韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 11. 제 40권, 제 2호, 335-343.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2001, Vol. 40, No. 2, 335-343.

실수 연산의 성질에 대한 고등학생의 인지 경향

박 임 숙 (단국대학교 대학원)

1. 서 론

오늘날 수학을 익혀야 할 개념과 기술의 집합체라고 생각하기보다는 다양한 지식, 기술, 태도, 경향 그리고 감각들을 포함하는 수학적 성향을 통합적으로 획득하는 것이라고 한다. 그리하여 실생활 문제에 입각한 상황을 주어 그 문제를 해결하는데 필요한 수학적 개념과 연산 기술들을 발달시키도록 하고 있다. 실세계를 바탕으로 수학의 개념과 아이디어를 발달시켜나가는 과정을 '개념적 수학화'라 하고 그 과정은 '실세계 → 수학화와 반영 → 추상화와 형식화 → 응용에서의 수학화 → 실세계'로 순환된다고 한다(Jan De lange, 1996). 이러한 과정을 수의 연산에서 살펴볼 수 있다. 초등학교에서 자연수의 사칙연산을 다룰 때 실생활을 바탕으로 하여 학습을 진행한다. 이러한 실생활 바탕의 수업에서 교사는 다양한 예를 통하여 학생들에게 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙을 이해하도록 이끈다. 이 과정에서 학생들이 스스로 생각하여 깨닫는 반영을 통한 수학화가 진행된다. 그런데 초등학교 과정에서는 완전한 계산 대신에 암산, 추측 등을 강조하고, 새수학에서 두각을 나타낸 대부분의 개념들, 기호들, 표상도구들을 제거하였다(L. Verschaffel & E. De Corte. 1996). 중학교에서는 정수의 사칙계산으로 내용이 확장되고 기호를 사용하여 교환법칙, 결합법칙을 나타내며 음수의 계산을 위하여 여러 모델을 사용한다. 모델을 통한 학습은 반영과 수학화를 통하여 개념 또는 원리가 습득되는 것이다. 고등학교 공통수학의 실수의 연산 부분은 연산에 대한 추상개념과 법칙을 다루고, 연산의 성질을 이용하여 증명하는 문제들이 제시된다. 이는 지금까지 학습한 것과는 전혀 다른 관점에서 연산을 다루는 것이다. 초등학교 이래로 우리는 +, −, ×, ÷ 의 계산방법을 익히는데 주력해 왔다. 그런데 이 단원에서는 연산에 대하여 '닫혀있다', '항등원', '역원' 등 새로운 개념을 도입하며 지금까지 학습하여 온 실수의 사칙연산을 계산의 도구가 아닌 연구의 대상으로 보며 새로운 관점에서 다루는데, 그것은 수 집합과 연산에 대한 추상화와 형식화의 단계인 것이다. 우리의 교육과정은 이러한 단계를 잘 거쳐서 전개되고 있으나 학생들의 인지 경향은 그 단계를 따르지 못하고 있다. 예를 들면 중학교 수학에서 학생들은 곱셈의 교환법칙, 결합법칙의 용어를 익히고, 기호로 나타낸다. 그런데 인문계 고등학교 1학년 학생에게 $12\times c=c\times 12$ 를 만족하는 c 값을 모두 써 보라는 문제를 제시하였더니 90명의 학생 중 옳은 답, 예를 들면 'c는 모든 수'라고 쓴 학생은 57명이었다. 그런데 이 학생들은 교과서에서 제시되는 모양 '임의의 실수 a, b에 대하여 $a\times b=b\times a$' 를 주고 법칙의 이름을 쓰라고 했을 때 90명 모두 교환법칙이라고 썼다. 즉, 식을 쓰기는 하지만 그것의 의미를 모르는 것이다. 즉 다양한 예를 통하여 획득한 개념을 반영을 통하여 기호화하여 추상적 표현을 하였는데, 다시 구체적인 상황을 제시하였을 때는 그 의미를 잘 모르고 있는 것이다. 이는 대수적 사고 훈련이 부족하기 때문이다.

대수는 수학에서 의사소통을 하는데 주로 사용되는 언어이며, 추상적인 단계에서 개념을 조작하고 적용하는 수단이다(NCTM, 1989). 그런데 많은 경우 대수시간을 풀이과정이나 공식 등을 암기하면서 보낸다. 그러나 지금은 컴퓨터 등을 활용하여 대수에서의 귀찮은 일들을 해결할 수 있으므로, 대수적 사고에 더 많은 시간을 할애할 수 있다(Wagner & Parker, 1993; 조완영 외, 2000). 또 대수에서의 응용의 중요성은 두 가지가 있는데, 하나는 실세계 현상을 모델링하고, 추상적 기호로 표현되는 산물을 예견하는 것이고, 다른 하나는 대수의 다항식, 유리수 표현, 방정식 등 그 자체가 추상적인 대수 구조(환,

* 2001년 9월 투고, 2001년 11월 심사 완료.
* 주제어 : 실수의 연산, 개념, 형식화.

