韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 11. 제 40권, 제 2호, 317-333.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2001, Vol. 40, No. 2, 317-333.

매개변수로 표현되는 도형의 시각화 방안

김 향 숙 (인제대학교)

I. 서 론

현재의 초, 중, 고등학교의 수학 교육 현실은 수학 개념의 정확한 이해에 초점을 맞추지 못하고 공식의 암기와 그것을 이용하여 단순한 문제 풀이에 시간을 많이 할애함으로써 수학의 기본적인 개념이나 기호의 정확한 사용법을 인지하지 못하고 계산 기능적인 면으로 치우치는 경향이 많이 나타나며, 문제 풀이의 창의적인 상황이 제시되지 않는 상태에서 교사 중심의 문제 풀이 방법에만 의존하고 있다(박경미, 1997).

이러한 문제점 속에서 창의적인 문제 해결 방안을 구상할 수 있는 사고력의 배양에 소홀함이 있다고 볼 수 있다. 따라서 학생들이 스스로 의미를 파악하여 학습할 수 있는 교수 방법이나 학습 방법에 대한 연구는 현실적으로 매우 시급한 상황에 처해 있다.

기하교육의 주된 목적 중 하나는 기하학적 직관 능력과 그것을 바탕으로 한 논리적인 추론 능력을 향상시키는 것이다. 분석적인 직관 과정에 의존함이 없이 문제의 의미, 의의, 구조를 곧바로 파악하는 직관적인 사고는 날카로운 추측, 의미심장한 가설, 잠정적인 결론으로의 과감한 도약과 같이 생산적인 사고의 매우 중요한 일면이다. 직관은 핵심적인 연결 관계를 즉각적으로 파악하는 거의 무의식적인 매우 신속한 인지과정이며, 특히 시각적인 요소와 밀접하게 관련되어 나타나는 경우가 많다(우정호, 1998). 직관과 관련된 시각적인 요소는 기하의 교수-학습에서 중요한 역할을 한다. 그러므로 기하학 학습을 위해 고안된 탐구형 소프트웨어의 시각적 요소에 대한 동작 조작 가능성은 기하교육에 많은 영향을 줄 수 밖에 없다(류희찬 외 2인, 1999).

제7차 수학과 교육과정에는 개인차와 진로를 고려한 단계형, 심화 보충형, 과목 선택형의 탐구형 학습문제 및 컴퓨터교육 강화가 실제로 반영이 되어, 학습과 교수 및 평가에서 현재와는 다른 모습으로 현장교육이 이루어질 것이라 생각한다. Technology를 수학교과에 실제로 어떻게 적용하며, 어떤 내용에 사용할 것이며, 탐구형 방식의 수업결과를 어떻게 적절히 평가할 것인가에 대한 문제는 앞으로의 해결 과제일 것이다(김향숙, 2001).

수학이 다른 학문과 구별되는 뚜렷한 성질 중의 하나는 연역적 체계를 가지고 있다는 점이다. 수학은 양면성이 있어서 하나의 수학적 사실을 발견하고 창조하기까지 과정은 귀납이고, 일단 발견된 사실을 증명하는 과정은 연역이다. 그러나 지필 환경에서 귀납적 활동을 기대하기에는 많은 한계가 있다. 현재의 수학교육은 연역적 증명에 강조를 두고 있는 측면이 많으나 수학적 기본 개념이나 원리가 학생들에게 의미를 갖도록 하는 것이 중요하므로 이를 위해서는 연역 이전에 학생들이 지식을 귀납적으로 탐구하는 과정이 필요하다. 능동적이며 자기 의미를 구성하는 귀납형태의 학습이 가능하게 하는 수업 방식의 도입이 앞당겨 질 수 있는 대안으로 Technology의 활용이 기대된다. 컴퓨터를 중심으로 하는 Technology를 활용한 수업활동은 학생들의 수업참여를 극대화시키고, 적절한 학습수준을 제시할 수 있으며, 새로운 수업 방법을 도입함으로써 학생들에게 수학에 대한 관심과 태도를 증진시켜 줄 것이다(구광조 외 2인, 1992).

컴퓨터가 가지는 다양한 기능의 활용은 추상적인 수학내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 현재의 교수-학습 방법에 대한 발전 지향적인 대안이 될 것이다.

도형을 학습하는 것은 학생들의 지능 개발을 위해서나 논리 훈련을 위해서 성장기 학생들에게 필수적이다. 또한 도형이란 무엇이며 그 성질 중 어떤 점을 중시하느

---

* 2000년 12월 투고, 2001년 6월 심사 완료.
* 주제어 : 매개변수, 공간도형, 시각화.

냐, 어떠한 방법론에 의하여 연구하느냐에 따라서 그 성격을 달리한다. 학교수학에서는 도형을 좌표평면 또는 좌표공간에서 다루기 위하여 그 방정식을 직교좌표를 써서 나타내고 있다. 이 때 해석기하학적으로 도형을 취급하고 있지만 좌표계가 고정되어 있기 때문에 변수에 속박성이 주어진다. 다시 말해서 독립변수와 종속변수의 개념이 필연적으로 등장된다. 따라서 직교좌표로 표현되는 도형의 방정식에서는 제한된 범위에서 도형의 성질을 조사하고 있다(오세춘 외 3인, 1998).

본 연구에서는 좌표의 제한에 관계없이 매개변수를 이용해서 도형을 관찰하고 매개변수로 표현되는 평면도형과 공간도형을 요약 및 정리하였으며 나아가 도형의 성질을 아는데 도움이 되는 새로운 방법으로 Mathematica를 이용하여 매개변수로 표현되는 도형을 시각화하고자 한다. 특히, 매개변수로 표현되는 공간도형의 각 매개변수의 변화에 따른 도형의 모양 변화를 시각적으로 표현하고 확인해 봄으로써, 본 연구에서는 매개변수의 기본적인 개념, 원리와 상호 관련성을 보다 구체적으로 나타내고, 또 평면 및 공간도형에 관한 문제를 보다 더 논리적으로 사고할 수 있도록 매개변수로 표현되는 도형을 시각적으로 체계화하고자 한다.

II. 매개변수로 표현되는 도형

1. 도형의 매개변수 표현

$y=f(x)$라는 함수의 그래프를 평면 위에 그릴 때 한 곡선이 얻어진다. 예컨대, $y=x^2$의 그래프는 포물선이 된다. $y=f(x)$또는 $x=g(y)$는 어느 것이나 하나의 변수를 독립변수, 다른 하나를 종속변수로 취급하고 있으므로 x와 y를 평등하게 취급하지 않고 있다. 이들을 각각 $y-f(x)=0$ 또는 $x-g(y)=0$으로 고쳐 쓰면 $F(x,y)=0$인 꼴로 통일되어 x와 y는 평등한 변수가 된다. 즉 $F(x,y)=0$이라는 식은 일반적인 곡선을 나타내는 것이 된다. 예를 들면 $x^2+y^2-a^2=0$은 원을 나타내는 방정식이다. 그러나 이것은 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$인 꼴로 나타낼 수 있지만, 두 개의 식이 필요하며 식의 모양이 우아하지 않다. 또, 가령 $x^3+2x^2y+y^3=0$또는 $z+2y^2=z^2(x^2+y^2)$과 같은 식일 때는 $y=f(x)$인 꼴로 바꾸어 쓰기도 힘들다. 그리고 $F(x,y)=0$이라는 식은 항상 곡선을 나타내는 식으로 볼 수 없다. 예를 들면, $x^2+y^2+1=0$은 해가 없다. 이렇듯 기하학적 입장에서 보면 가장 편리한 곡선의 표현법은 다음에서 말하는 매개변수 표현이다(표용수 외 1인, 2000).

t를 실수라고 할 때 $x=f(t)$, $y=g(t)$라는 두 함수 $f(t)$, $g(t)$를 평면곡선의 매개변수 표현이라 한다. t가 어떤 구간 $a\le t\le b$ 를 움직일 때, 매개변수 표현 $(f(t), g(t))$는 평면 위에서 곡선을 그린다. 위에서 말한 $y=f(x)$가 나타내는 곡선도 $x=t$ $y=f(t)$라고 쓸 수 있으므로 이것도 매개변수 표현으로 나타내어진다. $F(x,y)=0$으로 주어지는 곡선은 실제로 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내기 힘든 것도 많지만, 원의 방정식 $x^2+y^2-a^2=0$은 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$인 매개변수 표현으로 쉽게 고쳐 쓸 수 있다.

공간곡선의 매개변수 표현은 $x=x(t)$ $y=y(t)$ $z=z(t)$와 같이 3개의 t의 함수로 나타낼 수 있으며, n차원 좌표공간 안의 곡선에 대해서도 일반화하여 $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t), \cdots$, $x_n=x_n(t)$로 표현할 수 있다. 벡터의 기호를 사용하여 n차원 공간 안의 곡선을 $\alpha(t)=\alpha(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$로 나타내면 간편하고 편리하다.

