韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 11. 제 40권, 제 2호, 253-263.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2001, Vol. 40, No. 2, 253-263.

수학적 사고 과정 관련의 평가 요소 탐색

황 혜 정 (조선대학교)

I. 시작하는 말[1)]

지금까지는 주로 수학과 평가 상황에서 학습자의 기억 또는 암기에서 비롯되는 정보적, 사실적 지식의 습득 여부를 판정하는데 중점을 두어 왔다. 하지만, 학교 수학에 있어서 수학 교과 내용의 지식 획득과 더불어 그와 못지 않게 중요한 것은 수학적[2)] 사고 기능이나 전략을 연마하는 것이라 할 수 있다. 이제는 수업이나 평가 상황에서의 문제해결 과정을 통해 이때 동원되는 귀납적 사고, 비판적 사고 등과 같은 '방법적' 지식의 생성 정도를 측정하는 데에도 점차 관심을 두어야 할 때이다. NCTM(1995)은 평가 과정 그 자체를 문제해결 과정과 동일시하여 그 활동 속에서 자연스럽게 진행될 수 있는 것으로 간주하고, 이러한 수학적 문제해결 능력을 신장시키기 위하여 학생들이 수학적으로 사고하고 추론하고 계획을 세워 분석하고 그 결과를 일반화하여 사용하는 경험이 요구된다고 하였다.

이와 같이, 수학적 문제해결 지도 및 평가를 통해 수학적 사고 기능 및 전략을 육성하고 그 정도를 판가름하는 일이 중요하다는 것에 이론(異論)을 제기하는 이는 없을 것이다. 하지만, 정작 '사고'라는 것이 무엇인지, 그리고 그러한 사고 기능 이나 전략을 어떻게 지도하고 평가해야 하는지에 관한 연구가 그다지 활발하지 못한 실정이다.

최근 들어, 수업 활동의 연속적이고 확장적 의미로써 학생들의 학습 과정 및 구성적 반응을 강조하는 수행평가가 대두되면서, 사고 과정이나 기능 등에 대한 관찰 및 면담법, 자기 보고서 작성법 등의 평가에 대한 관심이 고조되고 있다. 지금껏 관찰 및 면담법은 학생들의 외형적 행동이나 활동의 모습을 통하여 그들의 수학에 관한 관심이나 태도, 또는 흥미 등의 수학적 성향을 파악하는데 주로 사용되어 왔다. 하지만, 이러한 정의적 영역에서의 평가 방법은 학생들의 외형적인 행동 변화나 상태뿐만 아니라 수학적 사고 기능과 같은 정신적 조작(精神的 操作)을 평가 대상으로 삼아, 수업이나 평가 상황에서의 문제해결 활동을 통하여 학생들의 수학적 사고 과정을 측정하는 데 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

이에 따라, 본 연구에서는 (기초적 연구의 성격으로) 지식과 사고의 관계를 통하여 사고 개념을 이해하고 수학적 사고 과정을 탐색하여 평가 상황에서 활용 가능한 몇몇 사고 기능 및 전략에 관한 평가 요소를 제시하고자 한다. 또한, 이러한 평가 요소의 실제적인 활용의 예를 보여주기 위하여 관찰 또는 면담법에서 사용 가능한 기록법을 제시하고자 한다.[3)] 이로써 본 연구는 향후 수학적 사고 과정 관련의 평가 요소가 보다 다양하게 제시되고 이에 관한 구체적인 평가 방법(특히, 기록 방법)이 개발되기를 기대하며 궁극적으로 수학적 사고 능력의 함양을 위한 지도 및 평가가 활성화 되도록 하는데 기여하고자 한다.

---

* 2001년 2월 투고, 2001년 9월 심사 완료.
* 주제어 : 수학적 사고, 평가 요소, 비판적 사고 과정.

1) 이 연구는 1999년도 한국교육과정평가원에서 주관하는 개인 공모 연구 과제에 선정되어 수행한 것임.

2) 본 고에서 '수학적'이라 함은 '수학 교과에서 적용 가능한', 즉 '수학 교과 관련의' 상황을 뜻함.