체, 벡터공간 등)의 구체적인 예가 되는 것이다. 중등학교의 대수가 고등수학의 추상적 구조에 의미를 주는 것이다. 그러나 우리는 중등학교 과정에서 실생활의 모델링 만을 강조하고 있는데, 대수의 구조적 측면을 강조하는 것이 실생활의 모델링에도 도움이 되고 학습에 균형을 이룬다(Wagner & Parker, 1993). 우리의 교육과정에서도 실생활의 응용에 관한 것은 주로 방정식과 함수 부분에서 많이 다루어지고, 실생활을 바탕으로 한 문제도 많이 주어진다. 그러나 대수적 구조에 대한 내용은 제한되어 있고 또 간단하게 다루고 있다. 이러한 예의 하나로 우리는 고등학교 공통수학의 실수의 연산의 성질을 들 수 있다. 이는 수와 계산이라는 산수 측면에서 수와 연산의 성질이라는 대수의 측면으로 전이되는 부분이다. 이는 추상화와 형식화의 단계인데 이 부분의 학습은 학생들에게 많은 어려움을 안겨준다. 본 논문에서는 그들이 모델이나 구체적인 조작으로부터 얻은 개념을 대수적 기호와 법칙을 이용하여 다시 표현하는 과정에서 학생들의 인지 경향을 살피고, 그 어려움을 극복할 수 있는 방안을 살피고자 한다.

2. 관련 연구

스켐프(1987)에 의하면 개념을 형성하기 위하여서는 공통점이 있는 여러 개의 경험을 필요로 한다. 그로부터 유사성을 인식하여 추상화하고 이런 추상화의 결과를 개념이라고 한다. 일상 생활 대부분의 지식은 환경에서 직접 얻어지며, 포함된 개념들은 그리 추상적이 아니다. 그러나 수학의 특수한 문제는 추상성과 일반성에 있다. 이것들은 수학에 특별히 재능이 있는 사람들이 몇 세대에 걸쳐서 성취한 것이며, 이들 또한 앞 세대가 이미 가지고 있었던 개념을 추상화하거나 일반화한 것이다. 현재의 학습자는 원래의 자료를 학습하는 것이 아니라, 존재하는 수학의 자료 처리 체계를 학습한다. 수학은 생활환경에서 직접 배울 수 없을 뿐만 아니라, 자신의 반영적 지능과 결합하여 다른 수학자에게 간접적으로 배울 수 있다. 이때 개념 체계의 실재적 구성은 반영적 추상화를 통하여 스스로 해야 하는 것이다.

홍진곤(2000)은 공통수학의 '실수의 연산의 성질' 단원에 대하여 "보통의 중학생이면 충분히 익숙해 있을 실수의 사칙연산에 대한 당연한 성질을 새삼스럽게 정리하는 정도로 이것이 이해되거나, 또 새롭게 정의된 항등원, 역원과 같은 생소한 용어는 막연히 외워야 하는 것으로 받아들여진다면, 이는 구조를 가르치려는 현재의 시도에 대한 근본적인 반성을 요구하는 문제로 제기되어야만 한다."고 하였다. 그리고 형식적인 대수 구조를 고등학교 학생에게 가르치려는 상황에서 군 개념이 전형적인 구조이며, 자기 동형사상들의 체계로 군 개념에 접근하는 것이 구조를 학습하는데 도움이 될 것이라고 하였다. 그러나 군의 개념은 체의 개념보다 더욱 일반적인 개념이고, 이러한 그의 주장을 실제로 어떻게 고등학교 학습 현장에서 활용할 수 있는지는 제시하지 않고 있다.

Filloy 외(1996)는 학교수학은 서로 연결된 개념망의 연속으로 구성되어 있고 학생들은 이 개념망을 보다 현학적이고, 정교하게 증가시켜 나가려고 하며, 수학적으로 생각하고 우리의 사고를 다른 사람들과 소통하기 위하여 사용하는 것은 수학기호 체계의 모음이라고 한다. 즉, 수학교육과정의 주요 목표는 학습자가 수학과 수학기호 체계의 유능한 사용자가 되는 것이다. 이러한 수학기호 체계에 대하여 많은 교육과정 개발자들은 수학기호체계의 중요성을 무시하는 경향이 있고 이러한 것들이 단지 개념화과정에 더해지는 것으로 생각하는 경향이 있다. 그리하여 많은 상황에서 학생들이나 교사들은 중간기호 체계(예를 들면 다이어그램 등)를 사용한다. 그러나 교수-학습과정의 마지막에는 학생들은 적당한 전통적인 기호체계에 익숙해져야 한다.

산수적 사고로부터 대수적 사고로의 전이에는 개념과 기호에 대한 이해의 변화가 뒤따른다. 예를 들면 $2x+5=7$에서 등호는 왼쪽의 결과가 오른쪽에 나타나는 것이다. 그러나 $ax+b=cx$ 형태의 방정식에서는 왼쪽의 결과가 오른쪽에 나타나는 것이 아니다. 이때 학생들은 시행착오로 접근한다. 그러나 이의 일반화를 위하여서는 새로운 이해를 필요로 한다. 이를 설명하기 위하여 천칭모델이나 이항, 혹은 역원의 개념을 사용하여 설명한다. 그러나 개념에 대한 변화가 학습자가 그 상황을 직면하는 순간에 자발적으로 일어나는 것은 아니다. 이 전이의 순간에 교사의 적절한 개입이 중요할 것이다. 또 전이된 개념들은 구체적인 상황에서 분리되어 추상화의 과정을 거치게 된다. 이와 같이 구체적인 상황

에서 추상적인 상황으로 넘어갈 때, 이 추상화 과정을 중재하는 것이 기호체계이다. 이 상황에서 학생들의 인지 경향은 문제상황을 이해하기 위하여 구체적인 상황으로 돌아가려 하기도 하고, 문제상황에는 적합하지 않은 기호체계에 관심을 두기도 하며, 식을 쓰기는 하되 그 의미를 모르고 쓰는 경향이 있다. 이러한 과정은 각각의 과정에서 단절점을 가질 수 있는데 이러한 어려움은 어떠한 대수과정에서도 뒤따른다

3. 연구 문제 및 연구방법

고등학교 공통수학(김연식 외, 1997)에서는 실수의 연산 단원에서 다음과 같은 내용을 다룬다.

