@hanmail.net

여기서, 0은 완전수리, 1은 불완전수리이고, $0 \le \alpha, \beta \le 1$이다. 만약, $\alpha = 1 - \beta = p$이면 Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형은 Brown과 Proschan(1983)의 모형으로 축소된다.

본 논문 2장에서는, Brown과 Proschan(1983)의 불완전수리모형에 완전수리비용 C_1과 불완전수리비용 C_2를 부과한 후, F가 DMRL(decreasing mean residual life)일 때, 단위시간당 평균비용 $C(p)$를 최소화하는 p가 유일하게 존재한다는 Lee와 Lee(1999)의 결과를 이용하여 최적화를 연구한다. 즉, F가 DMRL인 지수분포, 균일(uniform)분포, 와이블(Weibull)분포일 때, 단위시간당 평균비용 $C(p)$를 구하고 이를 최소화하는 유일한 p를 찾는다. 3장에서는, Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형에서 2장과 같이 완전수리비용 C_1과 불완전수리비용 C_2를 고려한 후, 시스템의 수명분포가 지수분포, 균일분포, 와이블분포일 때, 단위시간당 평균비용 $C(\alpha, \beta)$를 계산하고, 이를 최소화하는 유일한 α와 β를 구한다.

2. Brown과 Proschan의 불완전수리모형에서의 최적화

Brown과 Proschan(1983)의 불완전수리모형에서 완전수리비용을 C_1, 불완전수리비용을 C_2라고 하고, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용(long-run average cost per unit time)을 구하면

$$C(p) = \frac{pC_1 + (1-p)C_2}{p\mu(p)}, \qquad 0 < p \le 1$$

로 주어진다[Lee와 Lee(1999)]. 여기서, $\mu(p) = \int_0^\infty \overline{F}^{\,p}(t)\,dt$ 이고, 연속된 두 완전수리 사이의 평균시간을 나타낸다. $C(p)$의 분모를 $g(p)$, $C'(p)$의 분자를 $A(p)$로 놓고, $A(p)$를 구하면

$$A(p) = (C_1 - C_2)g(p) - g'(p)\{pC_1 + (1-p)C_2\} \tag{2.1}$$

이 된다. Lee와 Lee(1999)는 $A(p) = 0$를 만족하는 p가, F가 DMRL이면, 유일하게 존재함을 보였다.

F가 지수분포인 경우는, 지수분포의 비기억성(memoryless property) 때문에 완전수리 후 고장시간의 분포와 불완전수리 후 고장시간의 분포가 같다. 그래서, $C_1 > C_2$인 경우에는 불완전수리만 하는 $p = 0$일 때 최적화가 이루어지고, 이 때, 단위시간당 평균비용은 λC_2가 된다. $C_1 \le C_2$인 경우는 완전수리만 하는 $p = 1$일 때 최적화가 이루어지고, 이 때, 단위시간당 평균비용은 λC_1이 된다. 시스템의 수명분포가 균일분포, 와이블분포인 경우를 차례로 알아보면 다음과 같다.

2.1 균일분포

본 논문에서 연구되는 균일분포의 수명분포는 다음과 같다.

$$\overline{F}(t)=1-\frac{t}{a}, \quad 0<t<a.$$

이 수명분포는 시간이 갈수록 평균잔여수명(mean residual life)이 작아지는 DMRL이다. 총 수리비용을 최소화하는 p를 구하기 위해서 단위시간당 평균비용 $C(p)$와 식 (2.1)의 $A(p)$를 구하면 아래와 같다.

$$C(p)=\frac{p^2(C_1-C_2)+pC_1+C_2}{ap}$$

$$A(p)=\frac{a}{p+1}\left\{p(C_1+C_2)-\frac{p}{p+1}(C_1-C_2)-\frac{1}{p+1}C_2\right\}.$$

여기서, $A(p)=0$을 만족하는 p를 구하면

$$p=\sqrt{\frac{C_2}{C_1-C_2}}$$

이 된다. p는 0과 1사이에 존재하는 값이므로 아래의 정리 2.1을 얻을 수 있다.