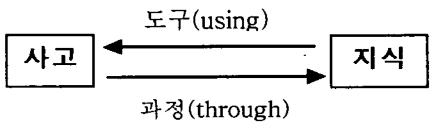
3) 부연 설명하면, 본 고에서는 학생들의 수학적 사고 기능 및 전략을 측정하기 위하여 별도의 지필검사 문항의 개발이 필요함을 강조하는 것이 아니라, 일반적인 수업이나 평가 상황(가령, 개인별 또는 집단별 프로젝트 수행 과정 및 발표 등)에서 교사의 관찰이나 면담 등을 통하여 학생들의 수학적 사고 기능이 측정되기를 기대하며, 이를 위하여 관찰이나 면담시 평가 요목(항목)으로 활용할 수학적 사고 기능 및 전략 관련의 평가 요소를 탐색·개발하고자 하였음.

II. 수학적 지식과 사고 과정

이 장에서는 지식과 사고의 관계를 이해하고, 이를 토대로 수학적 사고 과정을 살펴보고자 한다.

1. 지식과 사고의 관계

우리는 무엇(내용)에 대하여 사고하고, 그 사고 과정을 거치면서 어떤 결과를 얻게 된다. 즉, '사고'란 아무것도 없는 상태에서 이루어지는 것이 아니라 '지식'이라는 도구를 사용하게 되므로, 유용한 도구를 많이 보유할수록 보다 성공적인 사고를 거둘 수 있다고 보아진다. 여기서 지식과 사고의 구분은 사고란 정신적인 과정 자체로 존재하지만, 지식은 사고의 과정을 통한 어떤 소산물로 존재 가능하다고 할 수 있으며, 결과적으로 지식과 사고는 서로 분리가능하기보다는 상호작용적이라 할 수 있다(김영채, 1998)(<그림 1 >참조).



<그림 1> 사고와 지식의 관계

흔히, 지식 또는 내용을 단어와 문장으로 이루어진 집합체로 간주하고, 어떤 한 사람이 이것을 기억하거나 재생하여 다른 사람에게 전해주기만 하면 되는 단순한 것으로 생각하는 경향이 있다. 이것은 지식이 사고에 의존하고 있다는 것을 간과하는 셈인데, 지식이란 사고를 통하여 생성, 분석, 이해, 유지, 변형될 수 있는 것으로서 단순히 가시적인 글이나 책 속에 존재하는 것이 아니라 마음속에 존재한 상태에서 그 의미를 부여할 수 있다. 이는 곧, 인간의 마음이 가시적으로 존재하는 사물에 있는 것을 신중하게 받아들이고 음미하고 더 나아가 '비판적으로' 생각하는 과정을 통하여 비로소 지식을 얻을 수 있음을 뜻한다(<그림 3 참조>).

이러한 맥락에서 '수학적 지식이란 감지된 문제 상황에 대하여 각자 그것을 다루는데 사용될 정신적 과정(사고)과 대상을 구성하고 재구성하여 조직화함으로서 대처하려고 하는 것에서 비롯된다'는 Dubinsky(1994)의 정의는 '수학적 지식'을 사고의 한 가지 양식(mode)으로 간주하고 그러한 지식은 의식적이고 가변적이면서 발전적인 사고 속에서 존재하는 것이라고 할 수 있다. 결국, 흔히 말하는 '수학을 안다'고 하는 것이 공식을 외우고 외운 것을 확인해 볼 수 있는 정도만큼 수학을 아는 것이 아니라, 수학적인 사고를 할 수 있을 정도만큼 수학을 아는 것이라 할 수 있다. 혹자는 수학에서 다룰 내용이 너무나 방대하여 지식 습득에 얽매이고 사고하는 것을 소홀히 할 수밖에 없다고 하지만, 사고를 통하여 지식을 터득하는 과정을 거치지 않는다면, 사실적 지식을 기억하거나 암기하는데 그치기 쉬우며, 개념적 지식을 이해하는 데는 어려움이 따를 것이다.