곡면이란 직관적으로 그 위의 각 점에서는 평면의 일부분과 닮은 공간상의 점들의 집합이라고 생각할 수 있다. 즉, 곡면은 평면상의 점의 집합으로부터 E^3에로의 어떤 조건을 만족하는 사상의 상을 말한다. 따라서 곡면의 매개변수 표현은

$$X(u, v)=(x_1(u, v), x_2(u,v), x_3(u, v))$$

이며, 특히 $z=f(x, y)$는 $X(u, v)=(u, v, f(u, v))$인 Monge사상이라고 불리는 매개변수 표현으로 나타낼 수 있다. 본 논문에서는 먼저 평면도형과 공간도형으로 나누어 매개변수로 표현되는 도형을 요약 정리하고, 나아가 그것들을 Mathematica를 이용하여 시각화하고자 한다.

2. 매개변수로 표현되는 평면도형

평면 위에서 $x=f(t)$, $y=g(t)$ (t는 매개변수)가 나

타내는 곡선의 개형은 극치 판정법 등을 쓰면 그릴 수 있을 것이다. 왜냐하면 이미 고등학교에서 매개변수로 표시된 함수의 미분법을 학습하고 있기 때문이다. 이 절에서는 기하교육에서 취급되거나 생활 주변에서 자주 나타나는 몇 가지 평면 곡선의 매개변수 표시에 대하여 알아본다. 먼저 이 절에서는 여러 가지 평면도형을 매개방정식으로 표현해 보고, 다음 장에서 각 도형을 시각화하고자 한다.

(1) 주어진 점을 지나, 주어진 방향여현을 갖는 직선의 매개변수 방정식.

점 $P_0(x_0, y_0)$을 지나며, 방향여현이 λ, μ인 직선의 매개변수 방정식은 주어진 점 $P_0(x_0, y_0)$로부터 이 직선을 따라 ρ만큼(직선의 양의 방향으로) 떨어진 점 P를 잡아, 그의 좌표를 (x, y)라고 하면, 방향여현의 정의로부터

$$\frac{x-x_0}{\rho} = \cos\alpha = \lambda, \quad \frac{y-y_0}{\rho} = \cos\beta = \mu$$

이다. 그러므로 $x = x_0 + \lambda\rho$, $y = y_0 + \mu\rho$이 한 점 $P_0(x_0, y_0)$를 지나 λ, μ를 방향여현으로 하는 직선의 매개변수 방정식이다.

(2) 주어진 점과 주어진 방향비를 갖는 직선의 매개변수 방정식.

점 $P_0(x_0, y_0)$을 지나며 방향비가 $u : v$인 직선의 매개변수 방정식은 주어진 점 $P_0(x_0, y_0)$을 지나며 직선을 따라서 $u : v$의 방향으로 진행하는 곳에 임의의 한 점 $P_0(x_0, y_0)$을 잡으면, 방향비의 정의에 의하면 $\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v}$로 나타내어진다. 이 식의 우변을 t 라 놓으면 $x = x_0 + ut$ $y = y_0 + vt$ 로 나타낼 수 있다.

(3) 원의 매개변수 방정식.

원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원의 매개변수 방정식을 구하여 보자. 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원둘레 위를 움직이는 동점을 $P(x, y)$라 할 때 $\overline{OP}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ하자. 이 θ를 매개변수로 하여 원의 매개변수 방정식을 구하면, P가 어떤 사분면에 있더라도 $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$인 관계가 있고, θ가 0에서 2π까지 변화할 때 동점 P는 원둘레 위를 한바퀴 움직인다. 따라서, 구하는 원의 매개변수 표시는

$$x = r\cos\theta \ \ y = r\sin\theta \ \ (0 \le \theta \le 2\pi) \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

역으로, $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$라면, $\frac{x}{r} = \cos\theta$, $\frac{y}{r} = \sin\theta$이다. 따라서 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 이용하면

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \text{ 즉, } x^2 + y^2 = r^2$$

이 되어 원점을 중심으로 하고 반지름 r인 원이 된다. 그러므로, ①이 각 θ를 매개변수로 하는 원의 매개변수 방정식이다.

(4) 타원의 매개변수 방정식.

장축의 길이가 $2a$이고, 단축의 길이가 $2b$ (단, $a \ne b$, $a > 0$, $b > 0$) 이며, 중심이 원점인 타원의 매개변수 방정식은 원의 매개변수 방정식으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$x = a\cos\theta, \ \ y = b\sin\theta \ (0 \le \theta \le 2\pi).$$

(5) 쌍곡선의 매개변수 방정식.

두 정점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$에서의 거리의 차가 $2a$ $(c > a > 0)$인 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (b^2 = c^2 - a^2)$$

은 θ를 매개변수로 하는 $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$인 매개변수 방정식을 갖는다.

(6)포물선의 매개변수 방정식.

포물선 $y^2 = 4ax$ 에서 $y = 2at$ 라고 놓으면, $x = at^2$이 얻어진다. 따라서, 포물선 위의 한 점(x, y)에 대하여 $y = 2at$, $x = at^2$의 관계를 만족하는 t의 값이 존재하며, 역으로, t의 임의의 값에 대하여 $y = 2at$, $x = at^2$에 의하여 정해진 x, y의 값을 좌표로 하는

점은 $y^2=4ax$를 만족하므로, 이와 같은 점은 모두 포물선 위에 있는 점이다. 실제로 t를 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변화시키면 전체의 포물선이 그려진다. 즉, $y=2at$, $x=at^2$은 초점의 좌표가 $(a,0)$인 포물선의 매개변수 방정식이다.

(7) 파선의 매개변수 방정식.

원이 한 직선 위에 접하며 회전할 때, 그 원 위의 고정점이 그리는 곡선을 파선(cycloid)이라 한다. 반지름의 길이 a인 원 위의 고정점 P의 위치를 원점 O에 있다 하고, 원이 x축 위를 양의 방향으로 회전할 때, 파선은 다음을 만족함을 알 수 있다.

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$$

$$x=a\cos^{-1}\frac{a-y}{a}\pm\sqrt{2ay-y^2}.$$

갈릴레오는 파선(cycloid)의 중요성을 처음 인식한 수학자 중의 한 사람이었다. 수학자들이 아치의 길이와 무게중심, 한 아치 아래의 넓이를 구하려 한 것이 미적분의 발달에 중요한 역할을 하였다. 이것은 유명한 등시간과 최단시간 문제의 답을 구하는 데 이바지하였다.

(8) 바퀴 안 파선(Hypocycloid)의 매개변수 방정식.

Hypocycloid는 작은 원이 큰 원의 안쪽을 따라 돌 때 작은 원 위의 고정점 P에 의해 그려진다. 큰 원의 반지름을 b, 작은 원의 반지름을 r이라 하면 Hypocycloid의 매개변수 방정식은 다음과 같다.

$$x=(b-r)\cos t+r\cos\frac{b-r}{r}t,$$

$$y=(b-r)\sin t-r\sin\frac{b-r}{r}t.$$

물리현상에서의 플라즈마 응집장치의 하나인 HCP가 바로 이 방정식의 응용이고, 최근에는 레이저의 펌핑광원으로 사용되고 있다.

(9) 바퀴 위 파선(Epicycloid)의 매개변수 방정식.

Epicycloid는 작은 원이 큰 원의 바깥쪽을 따라 돌 때 작은 원 위의 고정점 P에 의해 그려진다. 큰 원의 반지름을 b, 작은 원의 반지름을 r이라 하자. 그러면 다음 방정식을 얻는다.

$$x=(b+r)\cos t-r\cos\frac{b+r}{r}t,$$

$$y=(b+r)\sin t-r\sin\frac{b+r}{r}t.$$

일상생활에서 이와 같은 도형은 맞 물려있는 톱니바퀴에서 찾아볼 수 있다.

(10) 성망형(Astroid)의 매개변수 방정식.

Hypercycloid에서 $b=1$, $r=\frac{1}{4}$인 경우에 다음 방정식을 얻는다.

$$x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t,\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1.$$

이와 같은 도형을 성망형이라 하고 이것은 나팔꽃, 자동차의 알루미늄 휠 타이어에서 찾아볼 수 있다.

(11) 심장형(Cardioid)의 매개변수 방정식.

Epicycloid에서 $r=b$인 경우 다음 방정식을 얻는다.

$$x=2b\cos t-b\cos 2t,\quad y=2b\sin t-b\sin 2t.$$

이와 같은 도형을 심장형이라 하며, 이 도형은 생활주변에서 호박잎, 마의 잎에서 찾아볼 수 있다.

(12) 데카르트 엽선(Descartes leaf)의 매개변수 방정식.