<정리 2.1>

(i) $C_1 \le 2C_2$인 경우에는, 시스템이 고장났을 때 완전수리만 하는 $p=1$에서 $C(p)$가 최소화된다. 이 때, 최소비용은 $C(p)=2C_1/a$이다.

(ii) $C_1>2C_2$인 경우에는, 시스템이 고장났을 때 $p=\sqrt{\frac{C_2}{C_1-C_2}}$의 비율로 완전수리를 하는 것이 $C(p)$를 최소화한다. 이 때, 최소비용은 $C(p)=\{C_1+2\sqrt{C_2(C_1-C_2)}\}/a$이다.

2.2 와이블분포

본 논문에서 연구되는 와이블분포의 수명분포는 다음과 같다.

$$\overline{F}(t)=e^{-at^b}, \quad t>0,\ a>0,\ b>1.$$

모수 $b>1$인 경우 위 와이블분포가 DMRL이 됨은 잘 알려진 사실이다. 총 수리비용을 최소화하는 p를 구하기 위해서 단위시간당 평균비용 $C(p)$와 식 (2.1)의 $A(p)$를 구하면 아래와 같다.

$$C(p)=\frac{(pa)^{\frac{1}{b}}b\{pC_1+(1-p)C_2\}}{\Gamma(\frac{1}{b})p}$$

$$A(p)=\frac{1}{b}a^{-\frac{1}{b}}p^{-\frac{1}{b}}\Gamma(\frac{1}{b})\left\{p(C_1-C_2)-(1-\frac{1}{b})(pC_1+(1-p)C_2)\right\}.$$

여기서, $A(p)=0$을 만족하는 p를 구하면

$$p=\frac{(b-1)C_2}{C_1-C_2}$$

이 되고, 우리는 아래의 정리 2.2를 얻을 수 있다.

<정리 2.2>

(i) $C_1 \le bC_2$인 경우에는, 시스템이 고장났을 때 완전수리만 하는 $p=1$에서 $C(p)$가 최소화된다. 이 때, 최소비용은 $C(p)=a^{\frac{1}{b}}bC_1/\Gamma(\frac{1}{b})$이다.

(ii) $C_1 > bC_2$인 경우에는, 시스템이 고장났을 때 $p=\frac{(b-1)C_2}{C_1-C_2}$ 비율로 완전수리를 하는 것이 최적이 된다. 이 때, 최소비용은 $C(p)=\left(\frac{a(b-1)C_2}{C_1-C_2}\right)^{\frac{1}{b}}\frac{b^2(C_1-C_2)}{\Gamma(\frac{1}{b})(b-1)}$ 이다.

3. Lee와 Seoh의 불완전수리모형에서의 최적화

Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형에서 연속된 두 완전수리 사이의 기간의 분포와 기대값은 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{F}_{\alpha,\beta}(t)=\left(\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}\right)\overline{F}(t)+\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)\overline{F}^{1-\beta}(t)$$
$$\mu=\left(\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}\right)\mu(1)+\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)\mu(1-\beta).$$

그리고, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용은

$$C(\alpha,\beta)=\frac{(1-\beta)C_1+(1-\alpha)C_2}{(1-\beta)\mu(1)+(1-\alpha)g(1-\beta)}$$

로 주어진다[Lee와 Seoh(1999)]. 여기서, $g(1-\beta)=(1-\beta)\{\mu(1-\beta)-\mu(1)\}/\beta$이다. Lee와 Seoh(1999)는 α와 β를 동시에 통제할 때, 시스템 수명분포가 DMRL이면 단위시간당 최소 평균비용이 $C_1/\mu(1)$ 또는 $C(0,\beta^*)$로 주어짐을 보였다. 여기서, β^*는 아래 방정식을 만족하며 유일

하게 존재한다.

$$C_2\mu(1) - C_1 g(1-\beta) + \{(1-\beta)C_1 + C_2\}g'(1-\beta) = 0. \tag{3.1}$$

수명분포가 지수분포인 경우는, 지수분포의 비기억성 때문에 Brown과 Proschan 모형에서와 같은 결과가 얻어진다. 즉, $C_1 > C_2$일 때는 불완전수리만 하는 것이 최적이고, $C_1 \le C_2$일 때는 완전수리만 하는 것이 최적이 된다. 시스템의 수명분포가 균일분포, 와이블분포인 경우를 차례로 알아보면 다음과 같다.

