

Linked Block Designs for Diallel Cross Experiment¹⁾

Jong Sung Bae²⁾, Yung Man Lee³⁾, Jang Sun Baek⁴⁾

Abstract

In this paper we consider the properties of group divisible designs and triangular designs which belong to linked block designs. These designs have minimum number of experiments among the same average efficiency factor. Optimal complete diallel cross designs are constructed by these designs. A list is prepared of all linked block designs in the class of group divisible designs and triangular designs enumerated by Clatworthy(1973).

Keywords : Average Efficiency Factor, Complete Diallel Cross, Linked Block Design

1. 서론

처리 수 v , 블록 수 b , 블록의 크기 k , 반복 수 r , 첫 번째 동반(first associates) λ_1 , 두 번째 동반(second associates) λ_2 인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획(Partially Balanced Incomplete Block Design: PBIBD)을 $D(v, k, r, b, \lambda_1, \lambda_2)$ 로 표기하기로 한다. $D(v, k, r, b, \lambda_1, \lambda_2)$ 에서 $v, k, r, b, \lambda_1, \lambda_2$ 를 PBIBD의 제 1종의 모수라 하고, 특히 $b = v$ 인 디자인을 대칭계획(symmetric design)이라 한다. 이어진 블록계획(Linked block design)이란 블록이 정확히 u 개의 처리를 공통으로 포함하고 있는 블록계획을 말한다. 이어진 블록계획은 Youden(1951)에 의해 처음 소개되어 Roy 와 Lada(1956-1957)는 이어진 블록계획을 3가지 다음과 같이 3가지 범주로 분류하였다.

- i) 대칭(symmetrical) 균형된 불완비 블록계획.
- ii) 부분적으로 균형된 불완비 블록계획.
- iii) 알려진 어떤 형태에도 속하지 않은 불규칙계획(irregular designs).

-
- 1) This work was supported by Chonnam National University Research Fund
 - 2) Professor, Information and Telecommunication Research Institute, Department of Statistics, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea
E-mail : jsbae@chonnam.chonnam.ac.kr
 - 3) Professor, Department of Agricultural Biology, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea
E-mail : ymlee@chonnam.chonnam.ac.kr
 - 4) Associate Professor, Research Institute for Basic Sciences, Department of Statistics, Chonnam National University, Kwang-ju, 500-757, Korea
E-mail : jbaek@chonnam.ac.kr

배종성과 김공순(2000)은 대칭 균형된 불완비 블록계획은 실험 횟수가 동일한 균형된 불완비 블록계획. 중 평균효율이 가장 높다는 사실을 이용하여 이어진 블록계획에 속하는 대칭 균형된 불완비 블록계획을 매개 디자인으로 설계된 n -ary 블록 완전 이면교배 실험은 추정된 일반조합능력효과들의 차에 대한 분산의 평균이 최소가 됨을 보였다.

우리는 $D(v, k, r, b, \lambda_1, \lambda_2)$ 가 $d(d \geq 1)$ 번 반복된 PBIBD가 존재하는 경우 이를 $D(v, k, dr, db, d\lambda_1, d\lambda_2)$ 이라 하고 이를 디자인의 정준효율인자(canonical efficiency factor)의 조화평균 혹은 평균효율(average efficiency)

$$E = \frac{\text{화률화블록계획의 두 처리 추정치 차들의 평균분산}}{\text{그룹분해계획의 두 처리 추정치 차들의 평균분산}}$$

가 동일을 보이고, E 가 같은 경우 $D(v, k, dr, db, d\lambda_1, d\lambda_2)$ 에서 최소의 실험 횟수를 갖는 계획은 이어진 블록계획이 됨을 보이고자 한다. 이 결과는 김공순과 배종성의 연구를 PBIBD로 연장하여 이어진 블록계획에 속하는 PBIBD를 이용하여 구성된 n -ary 블록 완전 이면교배계획은 최소의 실험 횟수를 갖는 이면교배 설계에 이용될 수 있을 것이다.

2. 이어진 블록계획에 속하는 그룹분해 가능계획

$v = mn$ 인 처리를 $n \times m$ 인 방격에 배열한다. 이때 v 는 크기 n 인 m 개의 그룹으로 분해될 때 같은 그룹내의 처리는 λ_1 , 다른 그룹간의 처리는 λ_2 관계에 있도록 배치된 PBIBD를 그룹분해계획(group divisible design)이라 한다. 이때 $r = \lambda_1$ 이면 싱글러 그룹분해계획 (singular group divisible design), $r > \lambda_1$ 이고 $rk = v\lambda_2$ 이면 셰미-레글러 그룹분해계획(semi-regular group divisible design), $rk > v\lambda_2$ 이면 레글러 그룹분해계획(regular group divisible design) 이라 한다.