일반으로, 집합 S의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 어떤 연산을 하였을 때 그 결과가 다시 S의 원소가 되면 S는 그 연산에 대하여 닫혀있다고 한다. 실수 전체의 집합을 R이라고 하면, R은 덧셈, 곱셈에 대하여 닫혀있다. 그리고 임의의 실수 a, b, c에 대하여 덧셈과 곱셈에서는

교환법칙 $a+b=b+a$, $ab=ba$
결합법칙 $(a+b)+c=a+(b+c)$,
$(ab)c=a(bc)$
분배법칙 $a(b+c)=ab+ac$

가 성립하며, 특히 0과 1은 각각 $a+0=0+a=a$, $a\times 1=1\times a=a$인 성질을 가지고 있다. 이 때, 0은 덧셈에 대하여, 1은 곱셈에 대하여 항등원이라고 한다.

또, $-a$, $\frac{1}{a}$은 각각

$a+(-a)=0$, $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$인 성질을 가지고 있다. 이때 $-a$는 덧셈에 대하여, $\frac{1}{a}$는 곱셈에 대하여 a의 역원이라고 한다.

이를 정리하면 다음과 같다.

실수의 덧셈, 곱셈에 관한 기본 성질	
실수 전체의 집합 R에서 $a\in R$, $b\in R$, $c\in R$이면	
① 닫혀있다.	$a+b\in R$, $ab\in R$
② 교환법칙.	$a+b=b+a$, $ab=ba$
③ 결합법칙.	$(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$
④ 항등원	$a+0=0+a=a$, $a\times 1=1\times a=a$
⑤ 역원	$a+(-a)=0$, $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$
⑥ 분배법칙.	$a(b+c)=ab+ac$

그리고 예제에서 다음과 같은 내용을 다룬다

실수의 덧셈, 곱셈에 대한 기본성질을 이용하여, 임의의 실수 a에 대하여 $a\cdot 0=0$임을 증명하여라

앞의 내용이 추구하는 바는 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해하는 것이다. 자연수의 사칙계산, 정수의 사칙계산을 거쳐 실수의 연산으로 개념이 확장되는 과정으로 산수적 사고에서 대수적 사고로의 전이과정이라 하겠다. 이러한 과정은 수학의 역사에서도 단번에 이루어지는 것은 아니며 실수의 대수적 구조도 오랜 시간을 거쳐서 발달하였다(이우영 외, 1996). 학생들은 "어떤 개념을 수학적으로 타당한 것으로 수용하는 기준이 실재성이 아니라는 것을 인정하고, 어떤 개념의 수학적인 타당성은 그 개념을 정의하고 공리적 구조 내에서 모순 없이 그것을 조작할 수 있는 가능성에 기초한다(우정호, 1998)."는 사실을 이 단원을 학습함으로써 알 수 있을 것이다.

본 연구에서는 위의 내용에 대하여 학생들의 인지경향을 살피고 산수적 사고에서 대수적 사고로의 전이에서 어떤 단절이 있는지 살펴서 교수-학습에 도움이 되고자 한다. 연구방법은 서울 시내 인문계 고등학교 1학년 2개

학급 90명을 대상으로 2001년 8월에 설문(부록 참조)을 실시하였다. 그 내용은 기호로 나타낸 법칙의 이름 쓰기 및 그에 대한 가역적 사고를 살펴보기, 개념 설명하기. 그리고 실수의 연산의 성질을 증명하기로 구성되어 있다. 이 내용은 고등학교 1학년 3월에 학습한 것이다.