데카르트의 엽선은 프랑스 태생인 데카르트의 이름을 따서 명명되어졌다. 공부에 싫증난 데카르트는 10대에 세상을 알기 위해 군대에 입대했고, 그 후에 유명한 철학자이며 수학자가 되었다. 또, 카테이션 평면은 그의 이름으로부터 명명되었다고 한다. 데카르트 엽선에서 접선을 찾는 문제는 16세기 내내 수학자들에게 수수께끼로 남아 있었다.

$$t\neq-1,\quad x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3t^2}{1+t^3},\quad x^3+y^3=3xy.$$

(13) 아르키메데스 나선(Spiral)의 매개변수 방정식.

$r=\theta$(θ는 radian)에 관하여 고찰해 보자. θ를 radian으로 표시하면 약 57°이므로 $\theta=0$일 때 $r=0$, $\theta=1$일 때 $r=1$임을 알 수 있다. 아르키메데스 나선의 매개변수 방정식은 $x=\theta\cos\theta$, $y=\theta\sin\theta$ 이고, 이와 같은 도형은 호박의 덩굴손, 오이의 덩굴손에서 찾아 볼 수 있다.

(14) 연주형(Lemniscate)의 매개변수 방정식.

$r^2 = \cos 2\theta$의 그래프는 양좌표축과 원점에 대칭이 된다. 그러므로 제1사분면에서 연주형의 부분을 그린 다음, 다른 3개의 사분면에 대칭에 의해 그래프를 완성할 수 있다. $\cos 2\theta$는 주기 π를 갖는 주기함수이므로, 연주형 위의 제1사분면에 있는 모든 점들은 θ를 0부터 $\pi/2$까지 변화시키고, 그런 다음 대응하는 점 (r, θ)의 그래프를 그림으로써 얻어질 수 있다. 극좌표에 의해 기술된 함수들은 매개변수방정식에 의해 나타내어질 수 있다. 특히, $r = f(\theta)$이면 r대신에 $f(\theta)$를 사용하여 매개변수 방정식 $x = f(\theta)\cos\theta$와 $y = f(\theta)\sin\theta$를 얻게 된다. 따라서 연주형의 매개변수 방정식은 다음과 같다.

$$x = \pm\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \quad y = \pm\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta.$$

3. 매개변수로 표현되는 공간도형

중등학교 기하교육에서 해석기하학적으로 다루고 있는 공간도형은 직선, 평면, 구 등이다. 그러나 회전곡면, 2차 곡면(quadratic surface), 뫼비우스 띠, 선직면(ruled surface) 등의 고찰도 발전적인 내용으로 취급할 수 있을 것이다. 실제로 원환면(torus)의 부피의 값은 고대 헬레니즘 시대에도 알려져 있었으며, 현재는 적분법의 응용 문제로 이를 계산하고 있는 실정이다. 원환면은 회전곡면의 일종으로써 회전면의 기하학적 고찰을 통하여 원환면의 방정식을 세울 수 있다.

공간에서 방정식 $x^2 + y^2 = a^2$을 생각하면 이는 원주면의 방정식이다. 이것을 매개변수로 나타내면 $x = a\cos t$ $y = a\sin t$ $z = s$ (t, s는 임의의 실수)로 쓸 수 있다. 그러나 주면은 일종의 선직면이다. 선직면의 일반적 고찰로부터 주변의 기하학적 성질을 쉽게 알 수 있다.

공간에서 곡면을 나타내는 방법에 대하여 알아보자. 먼저, 앞에서 곡선을 나타내는 방법처럼 $z = f(x, y)$에서 $F(x, y, z) = 0$으로 바꾸어 변수 x, y, z를 평등하게 취급하여 곡면의 식을 나타낼 수 있다. 더욱이, 일반적으로 나타낼 수 있는 곡면의 방정식은

$$x = f(u, v)\, y = g(u, v), z = h(u, v)$$

로 표현된다. $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$는 새로운 변수 u, v의 함수이다. 이때 u, v를 곡면의 매개변수라 하고, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$를 이 곡면의 매개변수 표현이라고 한다. 위의 세 개의 방정식에서 u, v를 소거한다면 x, y, z에 관한 곡면의 방정식을 얻을 수 있다. $z = f(x, y)$에서 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$로 쓰면 $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$는 곡면의 일반적 표현으로 볼 수 있다.

예를 들어 $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$는 쌍곡포물면이다. 왜냐하면 첫 번째와 두 번째 방정식을 풀면 $u = (x + y)/2$, $v = (x - y)/2$를 얻을 수 있고, 이것을 세 번째 방정식에 대입하면 쌍곡포물면의 방정식 $4z = x^2 - y^2$ 을 얻을 수 있기 때문이다.

매개변수표현은 내재적이라는 데에 기하학적으로 중요성을 갖고 있다. 왜냐하면 곡면에 대한 데카르트의 해석기하학적 방법은 곡면과 직접적인 관련이 없는 외부 좌표축에 의해 고찰되지만, 매개변수 표현은 곡면 그 자체에 좌표를 택하여 고찰하기 때문이다. 예를 들면 지구 표면에는 경도와 위도라는 좌표가 있다. 이것은 당연히 내재적이다. 만약에 데카르트의 방법으로 지구를 항해한다면 지구의 중심을 통과하는 서로 직교하는 세 개의 축으로 위치를 결정하여 항해를 해야 하는데, 그렇게 되면 그 불편함은 상상을 초월할 것이다.

(1) 구의 매개변수 방정식.

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 a인 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$이다. 구면의 매개변수 표시는 $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\cos u$이다. u, v의 범위에 따라 남북 양 극점과 날짜 변경선을 제외한 구면의 부분과 $D = \{ (u, v) : 0 < u < \pi,\ 0 < v < 2\pi\}$는 일대일 대응이 된다. v가 일정한 점 전체는 양극 점을 지나는 대원을 그린다. 즉 v=(상수)인 곡선은 자오선을 그린다. 또 u=(상수)인 점 전체는 위선이 된다. 특히 $u = 0$인 구면 위의 점 전체는 적도가 된다.

(2) 나팔곡면의 매개변수 방정식.

점 $A(a, 0)$에 추가 달린 실의 길이 a인 막대를 사람이 갖고, 원점 O를 출발하여 z축 위를 움직일 때 추 P가 그리는 곡선을 추적선(tractrix)이라고 한다. 이 곡선의 방정식은

$$x = a\sin t,\ z = a\log\tan(\frac{t}{2}),\ 0 \le t \le \pi$$

이다. 이 추적선을 z축의 둘레로 회전시키면 나팔곡면을 얻는다. 그러므로, 나팔곡면의 매개변수 방정식은

$$x = a\sin u\cos v,\quad y = a\sin u\sin v,$$

$$z = a(\cos u + \log\tan(\frac{u}{2}))$$

이다. 위에서 말한 구면과 나팔곡면의 고유의 성질을 살펴보기 위하여 곡면이 굽어있는 상태를 나타내는 양에 대하여 알아보자. 이것을 Gauss 곡률 또는 전곡률이라 하고 K로 나타낸다. 예를 들면, 평면의 Gauss곡률은 0이며, 반지름의 길이가 a인 구면은 $K = \frac{1}{a^2}$ (>0)이며 일정하고, 점근선의 길이가 a인 나팔곡면의 곡률은 $K = -\frac{1}{a^2}$ 이며 일정하다. 이러한 점으로 인하여 나팔곡면을 의구(pseudo sphere)라 부른다.

(3) 상나선과 나선면의 매개변수 방정식.

주면 $x^2 + y^2 = a^2$위에 일정한 비율로 실을 감을 때 생기는 곡선을 상나선(circular helix)이라고 한다. 상나선의 매개변수의 방정식은

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt\ (a > 0,\ b \ne 0)$$

이다. 지금 상나선 위의 각 점을 지나고 xy평면에 평행한 한 직선과 z축이 만나서 생기는 직선으로부터 만들어지는 곡면을 나선면(helicoid)이라고 한다. 따라서 나선면의 매개변수 방정식은

$$x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = bu$$

$$(0 < u < 2\pi,\ -\infty < v < \infty)$$

이다. 이와 같이 한 직선으로 생성되어지는 곡면을 선직면(ruled surface)이라고 한다.

(4) 회전면의 매개변수 방정식.

xz평면 위에 놓인 $z = f(x)$, $y = 0$으로 주어지는 한 곡선(이것을 기저 곡선(base curve)이라 한다)을 x축을 둘레로 하여 회전시키면 회전곡면(surface of revolution)이 얻어진다. 이 회전곡면의 매개변수 방정식은

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(u)$$

로 주어진다. 구면에서처럼 $u =$(상수)인 곡선을 위선, $v =$(상수)인 것을 자오선이라 부른다. 여기서 u, v를 소거하면 회전면은 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$으로 나타낼 수 있다.