또한 Roy와 Lada는 $v = mn$ 인 그룹분해계획에서

- i) $b = m$ 인 싱글러 그룹분해계획(singular group divisible design).
 - ii) $b = v - m + 1$ 인 셰미-레글러 그룹분해계획(semi-regular group divisible design)
- 은 이어진 블록계획에 속함을 보였다. 그룹분해계획에서 평균 효율

$$E = \frac{m(v-1)\lambda_2 e_1}{m(v-1)\lambda_2 + (m-1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (2.1)$$

이고, 여기서 e_1 은 $m(n-1)$ 개의 중근을 갖는 정준효율인자이다(John:1987, pp.56).

(보조정리1) 그룹분해계획 $D(v, db, dr, k, m, n, d\lambda_1, d\lambda_2)$ 들의 평균 효율은 동일하다.

증명. 그룹분해계획에서

$$vr = bk.$$

$$r(k-1) = (n-1)\lambda_1 + n(m-1)\lambda_2.$$

이므로 v, k, n, m 이 고정된 상수라면, $D(v, k, r, b, \lambda_1, \lambda_2)$ 을 d 번 반복한 계획은 $r = dr, b = db, \lambda_1 + \lambda_2 = d(\lambda_1 + \lambda_2)$ 이다.

이 사실을 (2.1)식에 대입하면 그룹분해계획 $D(v, db, dr, k, m, n, d\lambda_1, d\lambda_2)$ 의 평균 효율 E_d 는 다음과 같다.

$$E_d = \frac{a \cdot m(v-1)\lambda_2 e_1}{a \cdot m(v-1)\lambda_2 + a \cdot (m-1)(\lambda_1 - \lambda_2)} = E.$$

(정리 1) v, k, m, n 의 값이 동일한 그룹분해계획들 간의 평균 효율은 동일하다. 평균효율이 동일한 그룹분해계획 중에서 이어진 블록계획은 최소의 실험 횟수를 갖고 이어진 블록계획에 속하는 싱글러 그룹분해계획과 쎄미-레글러 그룹분해계획의 최소의 실험 횟수는 각각 mk 와 $(v-m+1)k$ 이다.

증명. (보조정리 1)과 싱글러 그룹분해계획이면 $b \geq m$ 이고 쎄미-레글러 그룹분해계획이면 $b \geq v-m+1$ 이다(Bose와 Connor:1952)라는 사실을 이용하면, $bk=rv$ 에서 v, k 가 고정되면 싱글러 그룹분해가능계획은 $b=m$ 일 때 mk 인 최소의 실험 횟수를 갖고 이때 $k=nr$ 이다.

쎄미-레글러 그룹분해계획은 $b=v-m+1$ 일 때 $(v-m+1)k$ 인 최소의 실험 횟수를 갖는다. <표1>에 $1.5 \leq d \leq 5$ 인 이어진 블록계획에 속하는 그룹분해계획을 Clathworthy 등(1973)에서 정리해 나열하였다. 번호 아래의 디자인 Si와 SRi는 각각 Clathworthy 등의 싱글러 그룹분해계획과 쎄미-레글러 그룹분해계획의 번호이다.

<표 1> 이어진 블록계획에 속하는 그룹분해계획

번호 ($d=1$ 이어진 블록계획)	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
S1 D(6,4,2,3,3,2,2,1)	S2	S3	S4	S5
S18 D(8,6,3,4,4,2,3,2)	S19	S20		
S21 D(9,6,2,3,3,3,2,1)	S22	S23	S24	S25
S32 D(14,6,3,7,7,2,3,1)	S33	S34		
S51 D(10,8,4,5,5,2,4,3)	S52			
S53 D(12,8,2,3,3,4,2,1)	S54	S55	S56	S57
S59 D(14,8,4,7,7,2,4,2)	S60			
S71 D(26,8,4,13,13,2,4,1)	S72			
S88 D(21,9,3,7,7,3,3,1)	S89	S90		
S98 D(12,10,5,6,6,2,5,4)	S99			
S100 D(15,10,2,3,3,5,2,1)	S101	S102	S103	S104
S110 D(22,10,5,11,11,2,5,2)	S111			
S118 D(42,10,5,21,21,2,5,1)	S119			
SR18 D(6,3,2,4,3,2,0,1)	SR19	SR20	SR21	SR22
SR41 D(12,4,3,9,4,3,0,1)	SR42	SR43		
SR58 D(20,5,4,16,5,4,0,1)	SR59			
SR75 D(30,6,5,25,6,5,0,1)	SR76			
SR80 D(14,7,4,8,7,2,0,2)	SR81 ($d=1.5$)	SR82 ($d=2$)		
SR90 D(12,8,6,9,4,3,3,4)				
SR96 D(56,8,7,49,8,7,0,1)				
SR104 D(72,9,8,64,9,8,0,1)				
SR110 D(90,10,9,81,10,9,0,1)				