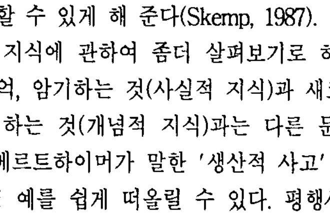
2. 사실적 지식과 개념적 지식

모든 지식의 기본 구성 단위는 '사실적 지식'이며, 이러한 지식은 어떤 대상에 관한 개별적인 '관찰'(기초적, 또는 경험적 사고)에서 얻어진다. 관찰은 단지 우리의 감각을 통해서 얻어지는 정보라고 정의될 수 있으며, 이때 결론을 내리고 규칙적인 방법을 찾고 또 미래를 예측하는 일은 (기본적으로 관찰을 필요로 하기는 하지만) 관찰 이상의 정신 과정을 포함하고 있는 것으로 간주한다. 이러한 몇 번의 (직·간접적인) 관찰을 통해 얻게 되는 공통적인 특징들을 추상화하거나 일반화하여 만들어지는 형태가 바로 '개념적 지식'이다(김영채, 1998).

예를 들어, 아동들은 그들이 보유하고 있는 수 개념을 이용하여 그와 관련된 문제를 잘 해결하고 나서도 그 문제를 어떻게 풀었는지 잘 설명하지 못하며, 왜 그렇게 풀었는지를 물으면, "그것은 그냥 그런 것이다."라고 말한다(Engen, 1953). 실제로 어떤 것에 대하여 (개념) 이름을 붙이기 전에 왜 그렇게 되었는지 그 일반화된 과정을 인식하는 것이 중요하다. 그런데, 학생들은 자신들이 풀지 못하는 수학 문제를 어떻게 풀어야 하는지를 질문하면서도 왜 그러한 방법을 이용하여 풀어야 하는 지, 그 문제에 관련된 개념이나 이론, 법칙은 무엇인지 등에 대해서는 듣으려고 하지 않는다. 이것은 단순히 암기한 몇 가지 공식에 따라 거의 의미 없는 기호의 조작만을 되풀이하여 학습하는 것을 뜻하는데, 이러한 의미 없는

또는 관련이 적은 공식들을 암기하여 기억하는 것은 이해가 수반된 '통합된 개념'의 구조보다 기억하기가 훨씬 어렵다. 오히려, 적절히 개념화된 이론이 그와 관계된 부류(class)에서 많은 수의 특정한 사건들을 설명하고 예측하고 조절할 수 있게 해 준다(Skemp, 1987).

개념적 지식에 관하여 좀더 살펴보기로 하자. 단순히 정보를 기억, 암기하는 것(사실적 지식)과 새로운 정보를 수용, 이해하는 것(개념적 지식)과는 다른 문제이다. 예를 들어, 베르트하이머가 말한 '생산적 사고' 또는 '구조적 이해'의 예를 쉽게 떠올릴 수 있다. 평행사변형은 다른 도형, 즉 한 쪽 끝의 갭을 완벽하게 메울 수 있는 덧붙여진 조각을 가진 직사각형으로 인식되고, 평행사변형을 수직선을 따라 나누고 이 나누어진 조각을 이리저리 맞추어 이것을 직사각형으로 변형시키면, 이때 '밑변 곱하기 높이'의 평행사변형의 넓이 공식은 아주 간단히 적용된다. 그러나, 넓이를 구하기 위한 알고리즘의 기초가 되는 원리, 즉 '넓이 알고리즘을 적용할 때 왜 수직선을 긋는지'를 이해하지 못하면 평행사변형이 안정적인 위치로 주어지지 않았을 때, 아동들은 도형의 밑변과 수직이 되게 선을 긋는 것이 아니라 종이의 아래쪽과 수직이 되게 선을 그어, 넓이를 구하는데 어려움을 겪게 된다 (Resnick 외, 1981)(<그림 2 참조>).