3.1 균일분포

균일분포에서 완전수리후 다음 완전수리까지의 생존함수는

$$\overline{F}_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}\left(1-\frac{t}{a}\right) + \frac{1-\alpha}{\beta}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{(1-\beta)}$$

이 된다. 위 식으로부터 균일분포인 경우에 단위시간당 평균비용 $C(\alpha,\beta)$를 구하면 아래와 같다.

$$C(\alpha,\beta) = \frac{2(2-\beta)\{(1-\beta)C_1 + (1-\alpha)C_2\}}{a(1-\beta)(3-\alpha-\beta)}.$$

자세한 유도과정은 단순계산이어서 생략한다. 시스템 수명분포가 균일분포인 경우에 식 (3.1)을 만족하는 β^*값을 구해 보면

$$\beta^* = \frac{(C_1 - 2C_2) - \sqrt{C_2(2C_1 - C_2)}}{C_1 - C_2}$$

이 된다. β^*는 0과 1사이에 존재하는 값임을 인지하고, $C(1,\beta)$와 $C(0,\beta^*)$를 비교하면 다음 정리 3.1을 얻을 수 있다.

<정리 3.1>

(i) $C_1 \le 2C_2$인 경우에는, 시스템이 고장이 났을 때 완전수리만하는 $\alpha=1$에서 $C(\alpha,\beta)$가 최소화된다. 여기서, β값은 완전수리만 이루어지므로 그 의미가 없어진다. 이 때, 최소비용은 $C(1,\beta) = \dfrac{2C_1}{a}$이다.

(ii) $2C_2 < C_1 \le 5C_2$인 경우에는, 시스템이 고장났을 때 완전수리와 불완전수리를 교대로 하는 $\alpha=0, \beta=0$에서 $C(\alpha,\beta)$가 최소화된다. 이 때, 최소비용은 $C(0,0) = \dfrac{4(C_1+C_2)}{3a}$이다.

(iii) $C_1 > 5C_2$인 경우에는, $\alpha = 0, \beta^* = \dfrac{(C_1 - 2C_2) - \sqrt{C_2(2C_1 - C_2)}}{C_1 - C_2}$로 하는 것이 최적이고, 최소비용은 $C(0, \beta^*) = \dfrac{(2C_1 - C_2)\{C_2\sqrt{C_2(2C_1 - C_2)} + 2C_1C_2\} + C_1^2\sqrt{C_2(2C_1 - C_2)}}{a\{C_2(2C_1 - C_2) + C_1\sqrt{C_2(2C_1 - C_2)}\}}$이 된다.

3.2 와이블분포

와이블분포에서 완전수리후 다음 완전수리까지의 생존함수는

$$\overline{F}_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} e^{-at^b} + \frac{1 - \alpha}{\beta} e^{-(1-\beta)at^b}$$

이 된다. 위 식으로부터 와이블분포인 경우에 단위시간당 평균비용 $C(\alpha, \beta)$를 구하면 아래와 같다. 여기서도 자세한 유도과정은 단순계산이어서 생략한다.

$$C(\alpha, \beta) = \frac{\beta b a^{1/b}\{(1-\beta)C_1 + (1-\alpha)C_2\}}{\Gamma(\frac{1}{b})(1-\beta)\{\beta + (1-\alpha)(1-\beta)^{-1/b} - (1-\alpha)\}}.$$

시스템의 수명분포가 와이블분포인 경우에, 식 (3.1)의 좌변을 $B(\beta)$라 놓으면 다음과 같이 구해진다.