3. 이어진 블록계획에 속하는 삼각형계획

$v = n(n-1)/2$ 인 처리를 $n \times n$ 인 방격에 대각선은 비워 놓고 나열했을 때 같은 행이나 같은 열에 속하는 처리는 λ_1 , 나머지 처리는 λ_2 의 관계에 따르도록 배치된 PBIBD를 삼각형계획 (triangular design)이라 한다. 삼각형계획에서 λ_1 의 관계에 있는 처리 수는 $n_1 = 2(n-2)$, λ_2 의 관계에 있는 처리 수는 $n_2 = (n-2)(n-3)/2$ 이고 2 종의 모수는 $p_{12}^1 = n-3$, $p_{12}^2 = 2(n-4)$ 이다. 또한 Roy와 Lada는 $r = 2\lambda_1 - \lambda_2$ 이고 $b = m$ 이거나 $r = (n-3)\lambda_2 - (n-4)\lambda_1$ 이고 $b = (n-1)(n-2)/2$ 인 삼각형계획은 이어진 블록계획에 속함을 보였다.

삼각형계획에서 평균효율은 (2.1)식처럼 간편한 식으로 표기하기가 곤란하기 때문에 $D(v, k, b, r, \lambda_1, \lambda_2)$ 의 평균효율 (Clatworthy 1973: pp.28-29)을 이용하여 계산한다.

$$E = [(k-1)(v-1)] / [n_1(k-c_1) + n_2(k-c_2)] \quad (2.2)$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} k\Delta &= (a+\lambda_1)(a+\lambda_2) + (\lambda_1-\lambda_2)[a(f-g) + f.\lambda_2 - g.\lambda_1]/k \\ k\Delta c_1 &= \lambda_1(a+\lambda_2) + (\lambda_1-\lambda_2)(f.\lambda_2 - g.\lambda_1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$k\Delta c_2 = \lambda_2(a+\lambda_1) + (\lambda_1-\lambda_2)(f.\lambda_2 - g.\lambda_1) \quad (2.4)$$

$$a = r(k-1), \quad f = p_{12}^1, \quad g = p_{12}^2$$

이다.

(보조정리 2) 삼각형계획에서 $D(v, db, dr, k, d\lambda_1, d\lambda_2, \text{단 } d \geq 1)$ 들의 E 값은 모두 동일하다.

증명. (2.3)식 과(2.4)식에서

$$c_1 = [\lambda_1(a+\lambda_2) + (\lambda_1-\lambda_2)(f.\lambda_2 - g.\lambda_1)]/(k\Delta),$$

$$c_2 = [\lambda_2(a+\lambda_1) + (\lambda_1-\lambda_2)(f.\lambda_2 - g.\lambda_1)]/(k\Delta)$$

이고, 삼각형계획이면 $f = (n-3)$, $g = 2n-8$ 이다.

$D(v, k, db, dr, d\lambda_1, d\lambda_2)$ 의 평균효율 E_d 는 c_1, c_2 에 $b, r, \lambda_1, \lambda_2$ 대신 $db, dr, d\lambda_1, d\lambda_2$ 를 대입하여 (2.3)식을 풀면 d 가 소거되어 $E_d = E$ 가 된다.

(정리 2) 삼각형계획에서 $D(v, db, dr, k, d\lambda_1, d\lambda_2, \text{단 } d \geq 1)$ 들 평균효율은 모두 동일하고 이어진 블록계획 일 때 최소의 실험을 갖는다.

증명. (보조정리 2)에서 평균효율은 모두 동일하므로, 삼각형계획에서

1) $r = 2\lambda_1 - \lambda_2$ 인 경우 $b = n$ 일 때 최소의 실험 횟수가 되고,

2) $r = (n-3)\lambda_2 - (n-4)\lambda_1$ 인 경우 $b = (n-1)(n-2)/2$ 인 경우 최소의 실험 횟수가 됨을 보이면 된다.