4. 연구 결과 분석

우선 질문지 1번, 2번의 ④, ⑤번과 4번의 문제는 학생들이 법칙 또는 식을 외우는데 그 의미를 잘 파악하는지 확인하기 위한 것이다. 1번의 경우 90명의 학생 중 89명이 교환법칙, 결합법칙이라는 정답을 쓰고, 한 학생은 교환법칙은 맞게 쓰고 결합법칙을 분배법칙이라고 썼다. 이러한 기호를 사용한 법칙의 표현은 중학교 1학년에서 학습하여 익숙한 표현이므로 학생들이 다 기억을 하고 있다. 그런데 4번 문제의 답을 옳게 쓴 학생은 57명이었다. 이들은 '모든 수', '모든 실수', 혹은 '모든 복소수'라는 표현을 사용하였다. 문제 1번에서 '임의의 수'라는 표현을 썼으나 답을 '임의의 수'라고 쓴 학생은 하나도 없었다. 이는 그 표현이 학생들에게 익숙하게 받아들여지지 못함을 보이는 것이라 하겠다. 답을 기록한 학생 중에는 자연수라거나 정수라고 쓴 경우도 있고 그냥 무수히 많다라고 쓴 경우도 있다. 교육과정에서는 이미 복소수까지 수 개념을 확장하여 다루었으나 이러한 학생들은 아직 수 개념이 중학교 혹은 초등학교 수준에 머물러 있음을 나타내는 것이다. 또 부정이라고 쓴 학생들도 있는데 이는 방정식의 풀이에서 무수히 많은 실수해를 가질 때 그 풀이를 부정이라고 표현한 경우를 생각하여 그렇게 나타낸 것이다. 이것은 수학적으로 옳은 표현은 아니다. 또 기호로 표현된 1번의 내용을 4번과 같이 바꾸어 질문하였을 때, 그 문제를 해결하지 못한 학생들은 법칙을 암기할 때 $a\times b=b\times a$ 라는 식을 그냥 외울 뿐 그것의 대전제인 임의의 수 a, b에는 주의를 기울이지 않은 것이다. 즉 식의 의미를 파악하지 않고, 기계적으로 암기한 결과이다. 1번과 4번의 결과를 분석하면 학생들은 기호로 나타낸 교환, 결합법칙의 이름은 이미 중학교 때부터 자주 보아 왔기 때문에 모두 답할 수 있었지만, 식의 표현만을 보고 '임의의 실수 a, b에 대하여'라는 전제 아래에서 그 식이 성립한다는 그 의미를 완전하게 이해하고 있지는 못한 경우는 4번의 답을 할 수가 없었다. 그러므로 기호화된 수학 개념을 학생들이 잘 이해하고 있는지 그것을 확인할 수 있는 가역적인 문제를 개발하여야 하겠다. 또 수 개념의 이해도 자연수, 정수 수준에 머물러 있는 경우가 적지 않은데 이는 우리가 문제를 제시할 때 간단한 정수의 표현을 많이 사용하기 때문으로 생각된다. 이는 일반적으로 계산을 간단하게 하기 위함인데, 이는 공학의 도움으로 계산을 쉽게 할 수 있는 환경이 조성되고 있다. 그러므로 수 개념의 이해가 부족한 학생들에게는 정수 이외의 실수를 사용한 식 또는 문제를 제공하여 수의 영역을 확장시켜 줄 필요가 있다. 또, 2번에서 실수의 집합과 덧셈 +에 대한 교환, 결합법칙을 설명하여라 하는 문제를 제시하였다. 이 문제에 대하여서는 이미 1번에 식이 주어졌음에도 불구하고 48명의 학생만이 옳은 답을 제시하였다. 즉, 말로 설명하거나 덧셈기호를 써서 제대로 표현한 학생이 27명이었고, 1번 문제의 영향으로 곱셈 기호를 사용하여 표현한 학생이 21명이었다. 또, 3명의 학생은 결합법칙을 쓰는 대신 분배법칙을 썼다. 이는 1번 문제에 대하여 모두 정답을 한 것과는 매우 대조적이다. 아마도 2번의 문제를 보는 순간 용어의 뜻을 쓰는 문제임을 보고 그 문제를 읽지 조차 않은 학생들이 많아서 일 것이다. 실제로 2번 문제에 대하여 하나도 답을 하지 않은 학생이 23명이나 되었다. 이상의 결과를 보면 첫째 학생들은 기호로 표현된 식을 암기하기는 하지만 그 의미를 정확하게 깨닫고 있지는 않다. 둘째 교과서에서 즐겨 쓰는 "임의의 '라는 표현은 학생들에게 익숙한 표현이 아니다. 셋째, 이미 알고 있는 내용(교환법칙, 결합법칙과 같은 것)도 용어를 주고 그 개념을 생각하고 표현하는 것을 어려워한다. 넷째, 수개념의 확장이 쉽지 않다. 다섯째 부적절한 용어(예를 들면 부정)의 사용은 조심해야 하겠다.

<표 1> 2번 문항 분석

표현 / 용어	자연 언어표현	언어와 기호 혼합표현	기호 표현	기타	무응답
닫혀있다	25명	5명 실수+실수 =실수	7명	2명	51명
항등원	11명	10명 a+ 항등원 =항등원	17명	1명	51명

표현 / 용어	자연 언어표현	언어와 기호 혼합표현	기호 표현	기타	무응답
역원	16명	7명 (a+ 역원= 항등원)	11명		56명
교환법칙	3명		24명	22명 (곱셈으로 표현) 1명(예로 설명)	41명
결합법칙	2명		25명	20명 (곱셈으로 표현) 1명(예로 설명)	42명

2번은 '실수의 연산의 성질'에서 처음 나오는 용어인 '닫혀있다', '항등원', '역원' 그리고 이미 익숙한 '교환법칙, 결합법칙'의 뜻을 쓰는 것이다. 개념을 설명하거나 기호화할 수 있는가를 묻는 문제이다. 학생들은 1번에서 교환법칙, 결합법칙의 기호 표현을 보고 그 답을 모두 옳게 썼음에도 불구하고, 2번에서 '교환법칙, 결합법칙'을 쓰는 문제에 41명이 전혀 답을 하지 않은 것은 개념을 설명하는 것에 대하여 학생들이 자신 없어함을 나타내는 것이라 하겠다. 학생들은 수학이란 문제 풀이일 뿐이라고 말하고 용어가 나오면 잘 보지도 않고, 문제를 푸는 것은 하겠는데 무엇의 뜻을 묻는 문제는 어렵다고 한다. 공식이나 법칙이 주어지면 그 식만을 외울 뿐 그 내용을 정확하게 살펴보지는 않는다는 것을 확인할 수 있다.