$$B(\beta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{b})[\beta^2 C_2 - \beta(1-\beta)C_1\{(1-\beta)^{-1/b} - 1\}]}{\beta^2 b a^{1/b}} + \frac{\Gamma(\frac{1}{b})\left[\{(1-\beta)C_1 + C_2\}\left\{(1-\frac{1}{b})(1-\beta)^{-1/b} + \frac{1}{b}(1-\beta)^{1-1/b} - 1\right\}\right]}{\beta^2 b a^{1/b}}.$$

$B(\beta)$는 $[0,1]$에서 증가함수이므로, $\lim_{\beta \to 0} B(\beta) > 0$이면 $B(\beta) = 0$을 만족하는 β^*는 $[0,1]$에서 존재하지 않고, $\lim_{\beta \to 0} B(\beta) \le 0$이면 $B(\beta) = 0$을 만족하는 β^*가 $[0,1]$에서 유일하게 존재함을 알 수 있다. $\lim_{\beta \to 0} B(\beta)$의 값을 구하기 위해 L'Hospital's rule을 두 번 적용하면

$$\lim_{\beta \to 0} B(\beta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{b})\left[C_1\left\{(\frac{1}{b} - 1)(-2 - \frac{1}{b}) - 2\right\} + C_2\left\{(1 - \frac{1}{b})\frac{1}{b} + 2\right\}\right]}{2ba^{1/b}}$$

이 된다. 즉, $C_1 > (2b-1)C_2$인 경우 $\lim_{\beta \to 0} B(\beta) \le 0$이 된다. 이 사실과 함께 $C(1,\beta)$와 $C(0,\beta^*)$를 비교하면 우리는 다음 정리 3.2를 얻을 수 있다.

<정리 3.2>

(i) $C_1 \ge bC_2$인 경우에는, 시스템이 고장이 났을 때 완전수리만하는 $\alpha = 1$일 때 $C(\alpha,\beta)$가 최소화된다. 여기서도 β값은 완전수리만 이루어지므로 그 의미가 없어진다. 이 때, 최소비용은 $C(1,\beta) = C_1 b a^{1/b} / \Gamma(\frac{1}{b})$이 된다.

(ii) $bC_2 < C_1 \le (2b-1)C_2$인 경우에는, 시스템이 고장났을 때 완전수리와 불완전수리를 교대로 하는 $\alpha = 0, \beta = 0$에서 $C(\alpha,\beta)$가 최소화된다. 이 때, 최소비용은 L'Hospital's rule을 적용하여 $C(0,0) = \dfrac{ba^{1/b}(C_1 + C_2)}{\Gamma(\frac{1}{b})(\frac{1}{b}+1)}$이 됨을 알 수 있다.

(iii) $C_1 > (2b-1)C_2$인 경우에는, $\alpha = 0$, $\beta = \beta^*$ $(0 < \beta^* < 1)$에서 최소비용을 갖는다. 여기서, β^*는 다음 식을 만족하며 유일하게 존재한다.

$$\beta^2 C_2 - \beta(1-\beta)C_1\{(1-\beta)^{-1/b} - 1\} + \\ \{(1-\beta)C_1 + C_2\}\left\{(1-\frac{1}{b})(1-\beta)^{-1/b} + \frac{1}{b}(1-\beta)^{1-1/b} - 1\right\} = 0.$$

참고문헌

[1] Brown, M. and Proschan, F.(1983). Imperfect repair, *Journal Applied Probability*, Vol. 20, 851-859.

[2] Jung, G.M., Park, D.H. and Yum, J.K.(1999). Cost optimization of ineffective periodic preventive maintenance, *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 6, 99-105.

[3] Lee, E.Y. and Lee, J.(1999). An optimal proportion of perfect repair, *Operations Research Letters*, Vol. 25, 147-148.

[4] Lee, E.Y. and Seoh, M.(1999). A repair process with embedded Markov chain, *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 28, 515-522.

[5] Ross, S.M.(1983). *Stochastic Processes*, Wiley, New York.