<그림 2> 평행사변형이 불안정한 위치로 주어진 경우

이처럼, 다양한 문제의 효과적인 해결에는 개념에 관한 지식이 필요하며, 이러한 지식을 단순히 암기하기보다는 그 지식이나 정보의 의의 내지 의미를 이해하는 것이 보다 중요하다고 하겠다. 지식은 단편적이고 개별적인 것보다는 개념적 형태로 서로 또는 전체가 연결되어 있는 유용한 것일 때 사고에 도움을 준다. 이와 같이, 유용한 지식(주로 개념적 지식에 해당된다고 생각함)은 학습자 자신이 내용 지식을 적극적으로 해석, 종합, 이해하며 이것을 내적으로 연결시킬 뿐만 아니라 다른 지식, 경험들과 외적으로 의미화 할 때 비로소 달성된다고 할 수 있다.

결국, 개념은 공통점이 있는 여러 개의 경험을 필요로 하며, 이러한 경험들 사이의 유사성을 인식하는 활동(유추)을 통하여 연결됨으로써 더 큰 형태의 개념으로 발전될 수 있다. 학습자 A와 B가 한 쌍의 마주 보는 변이 평행인 사각형을 '사다리꼴'이라고 배웠다고 하자. 학습자 A는 사다리꼴과 사다리꼴이 아닌(즉, 어떤 한 쌍도 마주 보는 변이 평행하지 않은) 사각형들의 모임에서 사다리꼴을 찾아보는 경험을 하고, 학습자 B는 사다리꼴과 사다리꼴이 아닌 사각형, 그리고 사다리꼴에 속하는(즉, 적어도 한 쌍 이상의 마주 보는 변이 평행한) 평행사변형의 모임에서 사다리꼴을 찾아보는 경험을 한다면, 이 학습과 관련하여 학습자 A는 학습자 B에 비해 보다 제한된 경험적 상황에 있었기 때문에, 그가 알고 있는 사다리꼴의 개념은 학습자 B가 알고 있는 것보다 제한적이라고 할 수 있다.

이와 같이, 개념은 많은 경험들을 결합하고 관련시키는 능력에서 나오며, 또한 그러한 개념이 일반화되면 될수록 그 힘은 더욱 커진다. 예를 들어, $\frac{2}{3}$를 종이 한 장의 $\frac{2}{3}$만큼의 양으로 아는 것과, 종이 세 장 중의 두 장의 개수로 아는 것은 기호 $\frac{2}{3}$에 대한 서로 다른 경험이라 할 수 있지만, 이와 같이, 서로 관련되어 있는 감각적 경험들은 기호 $\frac{2}{3}$에 통합되어진다. 결국, 개념을 형성하는 데 있어서 감각적 경험의 통합, 발전은 매우 중요한 역할을 한다. 그러나, 보다 추상적인 개념들에 관하여서는, 가령 수학에서의 증명, 수체계 등의 개념들은 감각적 경험에서 유도되기보다는 그 용어(단어)가 어떻게 사용되느냐에 관한 '통찰'로부터 기인된 것이라 할 수 있다 (Engen, 1953). 어찌되었든, 문제를 수행하는데 있어서 결정적인 역할은 문제 해결자들의 (개념적) 지식 구조, 즉 얼마나 많은 양의 특정 지식을 보유하고 있는지 그리고 그러한 지식을 유의미하게 조직, 통합시킬 수 있는지 등에 따른다고 할 수 있겠다(Glaser, 1984).