위의 <표 1>에서 알 수 있듯이, '닫혀있다'에 대하여 답한 39명의 학생 중 7명은 '$a \in R$, $b \in R$, $a+b \in R$' 과 같은 기호로 설명하였고, 나머지 학생들은 '실수 + 실수 = 실수', '집합 R에 속하는 어떤 수를 더해도 그 값은 집합 R에 속한다' 같이 말로 설명하고 있거나 예를 보인다. 용어의 의미를 파악하고 설명하거나, 기호로 일반화하기 전에 글로 일반화하거나, 혹은 기호를 사용하여 잘 나타내고 있다고 하겠다. 그러나 반 이상의 학생은 그 의미를 파악하지 못하고 있다. 항등원 용어에는 39명의 학생이 답을 썼고 역원 용어에는 34명이 답을 썼다. 답의 형태는 '어떤 실수에 더하여 그 실수가 나오게 하는 수, 어떤 실수에 더하여 항등원이 되는 수' 등과 같이 말로 설명하거나 '$a+$항등원$=a$, $a+$역원$=$항등원', '$a+\square=a$, $a+\bigcirc=\square$' 와 같은 기호화로 가는 중간 표현을 쓰거나, $a+e=a$, $a+x=e$와 같이 쓴 경우(5명)가 있고, 교과서에서와 같은 기호 표현'$a+e=e+a=a$, $a+x=x+a=e$'와 같이 엄밀하게 쓴 경우는 5명이고 일반 연산 표현 *을 사용하여 설명한 경우도 있었다.

이상을 보면 실수의 연산에 대한 개념의 인지경향을 보면 용어의 뜻을 묻는 2번의 5개의 문항에 대하여 전혀 의견을 나타내지 않은 학생이 23명이나 된다. 또 개념을 이해하고 표현한 경우는 자연언어로 설명하기, 자연언어와 수학 기호를 혼합하여 개념을 표현해 보기, 그리고 기호를 통한 일반화 등으로 나타나는 데 이것이 시사하는 바는 매우 크다고 하겠다. 즉 교과서에서 추구하는 목표는 기호를 사용하여 용어의 뜻을 나타내는 것이지만, 용어의 뜻에 대하여 모든 문제를 엄밀한 표현으로 쓴 학생은 매우 적다(5명)고 할 수 있다. 구체적인 상황에서 개념의 전이가 일어나기는 하지만 그것을 상황과 분리하여 수학적으로 추상화하는 목표에는 도달하지 못한 것이다. 이러한 인지경향은 다음의 증명문제에도 영향을 미친다. 그러므로 개념을 이해하고 표현하기 위하여 자연언어로 그 의미를 표현해 보고 자연언어와 수학 기호를 혼합하여 개념을 표현하는 등 학생 나름으로 이해한 표현 과정을 거친 다음에 일반화된 수학 기호 체계로의 표현을 익히도록 할 것이다. 이때 교사는 학생들이 주의를 기울이지 않는 '임의의 실수' 등의 대전제의 중요함을 강조하여야 할 것이다.

<표 2> 3번 1) $a \times 0 = 0$ 증명 분석

분류 / 문항	답	인원수
증명이유	a×0=0임을 알기위해	19명
	수학이니까, 법칙에 쓰니까 등	4명
	그냥, 하라니까. 필요없다.	19명
	무응답	48명
증명방법	a×0 = a×(0+0)=⋯	3명
	덧셈의 일반화 a×2 = a+a, a×0은 a가 0개	14명
	1×0=0, 2×0=0이므로 a×0=0	16명
	a×0≠0 라고 가정하면⋯	8명
	기타	4명
	무응답	45명

3번의 1)경우는 학생들은 수의 계산에서 $a\times0=0$을 당연한 사실로 생각하고 지금까지 사용하였기 때문에 이를 증명의 대상으로 받아들이지 않는다. 그냥, 수학이니까, 등 증명할 필요가 없다라고 답하는 학생(23명)이 많고, 그들이 쓴 답은 '$1\times0=0$, $2\times0=0$, $3\times0=0\cdots$, 그러므로 $a\times0=0$'(16명) 혹은 '없는 것을 곱하면 없으니까 0이다' 또는'$a\times2=a+a$, $a\times1=a$이므로 $a\times0$은 a를 0번 더한 것이다. 그래서 $a\times0=0$' 과 같이 설명한다(14명). 이를 보면 학생들은 새로운 개념과 법칙에 의한 실수 집합의 재구성을 받아들이지 못하고 다시 구체적인 상황으로 돌아가고 있음을 알 수 있다. 교과서에서와 같이 '$a\times0=a\times(0+0)=a\times0+a\times0$, 양변에 $-a\times0$을 더하면 $0=a\times0$'의 답을 쓴 학생은 3명이었는데 그들은 모두 증명해야 하는 이유를 '증명하라니까 한다.'고 썼다. 그 중 한 학생은 답을 쓴 옆에 이렇게 썼다. '기억났다 ㅋㅋㅋ'. 무슨 뜻인지는 모르지만 문제에서 증명하라니까 그냥 교과서의 답을 외운 것이다. 이 외에 또 8명의 학생은 간접증명법을 이용하여 증명을 시도하였다. 즉 '$a\times0\neq0$이라 가정하고… .' 그러나 그 뒤를 이어 쓰지는 못했다. 이 학생들의 경우 당연하게 보이는 증명을 할 때 간접증명법이 유용함을 알고 있는 것이다. 그리하여 증명을 시도하였지만, 결론을 부정하는 것 이상의 진전은 없었다.