위에서 얻은 회전곡면의 방정식으로부터, 회전면에 관해서는 일반적인 도형의 성질을 고찰할 수도 있다. 예를 들면, 원환면, 구, 주면, 의구, 타원면, 포물면 등은 일종의 회전면이다. 일반적으로 회전면의 위선과 자오선은 서로 수직임을 알 수 있다.

(i) 현수면(Catenoid)의 매개변수 방정식.

빨래 줄이나 전선은 현수선을 그린다. 두 쌍곡함수 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 에 대해, 현수선 $x = a\cosh v$, $z = av$, $-\infty < v < \infty$의 회전곡면(즉, 현수면)의 매개변수방정식은

$$x = a\cosh v\cos u,\ y = a\cosh v\sin u,\ z = av,$$

$0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$로 주어진다.

현수면은 극소곡면(minimal surface)인데 공학에서 자주 쓰이는 모델곡면이다. 예컨대 보온병의 원리는 극소곡면의 이론에서 얻어진 상품이다. 나선면과 현수면을 우리의 눈으로 관찰할 때 이 두 곡면은 아주 다른 모양의 곡면들이다. 그러나 이 두 곡면은 전곡률이 같으며 기하학적으로 거의 같은 구조를 가지는 곡면임이 잘 알려져 있다. 즉, 이 두 곡면은 등장적(isometric)이다.

(ii) 원환면(torus)의 매개변수 방정식.

xz평면 상에서 중심이 $(R, 0)$이고 반지름이 r인 원

$$x = R + r\cos u,\ z = r\sin u$$

을 z축 둘레로 회전한 회전면이 원환면이며, 원환면의 매개변수 방정식은

$$x = (R + r\cos u)\cos v,$$

$$y = (R + r\cos u)\sin v,$$

$$z = r\sin u$$

로 주어진다. 원환면의 전면적은 $A = 4\pi^2 ab$이다. 또 원환면의 Gauss곡률은 $K = \frac{\sin u}{r(R + r\sin u)}$ 로 주어짐을 알 수 있다. 따라서 원환면은 자신의 곡면에서 Gauss곡률의 부호가 양, 음, 영이 되는 부분을 갖고 있으며, 위선과 경선이 직교하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 원환

면은 다양한 기하학적 성질을 품고 있는 도형이다.

(5) 뫼비우스 띠의 매개변수 방정식.

뫼비우스 띠는 친숙하면서도 여전히 매력적인 수학적 대상이다. 1858년에 독일의 수학자이자 천문학자였던 아우구스트 뫼비우스에 의해 발견된 이 띠는 종이 띠의 양 끝을 비틀어서 붙이기만 하면 간단히 만들어지는데, 그 결과는 놀랍게도 단 하나의 모서리와 단 하나의 면을 갖는 3차원 물체가 된다. 뫼비우스 띠는 위상 수학에서 중요한 역할을 하는 다양한 기하학적인 도형의 한 예이다 (윤만식, 1993).

가로, 세로가 각각 $AA'=2a\pi$, $AB=2b$로 주어지는 직사각형 ABB'A'(a, b 는 양수)를 한번 비튼 후에 AB 와 B'A'(AB의 반대편 A'B')를 붙임으로써 뫼비우스 띠를 얻는다. 이 면은 한 측면밖에 갖지 않는다. 한 마리의 파리는, 한 면 위의 임의의 점에서 다른 면 위의 대응점으로 그것을 옆으로 가로지르지 않고 걸어 갈 수 있다. 테이블의 표면이나 벽과는 달라서, 이 면은 상, 하 또는 전, 후를 갖지 않는다. 이 면을 뫼비우스 띠라고 하며, 고무테이프와 같은 직사각형의 종이로 쉽사리 만들 수가 있다. 고무테이프를 꼬아서 한 끝을 다른 끝에 붙이면 뫼비우스 띠가 만들어진다. 직사각형의 종이쪽으로 만든 뫼비우스 띠를 중앙을 따라서 자르면, 2개의 띠가 생기는 것이 아니라, 2번 꼬인 한 띠로 된다. 뫼비우스 띠의 매개변수 방정식은

$$x=(a-v\sin(\frac{u}{2}))\cos u$$

$$y=(a-v\sin(\frac{u}{2}))\sin u$$

$$z=v\cos(\frac{u}{2})$$

이며, 여기서 u, v를 소거하면

$$(ay+z)^2= z^2(x^2+y^2)$$

을 얻는다. 이 방정식에서 뫼비우스 띠의 여러 가지 성질을 조사할 수 있을 것이다.

(6) 주면(Cylinder)의 매개변수 방정식.

xy평면에 $f(x,y)=c$, $z=0$으로 주어지는 곡선을 C라 하자. xy평면에 수직인 모선(generation) L을 C를 따라서 움직이면 주면 S : $f(x, y)=c$가 얻어진다. 이러한 원주면의 매개변수 방정식은

$$x=r\cos u\ ,\quad y=r\sin u\ ,\quad z=v$$

로 주어진다. 모선이 xy평면에 수직인 이차주면 중 몇 가지를 예로 들어 보면,

원주면 $x^2+y^2=r^2$, 포물주면 $y^2=4ax$

타원주면 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

쌍곡주면 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 등이 있다.

(7) 타원면의 매개변수 방정식.

방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$로 표시되는 곡면은 매개변수를 이용하여

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=b\cos u\sin v,\quad z=c\sin u$$

로 나타낼 수 있고, (u, v)를 움직이면 타원면의 제일 위와 아래의 두 점을 제외하고 전부 덮을 수 있다. 일상생활에서 이와 같은 도형은 럭비공 또는 산수유 열매에서 찾아볼 수 있다.

(8) 일엽쌍곡면의 매개변수 방정식.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$로 표시되는 곡면은 매개변수를 이용하여

$$x=a\cosh u\ \cos v,\quad y=b\cosh u\ \sin v,\quad z=c\sinh u$$

로 나타낼 수 있고, (u, v)가 평면 위를 제한 없이 움직일 때 (x, y, z)는 일엽쌍곡면을 완전히 덮는다. 그러나 v를 2π로 바꾸어도 (x, y, z)는 변하지 않기 때문에 대응은 1 : 1이 아니다. 일상생활에서 이와 같은 도형은 장고, 절구통, 꽃 받침대 등에서 찾아볼 수 있다.

(9) 이엽쌍곡면의 매개변수 방정식.

방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$로 표시되는 곡면은 매개변수를 이용하여

$$x=a\sinh u\cos v,\quad y=b\sinh u\sin v,\quad z=c\cosh u$$

로 나타낼 수 있고, $D=\{(u, v) : |u|>0\}$라고 하면 이엽쌍곡면의 상반부분의 곡면으로부터 원점을 제외한 부분과 대응이 된다. 하반부분을 갖고 싶을 때에는

$z=-c\cosh u$로 하면 된다. 일상생활에서 이와 같은 도형은 접시형 안테나, 라디오 텔레스코프, 위성추적자 등에서 찾아볼 수 있다. 또, 두 개의 점 전하 사이에 분포되는 등전위면의 모양과 같다.

(10) 타원포물면의 매개변수 방정식.

방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$로 표시되는 곡면은 매개변수를 이용하여 $x=u$ $y=v$ $z=\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}$에서

$$x=au\cos v,\ \ y=bu\sin v,\ \ z=u^2$$

으로 나타낼 수 있다. 일상생활에서 이와 같은 도형은 자동차의 헤드라이트, 전등갓, 종 등에서 찾아볼 수 있다.

(11) 쌍곡포물면의 매개변수 방정식.

방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$로 표시되는 곡면의 경우에 $x=u,\ y=v,\ z=\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}$에서

$$x=au\cosh v,\ y=bu\sinh v\ ,\ \ z=u^2$$

으로 나타낼 수 있다. 일상생활에서 이와 같은 도형은 말안장 및 어린이 변기 통에서 찾아볼 수 있다.

(12) 원숭이 안장곡면의 매개변수방정식.

방정식 $z=x^3-3xy^2$으로 표시되는 곡면을 매개변수를 써서 나타내면

$$x=u,\ \ y=vz=u^3-3uv^2$$

이다. 여기서 (0,0,0)은 평탄점이고 3개의 언덕과 3개의 계곡이 (0,0,0)에서 만난다. 즉, 그것은 원숭이 안장이 다리를 위한 2개의 경사면과 꼬리를 위한 1개의 경사면이 필요하기 때문에 그렇게 이름지어졌다

위에서 언급한 평면과 공간도형의 매개변수표현들을 요약하면 다음과 같다. 여기에서 $a,\ b,\ c,\ d$는 상수이며, $t,\ \theta,\ u,\ v$는 변수를 나타낸다.