삼각형계획에서 결합행렬(concordance matrix) NN' 의 특성근 θ 는 다음과 같다.

$$\theta_0 = rk, \quad \alpha_0 = 1;$$

$$\theta_1 = r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2, \quad \alpha_1 = n-1;$$

$$\theta_2 = r - 2\lambda_1 + \lambda_2, \quad \alpha_2 = n(n-3)/2,$$

여기서 α_i 는 중근의 수이다.

따라서, $r = 2\lambda_1 - \lambda_2$ 이면 $\theta_2 = 0$ 이고 이때 $n(n-3)/2$ 개의 중근을 갖기 때문에

$$Rank(NN') = n(n-1)/2 - n(n-3)/2 = n$$

이고

$$Rank(NN') = Rank(N) \leq b$$

이므로 $b \geq n$ 이다. 따라서 $b = n$ 일 때 최소 실험의 수는 nk 이고 $k = r(n-1)/2$ 이다.

다음으로 $r = (n-3)\lambda_2 - (n-4)\lambda_1$ 이면 $\theta_1 = 0$ 이고 $(n-1)$ 개의 중근을 갖기 때문에

$$Rank(NN') = n(n-1)/2 - (n-1) = (n-1)(n-2)/2 \text{이고 } Rank(NN') \leq b \text{ 이므로}$$

$b \geq (n-1)(n-2)/2$ 이고 $b = (n-1)(n-2)/2$ 일 때 최소의 실험 횟수는 $((n-1)(n-2)/2)k$ 이고 $k = rn/(n-2)$ 이다.

<표2>에 삼각형계획에 속하는 $1 \leq d \leq 5$ 인 $D(v, db, dr, k, d\lambda_1, d\lambda_2)$ 가 나열되어 있고 Ti는 Clatworthy 등의 삼각형계획의 i번째 디자인 번호이다.

디자인 번호 앞에 *가 있는 곳은 $r = 2\lambda_1 - \lambda_2$ 이고 $b = m$ 을 만족하는 이어진 블록계획이고, *가 있는 곳은 $r = (n-3)\lambda_2 - (n-4)\lambda_1$ 이고 $b = (n-1)(n-2)/2$ 을 만족하는 이어진 블록 계획이다.

<표 2>이어진 블록 계획에 속하는 삼각형계획

d=1(이어진 블록계획)	d=2	d=3	d=4	d=5
T28 D(10,4,2,5,6,3,1,0)	T29	T30	T31	T32
T48 D(15,5,2,6,8,6,1,0)	T49	T50	T51	T52
T57 D(10,6,3,5,6,3,2,1)	T58	T59		
T65 D(21,6,2,7,10,10,1,0)	T66	T67	T68	T69
T72 D(28,7,2,8,12,15,1,0)	T73	T74	T75	T76
T86 D(45,9,2,10,16,28,1,0)	T87	T88	T89	T90
T92 D(15,10,4,6,8,6,3,2)	T93			
T96 D(55,19,2,11,18,36,1,0)	T97	T98	T99	T100
*T44 D(10,5,3,6,6,3,1,2)	T46	T47		
*T62 D(15,6,4,10,8,6,1,2)	T64			
*T83 D(15,9,6,10,8,6,3,4)	T84			

4. 응용 및 앞으로의 연구과제

이어진 블록계획에 속하는 그룹 분해가능계획과 삼각형계획은 실험횟수가 동일한 계획 중에서 평균효율이 높다는 사실을 이용하면 효율이 높은 n -ary 블록완전 이면 교배계획을 설계할 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1] 배종성 과 김공순(1999). 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용한 완전이면교배 실험. *응용통계연구* 제12권 1호, pp.253-260.
- [2] Bose,R.C.,and Connor,W.S.(1952). Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs. *Annals of Mathematical Statistics*. Vol.23, 367-382.
- [3] Clatworthy,H.W., Cameron,Mj. and Speckman,A.j.(1973). *Tables of Two-Associate Class Partially Balanced Designs*. Applied Maths. Ser. 63. Washington D C.: National Bureau of Standards.
- [4] John. J.A.(1987). *Cyclic Designs*. Chapman and Hall, London and New York.
- [5] Roy, J. and Laha, R.G.(1956). Classification and analysis of linked block designs. *Sankhya*. Vol. 17. 115-132.
- [6] Youden, W.G.(1951). Linked blocks:a new class of incomplete block designs(abstrac). *Biometrics*. Vol. 7. 124.