이상에서 살핀 바와 같이 실수의 연산의 성질 중 0의 곱셈에 관한 증명에 대하여 많은 학생들의 인지경향은 중학교의 정수의 계산의 수준에 머무르고 있으며, 고등학교에서 다루는 실수의 연산의 성질을 이용한 증명을 쓴 학생들은 그 의미를 생각하지 않고 그냥 외워서 쓴 것이다. 추상화의 과정에서 단절이 있음을 알 수 있다. 증명방법에서 가정으로부터 결론으로 증명을 이끌어 나가는 방법이 용이하지 않다고 생각하고 간접증명법을 시도한 학생의 경우는 그래도 무엇인가 시도를 했다는 점에서는 격려할 만 하다고 하겠다.

<표 3> 3번 2) $-(-a)=a$ 증명분석

문항 \ 분류	답	인원수
증명이유	-(-a)가 a인지 알기 위하여	5명
	(-)×(-)=(+)를 알기 위해	16명
	-, +의 관계를 알기 위해	5명
	수학이니까, 계산하기 편하라고 등	5명
	그냥, 하라니까 등	10명
	무응답	49명
증명방법	a+(-a)=0이므로, -(-a)=a	10명
	(-)×(-)=(+), 혹은 (-1)×(-1)=1	38명
	-(-a)≠a라면…	4명
	여집합으로 …	3명
	무응답	35명

2)의 경우 $-(-a)=a$ 도 역시 중학교 때 정수의 뺄셈에서 배운 것이므로 이를 증명의 대상으로 생각하지 않는다. 증명해야 할 이유를 쓴 경우로 부호의 관계, 혹은 (-)×(-)=(+)인가 알기 위해서 라고 쓴 학생이 26명이지만, 증명을 쓴 많은 학생들이 무조건 '(-)×(-)= (+)'라고 주장한다(38명). 이런 학생들은 중학교에서 음수의 계산을 위하여 수직선 모델을 이용하여 설명한 방법을 증명으로 받아들이는 것이다. 이들은 모델의 상황에서 벗어나지 못하고 있다. 그러나 모델에 의해 획득된 개념은 그 모델로부터 분리되어 형식화를 통하여 일반화되어야 한다. 수직선 모델의 단계에서 음수의 개념은 형식화의 단계로 전이될 때에는 역원의 개념으로 설명한다. 즉, 일반적으로 $-a$란 a의 덧셈에 대한 역원을 뜻한다. 즉 a와 더하면 0이 되는 것이다. 그러므로 $-(-a)$란 $-a$의 덧셈에 대한 역원을 뜻하며, $-a$와 더하여 0이 되는 것은 a이다. 그러므로 $-(-a)=a$이다. 이상을 식으로 표현하면 '$a+(-a)=0$, 여기에서 $-a$의 역원은 a이고, 그것을 식으로 나타내면 $-(-a)=a$'가 된다. 문제에 대하여 이상과 같이 표현한 학생은 2명이었는데 이 학생들은 증명해야 하는 이유는 '하라니까'라고 썼다. 기호를 사용하여 증명을 옳게 쓴 학생들은 식을 쓰기는 하지만 그 의미는 모르는 채 무조건 외워서 쓴 것이다. 이러한 방법 이외에 4명의 학생은 간접증명법을 시도하였는데 이는 앞에서와 마찬가지로 당연한 결

과의 증명에 이 방법이 유용하다고 생각하기 때문일 것이다. 특이한 것은 3명의 학생의 여집합의 개념으로 증명을 시도하였다. '$-a$는 집합 a의 여집합, $-(-a)$ = a의 여집합의 여집합, 그러므로 $-(-a)=a$'. 물론 이 표현에서 실수 a를 집합 a라고 소문자로 나타낸 것이나, 실수의 연산을 집합의 연산으로 계산한 것은 잘못되었지만, 역원의 개념과 여집합 개념을 연결하여 생각한 것은 개념의 전이가 일어난 것이라 할 수 있고 오히려 이 경우는 역원의 개념을 이해하고 있는 경우라 할 수 있을 것이다.

이상에서 살핀 바를 정리하면 학생들은 모델을 통하여 습득한 지식을 증명이 필요 없는 당연한 것으로 받아들이고, 그것을 수학적 원리와 법칙을 통하여 재구성하는 과정에서도 다시 모델로 돌아가려는 경향을 보이며, 당연하다고 생각하는 증명의 경우 간접증명법을 시도하기도 한다. 반면, 기호 표현의 의미를 파악하여 나름대로 여집합 개념을 이용한 색다른 증명을 시도하기도 한다. 이는 표현의 적절함을 무시한다면, 개념 이해를 위한 긍정적인 사고라 할 것이다.