(1) 평면 직선(Straight line)의 매개변수방정식
$x=a+bt,\ y=c+dt$

(2) 원(Circle)의 매개변수 방정식
$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$

(3) 타원(Elliptic circle)의 매개변수 방정식
$x=a\cos\theta\ ,\ \ y=b\sin\theta\ \ (a\neq b)$

(4) 쌍곡선(Hyperbola)의 매개변수 방정식
$x=a\sec\theta,\ \ y=b\tan\theta$

(5) 포물선(Parabola)의 매개변수 방정식
$x=at^2,\ \ y=2at$

(6) 파선(Cycloid)의 매개변수 방정식
$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$

(7) 바퀴 안 파선(Hypocycloid)의 매개변수 방정식
$x=(b-r)\cos t+r\cos\frac{b-r}{r}t,$
$y=(b-r)\sin t-r\sin\frac{b-r}{r}t$

(8) 바퀴 위 파선(Epicycloid)의 매개변수 방정식
$x=(b+r)\cos t-r\cos\frac{b+r}{r}t,$
$y=(b+r)\sin t-r\sin\frac{b+r}{r}t$

(9) 성망형(Astroid)의 매개변수 방정식
$x=\cos^3 t\ ,\ \ y=\sin^3 t$

(10) 심장형(Cardioid)의 매개변수 방정식
$x=2b\cos t-b\cos 2t,\ \ y=2b\sin t-b\sin 2t$

(11) 데카르트 엽선(Descartes leaf)의 매개변수 방정식
$t\neq -1,\ \ x=\frac{3t}{1+t^3},\ \ y=\frac{3t^2}{1+t^3}$

(12) 아르키메데스 나선(Spiral)의 매개변수 방정식
$x=\theta\cos\theta,\ \ y=\theta\sin\theta$

(13) 연주형(Lemniscate)의 매개변수 방정식
$x=\pm\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,\ \ y=\pm\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$

(14) 구(Sphere)의 매개변수 방정식
$x=a\sin u\cos v,\ \ y=a\sin u\sin v,\ \ z=a\cos u$

(15) 나팔곡면(Pseudo sphere)의 매개변수 방정식
$x=a\sin u\cos v,\ \ y=a\sin u\sin v,$
$z=a(\cos u+\log\ \tan(\frac{u}{2}))$

(16) 상나선(Circular helix)의 매개변수 방정식
$x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ z=bt\ (\ a>0\ ,\ \ b\neq 0)$

(17) 나선면(Helicoid)의 매개변수 방정식
$x=v\cos u\ ,\ \ y=v\sin u\ ,\ \ z=bu$

(18) 현수면(Catenoid)의 매개변수 방정식

$x=a\cosh v\cos u,\ y=a\cosh v\ \sin u\ ,\ z=av$

(19) 원환면(Torus)의 매개변수 방정식

$x=(R+r\cos u)\cos v,$

$y=(R+r\cos u)\sin v,\ z=r\sin u$

(20) 뫼비우스 띠(Moebius band)의 매개변수 방정식

$x=(a-v\sin(\frac{u}{2}))\cos u,$

$y=(a-v\sin(\frac{u}{2}))\sin u,\ z=v\cos(\frac{u}{2})$

(21) 원주면(Circular cylinder)의 매개변수 방정식

$x=r\cos u\ ,\ y=r\sin u\ ,\ z=v$

(22) 타원면(Ellisoid)의 매개변수 방정식

$x=a\cos u\cos v,\ y=b\cos u\sin v,$

$z=c\sin u$

(23) 일엽쌍곡면(One sheet hyperboloid)의 매개변수 방정식

$x=a\cosh u\cos v,\ y=b\cosh u\sin v\ ,\ z=c\sinh u$

(24) 이엽쌍곡면(Two sheet hyperboloid)의 매개변수 방정식

$x=a\sinh u\cos v, y=b\sinh u\ \sin v, z=c\cosh u$

(25) 타원포물면(Elliptic paraboloid)의 매개변수 방정식

$x=au\cos v\ ,\ y=bu\sin v\ ,\ z=u^2$

(26) 쌍곡포물면(Hyperbolic paraboloid)의 매개변수 방정식

$x=au\cosh v\ ,\ y=bu\sinh v\ ,\ z=u^2$

(27) 원숭이 안장곡면(Monkey saddle)의 매개변수 방정식

$x=u\ ,\ y=v\ ,\ z=u^3-3u\,v^2$

III. Mathematica를 이용한 매개변수로 표현되는 도형의 시각화 방안

Mathematica는 1988년 6월 미국의 이론 물리학자 겸 수학자인 Stephen Wolfram에 의해 version 1이 개발된 후 다양한 운영체제에 적용될 수 있도록 계속 발전되어, 2001년 7월 현재 최신 version 4.1이 개발되었다. 수학적인 계산을 하는데 사용할 수 있는 유용한 컴퓨터 프로그램은 요즈음 많이 개발되고 있으며 그 중요성이 날로 증가하고 있다(류재구, 1998). 수학교육의 새로운 패러다임이 도래하고 있는 현실에서, 연구용으로 널리 사용되고 있는 수학용 Software 중에서 Windows용 Mathematica를 사용하여 본 논문에서는 매개변수로 표현되는 도형의 지도에 대한 새로운 교수 학습 방안을 탐구하고자 한다. 본 논문은 version 4.0을 사용하였으나 여기 실린 내용을 실행하는 데는 version 3.0 이상이면 문제가 없으며, 지금부터 Mathematica 3.0이상의 version을 통칭하여 Mathematica라 한다. Mathematica는 폭넓은 수학의 전 분야 및 응용분야에 활용이 가능하다(김안현 외 5인, 2000).

Mathematica가 가진 기능 중에서도 주로 뛰어난 계산 능력과 그래픽 기능, 애니메이션 기능, 그리고 모든 명령어를 함수로 정의할 수 있는 기능을 이용하여 본 논문을 전개하였다. 특히 추상적인 수학 개념은 장면의 다양성이 제공될 때 학생들에게 최대의 학습효과를 기대할 수 있다는 관점에서 그래픽 기능을 강조하였으며, 여기에 제시된 명령어들은 교사 및 학습자가 원하는 결과를 위하여 주어진 식을 직접 수정, 실행함으로써 간단히 그 결과를 확인할 수 있도록 하였으며, 본 논문에서 사용한 모델을 원할 때면 언제나 다른 도형으로 바꾸어 수업에 이용할 수 있도록 전개하였고, 더욱이 최대한 기본적인 명령어들을 사용하였다. 입력 명령어는 모두 실었지만 일부명령어의 실행 결과는 지면 관계상 생략하였으며, 편의를 위하여 단계별로 설명을 붙였다. 이 장에서는 Mathematica를 이용하여 만든 매개변수로 표현되는 도형의 시각화 방안을 소개하고자 한다.

1. 파선의 시각화 방안

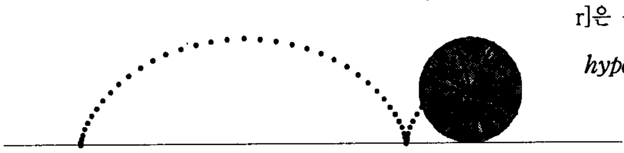
• 반지름이 a인 파선(cycloid)의 그래프를 Block을 이용하여 만든다. 파선(Cycloid)의 매개변수 방정식은

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

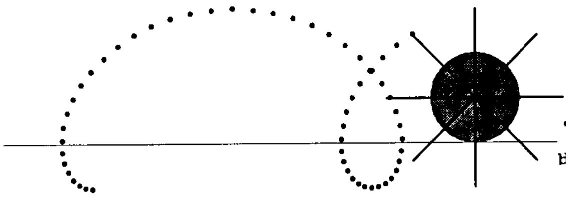
이다. 이 때 실행을 하면 Block문의 Input문장에 따라 화면으로부터 직접 파선의 반지름을 입력하면 그 입력된 값을 a로 하는 파선을 애니메이션으로 그린다. 이것의 프로그램은 부록의 [첨부 1]에 있다.

• Local kernel Input에 1을 입력한다. 애니메이션으로

그려진 그림 중에 하나를 소개한다.

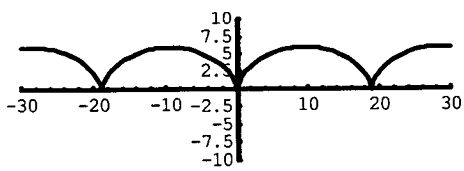


• Local kernel Input에 2를 입력한다. 애니메이션으로 그려진 그림 중에 하나를 소개한다.