3. 수학적 사고 과정

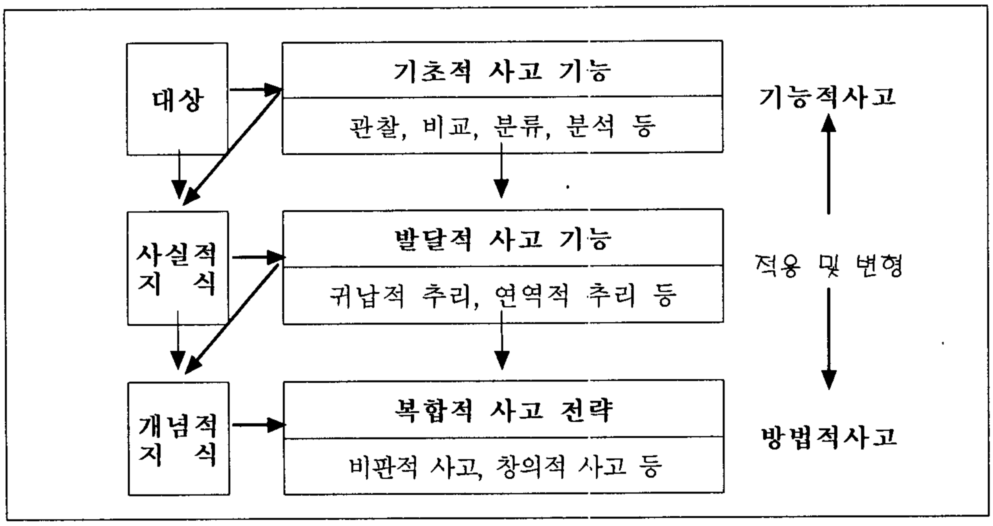
일반적으로, 사고의 발달은 구체적 수준에서의 단순한

사고에서부터 추상적인 수준의 복합적인 사고 전략으로 진행한다. 즉, 기초적 사고 기능은 보다 단순하고 개별적인 성질이 강하며, 몇 개의 기초적 사고 기능들이 조합하여 소위 발달적 사고 기능을 수행한다. 또, 발달적 사고 기능은 과제의 요구에 맞게 수정, 조정되어 적용됨으로써 복합적 사고 전략을 생성한다(김영채, 1998; 김종석, 1997; 성일제, 1994).[4] 앞서 진술한 지식의 형성 과정에서 이루어지는 사고 작용에서 알 수 있듯이, 사고 과정을 거쳐 습득된 결과들은 일차적으로 사실(정보적, 또는 사실적 지식)에 해당되고, 이는 다시 보다 발전적이고 견고한 사고를 통하여 새로운 지식(개념적 지식)을 습득하게 되고, 결국 이러한 순환적 과정을 통해 비판적이고 창의적인 사고가 형성된다고 할 수 있다. 이러한 과정을 정리하여 그림으로 나타내면 다음과 같다(<그림 3> 참조[5])).

이 과정에서 새로운 사고의 발달 수준은 이전까지 습득한 사고를 보다 정교화 하고, 점차로 추상적인 내용을 처리할 수 있는 능력을 개발시키면서 발전해 간다. 예를 들어, 어린 학생들은 바둑돌, 사탕 등의 구체물을 가지고 '분류'하거나 합하여 수와 셈을 익히고, 좀더 발달한 학생들은 자료를 수집하여 요구되는 특징에 따라 이를 비교, '분류'하여 분석하거나 해석한다. 성인이 되면 수학적 사고, 수학적 오개념 등과 추상적인 개념들을 '분류'하여 수학적 성취 수준을 높이는 데 기여할 수 있는 조치나 처방을 내릴 수 있다. 이처럼, 사고 과정은 사고자(학습자)가 이미 보유하고 있는 지식 수준과 인지 조작(사고) 수준에 따라 그리고 과제의 특성 및 수준에 따라 상이한 수준에서 수행되고, 그 결과 다른 수준의 사고 기능을 얻게 된다. 그리고, 새로운 과제나 좀더 발전적인 과제가 주어졌을 때, 그 과제에 맞도록 현재 가지고 있는 능력과 지식을 새롭게 맞추고 조작할 수 있는 '적용과 변형' 과정을 거치게 된다.

III. 수학적 사고 기능 및 전략에 관한 평가 요소

이 장에서는 앞의 <그림 3>에 제시된 여러 가지 사고 기능 및 전략 요소 중에서 관찰과 추리, 일반화, 비판적 사고를 중심으로 살펴보고,[6] 각각에 대한 평가 요소



<그림 3> 수학적 사고 과정

4) 일반적으로 비교적 단순하고 다소간 비연속적인 정신적 조작을 가리켜 흔히 '사고 기능'이라 하고, 보다 복합적이고 복잡한 과정들을 '사고 전략'이라 부른다.

5) 이 그림은 김영채(1998)가 제시한 '사고 과정의 분류'를 근간으로 여러 문헌(참고 문헌 참조)을 참고하여 본 연구자가 도식화하여 나타낸 것임.