이 질문에 대하여 전반적인 인지경향을 확인하기 위하여 한 학생을 면담하였다. 그 학생의 경우 1번, 2번, 4번의 경우에는 모두 옳은 답을 하였다. 2번의 교환, 결합법칙을 쓰는 문제에서는 자연언어로 설명을 한 후 식은 곱셈에 관한 식을 쓰는 실수를 하였다. 이는 1번 문제 때문이라고 답하였다. 반면 3번의 경우 옳은 답을 쓰지 못했다. 1)의 경우는 간접증명법을 시도하였고, 2)의 경우는 '$-(-a)=a$ 양변에 -1을 곱하면 $-a=-a$' 라고 썼다. 즉 증명해야 할 내용을 증명과정에 쓰고 있는 오류를 범하고 있는 것이다. 이 단원을 학습할 때 1), 2)와 같이 당연하다고 생각되는 것을 증명하라는데 의문이 생기지 않느냐고 질문하였더니, 수학시간에는 문제풀이가 중요하기 때문에 문제풀이가 틀리면 교사에게 질문을 하지만 개념에 대한 것이나 증명에 대한 것은 이해가 되지 않아도 질문하지 않고 그냥 외운다고 답하였다. 이는 거의 대부분의 학생들이 수학시간에 보이는 태도이다. 인문계 고등학교 학생의 경우 수학을 하는 이유는 문제풀이 때문이라 생각하고 그것은 대학 진학을 위한 것이라고 말한다. 그러므로 위에서 본 바와 같이 3번의 증명을 옳은 기호표현으로 쓴 학생들은 모두 그 이유를 '하라니까'라고 쓰며 그 이유에 대하여 생각하는 것조차 시도하지 않는 것이다. 이러한 학생들의 태도는 스스로의 사고과정을 통하여 획득해야하는 수학의 개념의 학습을 더욱 어렵게 한다.

5. 결 론

대수는 수학의 여러 분야 가운데에서도 실생활과 관련하여 많이 응용되는 분야로 초등, 중등과정에 걸쳐 매우 많은 학습을 한다. 요즈음은 이러한 대수 학습에서 실생활을 바탕으로 한 학습을 강조하고, 또 모델의 활용을 중요시한다. 정수의 사칙계산의 경우도 여러 가지 모델로 설명할 수 있다. 그러나 이와 같이 모델의 도움으로 습득된 지식이나 개념은 반영적 사고를 통한 전이과정을 거쳐서 형식화된 표현으로 나타낼 수 있어야 한다. 지금까지 논의해 온 '실수의 연산에 대한 성질'은 이러한 수학화의 한 예가 된다고 할 수 있고,. 고등수학의 준비를 위한 구체적인 예로서 주어지는 단원이라 하겠다. 이러한 내용에 대한 학생들의 인지경향은

첫째, 개념을 기호로 형식화한 경우 그 의미를 정확하게 알지 못한다. 식의 표현만을 외우고 그에 따른 전제조건은 염두에 두지 않는다. 그리하여 이미 알고 있는 기호표현을 다시 용어로 제시하고 쓰도록 한 경우 가역적 사고가 이루어지지 않는 경우가 많다. 이는 형식화 단계로 넘어올 때 학습이 단절됨을 보이는 것이다.

둘째, 개념에 대한 인지 정도를 알기 위하여 용어의 뜻을 표현하게 할 때 자연언어를 사용하거나, 자연언어와 기호를 적당하게 혼합하여 표현하는 경우가 많고 완전한 기호표현을 하는 경우는 적었다. 그러므로 개념 학습에서는 다양한 예를 통하여 그 의미를 파악하는 것이 중요하고, 앞에서 살핀 바와 같이 그 개념을 기호로 표현하기 이전에 많은 학생들은 자연언어를 활용하여 수학기호와 혼합하여 자신들이 이해한 내용을 표현해 보도록 격려한다. 예를 들면 '닫혀 있다'를 설명하는데 '실수 + 실수=실수'라고 쓰는 표현은 이를 기호화하기 전 단계로 개념의 이해는 잘 되었다고 하겠다. 물론 연역적이고 추상적인 전개를 위하여 수학기호를 사용하여야 하는데 앞에서도 살펴보았지만, 그것이 짧은 시간에 이루어지지 않는다. 이러한 언어와 기호의 혼합 표현 단계를 거친

다음 수학 기호를 사용하여 '$a \in R$, $b \in R$, $a+b \in R$'와 같이 대수적으로 표현하는 과정을 진행한다면 학생들은 개념의 의미를 보다 확실하게 알 수 있을 것이다.

셋째, 교과서는 '임의의'라는 표현을 사용하지만 학생들은 즐겨 쓰지 않는다. 그 의미를 정확하게 알지 못하는 것이다. '임의의 수'라고 써야하는데 그 표현 대신 모든 수라고 표현하여, 수 개념을 확장시키지 못한 경우는 자연수, 정수라고 쓰는 학생이 적지 않음에서 살펴볼 수 있다. 또 부적절한 용어(예를 들면 무수히 해가 많은 경우를 부정이라 하는 것)의 사용은 학생들의 인지 과정에서 장애를 일으킨다.

넷째, 학생들은 증명을 해야 하는 이유를 생각하지 않는다. 단지 당연하다든지, 아니면, 할 필요 없다 라고 하며, 증명방법도 이 단원에서 얻으려는 목표에는 도달하지 못하고 이전의 단계, 즉 정수의 계산으로 돌아가려는 경향을 보인다. 이는 이 단원에 대한 이해가 거의 이루어지지 않음을 보인다. 또 가정으로부터 결론으로의 추론이 어려워 보이므로 간접증명법을 시도하기도 한다.