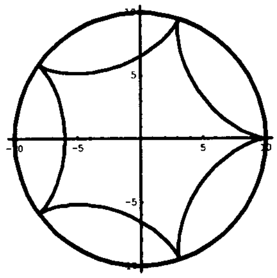
• a를 변수로 하는 Module함수 cyc[ ]를 이용하여 반지름이 3인 파선을 그려보자.

```
cyc[ a_ ]: =
Module[ { }, a1 = a;
ParametricPlot[ { a( t - Sin[ t]), a( 1 - Cos[ t]) },
{ t, -30 , 30 },
PlotRange→ { { -30 , 30 }, { -10 , 10 } },
AspectRatio→ Automatic,
PlotStyle→ { Thickness[ 0.01], Hue[ 0.1 * a] } }; ]
cyc[ 3 ]
```



• 반지름 b인 원의 안쪽에 반지름 r인 원이 붙어 돌면서 그리는 파선을 그려보자. 먼저, b와 r을 변수로 하는 Module함수 hypocyc[b, r]을 만들고 hypocyc[10, 2]를 실행해 보자. 여기에서 쓰이는 Module 함수 hypocyc[b, r]은 부록의 [첨부 2]에서 정의된다.

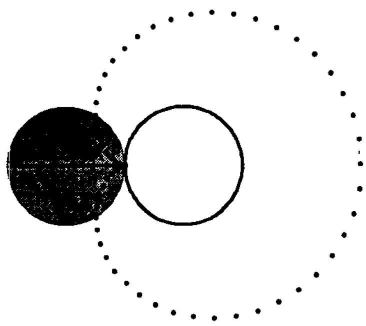
```
hypocyc[ 10 , 2 ]
```



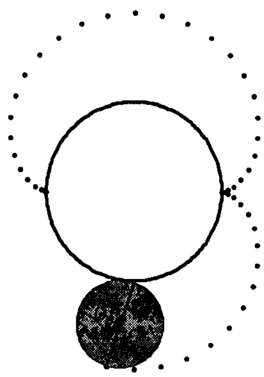
• hypocyc[10, 3]을 실행하여 위의 그림과 비교해 보고 바퀴안의 파선에서 변수의 개념을 이해한다.

• 부록의 [첨부 3]에 있는 Block문을 실행을 하면 Block문의 Input문장에 따라 화면으로부터 직접 바퀴 위 파선에서 고정되어 있는 바퀴의 반지름이 1일 때 바퀴 위에서 움직이는 원의 반지름을 입력하면 그 입력된 값에 따라 바퀴 위 파선을 애니메이션으로 그린다. 구체적으로 다음의 예들을 살펴보자.

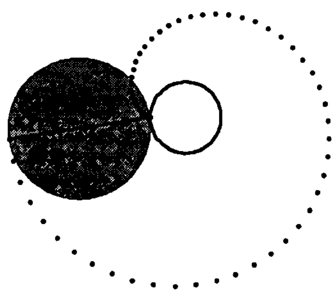
• 두 원의 반지름이 같은 경우에 심장형을 그린다.



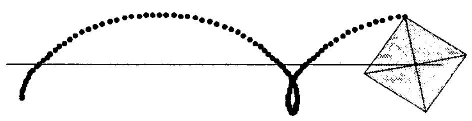
• Block문의 Input문장에 따라 화면으로부터 직접 $\frac{1}{2}$을 입력하면 바퀴 위 파선을 애니메이션으로 그린다. 애니메이션으로 그려진 그림 중에 하나를 소개한다.



•Block문의 Input문장에 따라 화면으로부터 직접 2를 입력하면 바퀴 위 파선을 애니메이션으로 그린다. 애니메이션으로 그려진 그림 중에 하나를 소개한다.



•부록에 있는 [첨부 4]의 Block문을 이용하여 원이 아닌 임의의 다각형이 그리는 파선을 살펴보자. 예를 들어, Local kernel Input에 4를 입력한다. 이 때 Input문의 질문은 원이 아닌 다각형이 그리는 파선에서 임의의 다각형의 각의 수를 묻는다. 4각형이 돌 때 4각형의 한 꼭지점이 그리는 파선을 애니메이션으로 그린 그림 중에 하나를 소개한다.



2. 임의의 평면곡선의 시각화 방안

•위에서 살펴 본 파선은 매개변수로 표현된 한 평면곡선의 예이므로, 임의의 평면곡선에 대한 교수-학습 모델 제작이 가능하며, 특히 이 경우는 아래의 공간곡선의 경우에서 곡선의 세 번째 성분을 0으로 두면 된다.

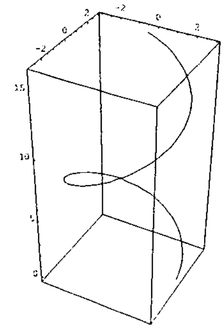
3. 임의의 공간곡선의 시각화 방안

•임의의 공간곡선의 식과 공간곡선의 매개변수의 정의역을 Local kernel Input으로부터 입력받아 임의의 공간곡선을 주어진 범위 안에서 그린다. 이 때 곡선의 식은 { , , }의 형태로 입력하여야 함에 주의한다. 즉, Mathematica 명령어의 입력 문법에 따라 입력해야 함에 유의하라.

•{3Cos[t], 3Sin[t], 2t}, 0과 8을 Local kernel Input에 차례로 입력해보자. 다음과 같이 실행되어 진다. 여기에서 쓰이는 Block함수는 [첨부 5]에 있다. 그러면 정의역 [0, 8]에서 그려진 나선의 그래프를 볼 수 있다.

공간곡선의 매개변수표현
: $\{3Cos(t),\ 3Sin(t),\ 2t\}$
매개변수표현의 정의역 : $\{0,\ 8\}$

공간곡선의 매개변수표현의 그래프



4. 곡면의 시각화 방안

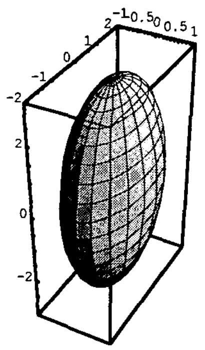
• 곡면은 두 개의 매개변수를 가지므로 곡면을 나타내는 식으로부터 그 모양을 머릿속으로만 상상하는 것은 쉽지 않다. 먼저, 곡면의 모양을 ParametricPlot3D로 그려보고, 또 각 매개변수가 변할 때의 곡면의 모양을 애니메이션 시켜봄으로써 각 매개변수의 역할을 시각적으로 이해한다.

• 예를 들어, 타원면을 살펴보자. 다른 모델을 원한다면 아래의 명령어에서 곡면의 식을 바꾸면 된다.

ParametricPlot3D[{ *Cos*[*u*] *Cos*[*v*] ,

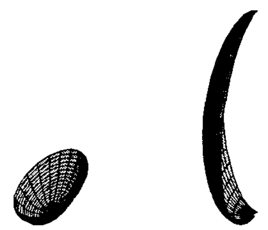
2 *Cos*[*u*] *Sin*[*v*] , 3*Sin*[*u*] } ,

{*v*, −*Pi*, *Pi*}, {*u*, −*Pi*/2, *Pi*/2}];

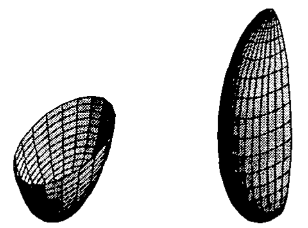


• 타원의 두 변수가 하는 역할을 [첨부 6]의 함수를 이용하여 알아보자. 즉, u가 변할 때 타원면이 그려지는 과정과 v가 변할 때 타원면이 그려지는 과정이 나란히 animation으로 주어지므로 이 그림을 보면서 곡면의 두 변수 u, v가 하는 역할을 살펴보자. 지면 관계상 [첨부 6]의 함수를 실행한 결과 중의 일부를 싣는다.

u가 변할 때 타원면 v가 변할 때 타원면



u가 변할 때 타원면 v가 변할 때 타원면



• 다음의 곡면을 살펴보고, 타원에서 두 변수의 역할을 살펴보았듯이 [첨부 6]의 함수를 변경하여 두 변수가 하는 일을 살펴보자.

ParametricPlot3D[*Sec*[*t*] *Cos*[*r*] , *Sec*[*t*] *Sin*[*r*] ,

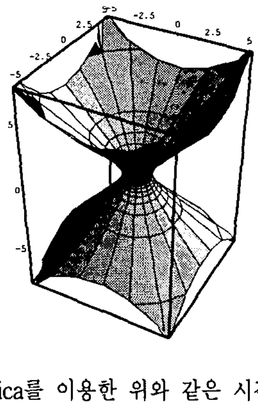
Tan[*t*] ,

$\{t,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\},\ \{r,\ -\pi,\ \pi\},$

AxesStyle→ *Thickness*[0.01] ,

BoxStyle→ *Thickness*[0.01] ,

ImageSize→300];



• Mathematica를 이용한 위와 같은 시각 자료는 매개변수 도형의 의미를 부각시킬 뿐만 아니라 더 나아가 공간변환 등의 수학적 인식을 정확하게 할 수 있게 한다. 한편, Mathematica에서 만들어진 위의 그림자료들은 저장할 때 HTML로 저장하는 간단한 작업에 의해 인터넷 웹브라우저에 올릴 수 있도록 되어 있어서 수학교사의 홈페이지 제작에도 가장 수학적인 자료들이 쉽게 만들어질 수 있게 한다. 위와 같은 여러 가지로 변환된 도형의 모양은 변환기하를 구체적인 예를 들어 학생들에게 확인시켜주며, 그들로 하여금 복잡한 변환의 합성으로 변환된 도형의 실체를 느낄 수 있도록 하고, 나아가서 이러한 시각적인 구체적 모형은 수학적 사고의 발달 및 창의력을 길러 귀납적으로 더 복잡하고 더 많은 수학적인 발견을 할 수 있게 할 것이다. 이러한 작업을 교사나 학습자가 직접 실행해 보는 것은 추상적으로 주어진 수학적인 식으로부터 공간상의 여러 가지 다른 도형을 식으로 표현하는 방법까지 스스로 연구하여 발견할 수 있는 계기가 될 것이며, 이에 대한 응용으로 다양한 형태의 평면상의 도형을 Mathematica가 그리는 도형으로 확인해 보는 것은 시각과 추상이 어우러지는 묘미로부터 수학에의 흥미를 가지는 중요한 요인이 될 것이다.

IV. 결 론

Mathematica 뿐만이 아니라 다른 수학용 Software들을 수학 학습에 사용할 때는 매우 신중하지 않으면 안된다. 학생들의 수학적 사고력과 창의력을 신장시키는 방향에서 적용이 되어야 함은 물론이고, 어떤 내용에 적용해서 어떻게 최대의 교육 효과를 얻을 수 있을 것인가에 대해 초점을 두어야만 한다. Mathematica의 장점을 요약하면 수학 개념을 시각화(Visualization) 시키고, 수학적 시각화의 다양성(Variety)을 제공하며, 학습자의 능동적인 수업 참여(Activity)로 인해 탐구학습이 가능하게 하며, 신속한 계산(Speediness)으로 인해 오류 수정을 용이하게 하며, 수학의 실용성(Practical Use)을 부여한다는 것 등이다(Wolfram, 2000).

수학교과에서 Technology의 활용은 앞으로 점점 더 그 필요성이 강조되겠지만 어떤 Software를 어느 시점에서 어떤 관점에서 적절히 사용할 것인가의 문제는 수학의 새로운 교수-학습 방법에 관해 관심이 있는 수학 관계자들의 어렵지만 필연적인 과제라 하겠다. 컴퓨터보조수업(CAI)은 자기 주도적인 학습환경이 가능해야하고, 교사와 학생들간의 의사소통이 원활해야 하며, 충분히 수학적이어야 한다(장진원 외 1인, 2000). 이러한 요건을 만족시키면서 수학교과에 활용할 수 있는 프로그램으로는 Logo언어, Basic언어, Maple, Matlab, MatheView, Excel, Cabri Geometry, 그래프 마법사, Mathematica, TI92, GSP 등이 있다(Klotz, 1991 ; Larborde, 1990). 이러한 프로그램의 수학 교수-학습에서의 적용은 무분별한 도입이 아닌 충분히 교육적 효과가 예상되는 내용, 시점 및 방법 등을 적절히 고려하여 도입해야 한다. 예를 들면, 적분의 개념이나 회전체의 부피의 지도에 있어서 Mathematica를 이용한다면 구분구적법을 가르치면서 구간의 크기를 늘려갈 때 사각형의 넓이의 합이 실제의 정적분하고 얼마나 근사한지를 시각적으로 제시하거나, 두 개의 그래프를 회전하여 생기는 회전체의 실제 모습 및 단면의 모습을 구체적인 예를 들어 학생들에게 확인시켜준다면, 그들로 하여금 구분구적법 및 복잡한 도형의 회전체의 실체를 느낄 수 있도록 할 것이다. 특히 매개변수로 표현되는 도형을 시각화 시키는 본 논문과 같은 교수-학습 자료의 제시 및 창작활동은 귀납적으로 더욱 많은 수학적 아이디어를 만들어낼 수 있게 한다. 컴퓨터를 사용하여 수학수업 활동에 이러한 예시들을 제시하는 것은 지필 환경 속에서 찾아볼 수 없었던 새로운 사실들을 발견해 나가는 자기 주도적인 수업을 가능하게 할 것이다. 수학과 컴퓨터는 서로 상호 작용을 하며 발전을 기해야 한다. 단순히 컴퓨터의 조작에만 능숙한 것이 아닌 수학적 개념을 가진 상태에서 컴퓨터를 발전시키고 이를

수학교육에 활용할 수 있어야 한다. 교사는 컴퓨터가 만능이 아니라는 사실을 염두에 두고 컴퓨터를 도입한 수업에서 흔히 나타나는 일시적인 학습자의 반응을 냉철히 분석, 판단하여야 하며, 가장 최대의 효과를 얻을 수 있는 내용과 수학 교육 방법 적용에 대해 부단한 노력과 연구를 해야 할 것이다. 그리고 수학교사가 운영하는 인터넷 Site에는 수학적인 요소들이 표현되어야 한다. 최근의 수학전용프로그램인 GSP나 Cabri Geometry에서도 웹브라우저에서 표현할 수 있는 방안들이 같이 개발되어 현실화되었다. Mathematica에서도 파일을 저장할 때, HTML문서로 저장할 수 있어서 웹 상에서도 Mathematica를 간단하게 올릴 수 있다. 이러한 기능은 수학 전용프로그램의 대중화에 큰 기여를 하게 될 것이다. 그러므로 도형의 지도에 있어서 시각적인 교수-학습 방법의 도입은 학생들에게 추가적인 예를 탐구하도록 하고, 독립적인 학습, 수준별 학습, 소그룹 학습 및 프로젝트 학습을 가능하게 할 것이며, 나아가 기하 및 수학의 다른 영역에서도 수학적 구조를 시각화 시키는 다양한 교수-학습 방안이 더 많이 연구되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

구광조 · 오병승 · 류희찬 (1992). 수학교육 과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

김안현 · 김향숙 · 류재칠 · 신준용 · 이강래 · 표용수 (2000). 수학에서의 Mathematica 활용, 서울: 경문사.

김향숙 (2001). 평면변환기하에 있어서 Mathematica를 이용한 교수-학습 방법, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 40(1), pp.93-102, 서울: 한국수학교육학회.

류재구 (1998). Mathematica3.0, 서울: 크라운 출판사.

류희찬 · 유공주 · 조민식 (1999). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안탐색, 수학교육학연구발표대회논문집, pp.227-253.

신동선 · 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

박경미 (1997), 수학과 제7차 교육과정의 개정방향, 수학사랑, 8, pp.2-7, 서울: 수학사랑.

오세춘 · 기우항 · 김영호 · 오철환 (1998). 매개변수로 표시되는 도형의 연구, 경북대학교과학교육연구지, 22, pp.25-50.

윤만식 (1993). 진리의 섬, 서울: 웅진출판사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

장진원 · 박달원 (2000). 컴퓨터보조수업(CAI)이 수학교과에 미치는 영향, 한국학교수학회논문집 3(1), pp.101-115.

표용수 · 김향숙 (2000). Mathematica를 활용한 미분기하학개론(제3판), 서울: 경문사.

Klotz, E. (1991). *The Geometers Sketchpad[Software]*, Berkley, CA: Key Curriculum Press.

Larborde, J-M. (1990). *CABRI Geometry[Software]*, France : Université de Grenoble 1.

Wolfram, S. (2000), *Mathematica(4th, ed.)*, Cambridge Univ. Press.

The Visualization of figures represented by parameters

Kim, Hyang Sook

Department of Computational Mathematics, School of Computer Aided Science, Inje University,
Obang Dong, kimhae, KyungNam, 621-749 Korea, E-mail : mathkim@ijnc.inje.ac.kr

The equations of figures given by rectangular coordinates are used to look into the properties of them, which are very restricted in examining them in the school mathematics. Therefore, it is quite natural to consider the figures in terms of parameters without restriction to coordinates and also, it is possible for the students to analyze them. Thus, the visualization of figures is important for students in mathematics education. In particular, the teaching-learning methods using computers make loose the difficulties of geometry education, and from the viewpoint that various abstract figures can be visualized and that can be obtained by means of this visualization the learning of figures can be accomplished through the direct experience or control.

This study is intended to present concretely the aim and its utility to visualize figures represented as parameters with Mathematica.

In this paper, we introduce a new teaching-learning method of figures represented by parameters using Mathematica so that the learners establish themselves their knowledge obtained through their search, investigation, supposition and they accomplish the positive transition to advanced learning. So the learners extend their ability of sensuous intuition to their ability of logical reasoning through their logical intuition. Consequently they can develop the ability of thinking mathematically, so many natural phenomena and physical ones.