다섯째, 개념은 이해하고 있으나 그것을 표현하는 방법이 적당하지 않은 경우도 있다.

이상과 같이 수의 연산이 자연수, 정수의 사칙계산을 거쳐 실수의 연산으로 형식화되는 과정에서 학생들은 많은 단절을 갖게 된다. 이러한 형식화 과정의 단절에서 학생들의 인지과정을 도울 수 있는 방법은 교과서나 교사이다. 어떤 교과서(김연식 외, 1997)는 학생들의 인지 과정을 돕기 위하여 '실수의 덧셈과 곱셈에 대한 기본 성질을 이용하여, 임의의 실수 a에 대하여 $a \cdot 0=0$임을 밝혀라.' 하고, 옆에 보충설명으로 '실수와 0과의 곱도 0임을 보이자.' 하며 왜 증명해야 하는지에 대한 보충설명을 부여하고 있다. 이러한 설명은 우리는 이 단원에서는 지금까지 당연하게 알고 사용하던 '$a \cdot 0=0$'을 앞에서 살펴본 실수의 성질들을 이용하여 새로 학습해야 하는 것임을 보여주는 것이라고 할 수 있다. 또 교사는 지식 구성 사회의 '우월한' 구성원으로서 지적으로 자극적인 분위기를 구성하고, 학습과 문제풀이 활동을 모델하고, 도발적인 질문을 하고, 학생들을 이끌면서 지원하고, 그리고 학생들의 학습에 대한 자신의 책임감을 기르도록 (L. Verschaffel & E. De Corte. 1996. p.102) 도와야 할 것이다.

제7차 교육과정(교육부, 1997)에서는 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 하고 있는 바, 이전의 학습에서 많은 양을 차지하던 계산과정 등의 학습에 소요되는 시간을 많이 줄일 수 있다. 그러므로, 새로운 개념의 이해를 위한 반영적 사고 과정이나 증명 등에 보다 더 많은 시간을 할애하여 학생들의 인지과정에 도움이 되도록 하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 1997-15호 【별책8】), 서울: 대한교과서 주식회사.

김연식 · 김흥기 (1997). 고등학교 공통수학, 서울: 동아출판사.

스켐프 (1987). 황우형옮김, 수학학습심리학, 서울: 민음사.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초, 서울 : 서울대학교 출판부.

이우영 · 신항균 역, H. Eve (1996). 수학사, 서울: 경문사.

조완영 · 권성룡 (2000). 컴퓨터공학의 도입을 위한 수학교육연구의 방향, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 39(2), pp.81-99, 서울: 한국수학교육학회.

홍진곤 (2000). 어떻게 '구조'를 가르칠 것인가 - 군 개념을 중심으로, 대한수학교육학회지 수학교육학 연구, 10(1), pp.73-84, 서울: 대한수학교육학회.

Eugenio Filloy & Rosamund Sutherland (1996) Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra, *International Handbook of Mathematics Education*, pp.139-160. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Jan De lange (1996). Using and Applying Mathematics Education, *International Handbook of Mathematics Education*, pp.49-98. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Lieven Verschaffel & Erik De Corte (1996). Number and Arithmatic, *International Handbook of Mathematics Education,* pp.99-137, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards*

for school mathematics, Reston, VA: NCTM
S. Wagner & S. Parker (1993). Advancing Algebra, *Research Ideas in the Classroom High School Mathematics*, pp.119-139. Reston, VA: NCTM

Cognitive Tendency of the Properties of Operations in 10th grade

Park, Im sook
Dankook University(Graduate School) pimsook@hanmail.net

Algebra is important part of mathematics education. Recent days, many mathematics educators emphasize on real world situation. Form real situation, pupils make sense of concepts, and mathematize it by reflective thinking. After that they formalize the concepts in abstract. For example, operation in numbers develops these course. Operation in natural number is an arithmetic, but operation on real number is algebra.. Transition from arithmetic to algebra has the cutting point in representing the concepts to mathematics sign system. In this note, we see the cognitive tendency of 10th grade about operation of real number, their cutting point of transition from arithmetic to algebra, and show some methods of helping pupils.

<부 록> 질문지

1. 다음 식에 맞는 법칙을 써라
임의의 실수 a, b 에 대하여
$a\times b=b\times a$ (　　　　　)
$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ (　　　　　)

2. 실수의 집합 R과 덧셈 $+$ 에 대하여 다음 용어의 뜻을 써 보아라(식으로 나타내어도 좋고, 말로 설명해도 좋다)
① 닫혀 있다.
② 항등원
③ 역원
④ 교환법칙
⑤ 결합법칙

3. 실수 a에 대하여 다음 문제를 생각하자
1) $a\times 0=0$
① 위의 내용을 증명을 해야 한다면 그 이유는 무엇인가?
② 증명할 수 있으면 증명을 써 보아라(수학적으로 표현하기가 어려우면 말로 설명하여도 무방함)
2) $-(-a)=a$
① 위의 문제를 증명을 해야 한다면 그 이유는 무엇인가?
② 증명할 수 있으면 증명을 써 보아라(수학적으로 표현하기가 어려우면 말로 설명하여도 무방함)

4. $12\times a=a\times 12$를 만족하는 a값은 무엇인가 써 보아라.