부록 : Mathematica 프로그래밍

[첨부 1] 파선의 반지름을 입력하면 그 입력된 값을 a로 하는 파선을 애니메이션으로 그린다.

```
Clear[ cycloid, data, rotate];
r =
Input[ "

This program tarces the path of a point on a spoke of a rolling wheel.
 The radius of of the rolling wheel is 1. Enter the radius of the spoke.
   " ];
rr = Max[ r - 1, 0]; pi = N[ Pi];
cycloid[ t_]: = {t - rSin[ t], 1 - rCos[ t]};
rotate = {{Cos[θ], Sin[θ]}, {-Sin[θ], Cos[θ]}};
spokepoints: = Table[ {t, 1} + rotate. (cycloid[ t] - {t, 1}),
                     {theta, 0, 2pi, pi/4}]
spokes: = {Thickness[0.004], Map[ Line[ {{t, 1}, # ]
                     &, spokepoints]}
bline = Line[ {{-2, 0}, {10.5, 0}}];
dots = {PointSize[0.009], Hue[0.7]};
Do[ AppendTo[ Dots, Point[ cycloid[ t]]];
Show[ Graphics[ {{GrayLevel[.5],Disk[ {t, 1}, 1]},
Line[ {{t, 1}, cycloid[ t]}}, spoke, bline,Circle[ {t, 1}, 1], dots}],
AspectRatio→(3 + 2rr)/(12 + 2rr), ImageSize→500,
PlotRange→{{-1.5 - rr, 10.5 + rr}, {-.5 - rr, 2.5 + rr}}],
{t,0.,2pi 59/40,2pi/40}]
```

[첨부 2] Module함수 hypocyc[b, r]는 반지름 b인 원의 안쪽에 반지름 r인 원이 붙어 돌면서 그리는 파선을 그린다.

```
hypocyc
[a_, r_]: = Module[ {}, b= a; r1 = r;
m = ParametricPlot[ {(b - r1) Cos[ t] + r1 * Cos[((b - r1)/r1) t],
        (b - r1) Sin[ t] - r1 * Sin[((b - r1)/r1) t]}{t, 0, 2Pi},
        PlotStyle→{Thickness[0.013], Hue[0.01 * b]},
        AspectRatio→Automatic, DisplayFunction→Identity];
n = ParametricPlot[ {b*Cos[ t], b * Sin[ t]}, {t, 0, 2Pi},
   PlotStyle→{Thickness[0.015]}, AspectRatio→Automatic,
   DisplayFunction→Identity];
p = Show[ {m, n}]
Show[ GraphicsAray[ {p}], ImageSize→300];
]
```

[첨부 3] 바퀴 위 파선에서 고정된 바퀴의 반지름이 1일 때 그 바퀴 위에서 움직이는 원의 반지름을 입력하면 그 입력된 값에 따라 바퀴 위 파선을 애니메이션으로 그린다.

```
Clear[ rotate, r, rr];
r =
Input[ " This program traces the path of a point on the circumference
 of a circle rolling around (positive r) or inside( negative r) a circle
 of radius 1, Enter the radius of the rolling circle." ];
rr = Max[ 1, 1 + 2r]; pi = N[ Pi]; rotate[ point_, theta_]: =
 {{Cos[ theta], Sin[ theta]}, {-Sin[ theta], Cos[ theta]}}.point
fixedcircle = {Thickness[ .009], Circle[ {0, 0}, 1]};
rollingdisk: = {GrayLevel[ .5], Disk[ cen, Abs[ r]]};
rollingcircle: = Circle[ cen, Abs[ r]];
dots = {Pointsize[ .014], Hue[ .7]};
Do[ cen = rotate[ {-1 - r, 0}, theta];
spoke1 = rotate[ {1, 0}, theta(1 + 1/r)];
spokeline1 = {cen + r spoke1, cen - r spoke1};
spoke2 = rotate[ {0, 1}, theta(1 + 1/r)];
spokeline2 = {cen + r spoke2, cen - r spoke2};
spokes = {Thickness[ .007], Line[ spokeline1],
        Graylevel[ 1], Line[ spokeline2]};
AppendTo[ dots, Point[ cen + r spoke1]];
Show[ Graphics[ {rollingdisk, spokes, fixedcircle, rollingcircle,
                dots}], Aspectratio→1,
PlotRange→{{-rr - .03, rr + .03}, {-rr - .03, rr + .03}}],
        {θ, 0., 2pi, 2pi/60}]
```

[첨부 4] 임의의 다각형의 각의 수를 화면으로부터 입력받아 그 다각형이 그리는 파선을 애니메이션으로 나타낸다.

```
Clear[ a, dots, rotate, n, pl, pol];
```

```
n = Input[" How many sides does the rolling poligon have?" ];
pi = N[Pi];
cr = Csc[pi/n];
ir = Cot[pi/n];
a = ir ArcSinh[1/ir];
dots = {PointSize[.013], Hue[.99]};
rotate[p_, t_, center_]: =
center + {{Cos[t], Sin[t]}, {-Sin[t], Cos[t]}}.(p - center)
pl = Table[Plot[cr - irCosh[(x - 2 a i)/ir}, {x, -a + 2 a i, a + 2ai},
DisplayFuntion→Identity, PlotStyle→Thickness[.001]], {i, 0, 5}];
startpoly =
Map[ # + {0, cr}&, Map[[Re[ # ], Im[ # ]}&,
cr N[Exp[I Range[-Pi/2 + Pi/n, 3Pi/2 + Pi/n, 2Pi/n]]]]];
pol[t_]: = Block[{loop = N[Floor[(t+a)/(2a)]]},
Map[{t, 0} + rotate[ # , loop2pi/n + ArcTan[Sinh[(t- loop2a)/ir]],
{0, cr}]&, startpoly]]
Do[newpolyg = pol[t];
AppendTo[dots, Point[newpolyg[[n]]]];
Show[Graphics[{PointSize[.01], Thickness[.001],
{GrayLevel[.75], Polygon[newpolyg]}, Line[newpolyg],
Map[LIne[{{t, cr}, # }]&, newployg], Line[{{-cr, cr}, {11.5a, cr}}],
Point[{t, cr}], Point[newployg[[n]]], dots}],
PlotRange→{{-cr, 11a + cr}, {-.2, 2cr+.2}},
AspectRatio→(2cr+.2)/(11a+2cr),
DisplayFunction→$DisplayFunction, Ticks→None, Axes→None],
{t, 0., 11a, a/10}]
```

[첨부 5] 임의의 공간곡선의 식과 곡선의 매개변수의 정의역을 Dialog Box(즉, Local kernel Input)으로부터 각각 입력받아 임의의 공간곡선을 주어진 범위 안에서 그린다.

```
Clear[n, t, k1, k2];
Block[{},
n =
Input["Enter the parametric representation { , , }, for example,
{3Cos[t], 3Sin[t], t} as functions of t." ];
k1 = Input["Enter the miniμn of domain." ];
k2 = Input["Enter the maximun of domain." ];
Print["공간곡선의 매개변수 표현:", n];
Print["매개변수표현의 정의역:", {k1, k2}];
Print["공간곡선의 매개변수표현의 그래프" ];
ParametricPlot3D[n, {t, k1, k2}, AspectRatio→Automatic,
BoxRatios→{1, 1, 2}, DefaultColor→Hue[0.7], ImageSize→250]; ]
```

[첨부 6] 타원의 두 변수가 변할 때 각 변수가 하는 역할을 나타내면서 타원이 그려지는 과정을 애니메이션으로 보여준다.

```
Table[
c01 = ParametrlcPlot3D[{Cos[u]Cos[v], 2Cos[u]Sin[v], 3Sin[u]},
{v, -Pi, Pi}, {u, -Pi/2, k1/2}, Boxed→False, Axes→None,
PlotRange→{{-1.1, 1.1}, {-2.1, 2.1}, {-3.1, 3.1}},
PlotLabel→FontForm["u가 변할 때 타원면", {"Arial-Bold", 17}],
DisplayFunction→Identity];
c02 = ParametricPlot3D[{Cos[u] Cos[v], 2Cos[u] Sin[v], 3Sin[u]},
{v, -Pi, k2}, {r, -Pi/2, Pi/2}, Boxed→False, Axes→None,
PlotRange→{{-1.1, 1.1}, {-2.1, 2.1}, {-3.1, 3.1\},
PlotLabel→FontForm["v가 변할 때 타원면", {"Arial-Bold", 17}],
DisplayFunction→∈dentity],
Show[GraphicsArray[{c01, c02}, ImageSize→500,
GraphicsSpacing→0.1]];
, {k1, -Pi + 0.01, Pi+0.01, Pi/15}]
```