6) 본 고에서 여러 가지 사고 기능 및 전략 중에서 관찰과 추리, 일반화, 비판적 사고에 국한하여 살펴본 것은 하나의 제

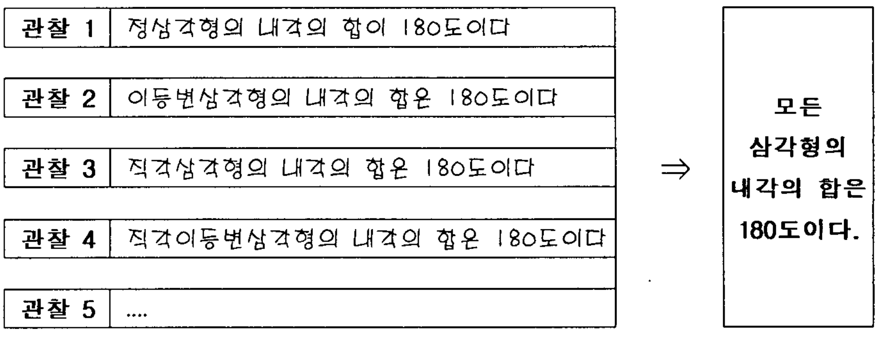
를 제시하고자 한다.

1. 관찰과 추리

실제로, 문제 해결력, 비판적 사고, 창의적 사고 등의 고차적 사고 전략도 중요하지만, 몇 개의 기본적인 행동이나 순서에 관한 미시적 기능도 중요하다. 왜냐하면, 이러한 기능들이 익숙해졌을 때 비로소 문제를 해결하는 능력이나 비판적으로 생각하는 능력이 형성될 수 있기 때문이다. 우리가 첫 번째로 정보를 습득하는 가장 기본적인 방법은 관찰이다. 관찰은 단지 우리의 감각을 통해서 얻어지는 정보라 할 수 있다. 이처럼 관찰이 언뜻 보기에는 매우 직접적이고 간단한 기능 같아 보이지만, 자칫 잘못하면 경험, 감정, 지적 성향, 예측 등에 의해서 관찰 결과가 여과되거나 왜곡될 수 있기 때문에 관찰은 정확하면서도 구조적이고 포괄적이어야 한다. 이와 같이, 주어진 대상을 전체적, 구조적으로 보기 위해서는 확인, 차이, 유사성, 3변별 등의 관찰 능력 요소가 갖춰져야 한다(<표 1> 참조).

추론(추리)에는 '귀납'과 '연역'이라는 두 가지의 강력한 방향성이 있다(김영채, 1998; Holmes, 1995)(<그림 4> 참조). 연역 추리는 일반적인 형태에서 시작하여 어떤 구체적인 것에 대한 결론에 이르는 것을 말하며, 귀납 추리는 몇몇 경험을 통해 거기에서 일반적인 법칙을 발견하거나, 그 법칙을 얻기 위해 자료를 모아 일반적인 법칙을 추구해 나아가는 것을 말한다. 또, 연역적 추리는 논리적인 규칙을 따르기만 하면 얻는 결론이 언제나 타당한 것에 비해, 귀납 추리의 타당성은 확률적이다.

이용률 외(1992)는 귀납 추리를 다음과 같이 정의하고 있다. "관찰된 개개의 사례를 총괄하고, 그 사례의 규정이 필연적으로 거기에서 도출될 일반적인 주장의 판단을 확립하는 추리를 귀납추리라고 한다."(p.122) 여기서 말하는 귀납법은 일반적으로 불완전 귀납을 의미하는데,[7] 불완전 귀납법이란, "많은 사례에서 볼 수 있는 동일한 주장이 미지(未知)이고 종류가 같은 사례에서 성립할 것으로 보고, 그 사례의 class에 대한 일반적인 주장을 천명하고, 보편적인 법칙을 발견하는 귀납적 추리이며, 그 근거로서는, 통상 자연의 일반성을 든다."(이용률 외,



<그림 4> 관찰을 통한 일반화 과정

관찰을 기초로 그것을 확대시켜 어떤 결론에 이르는 것이 추리이다. 추리는 이유들 사이의 관계를 규칙에 따라 '추론'하고 결론에 이르기 위한 것으로, 이러한 논리적

한점이라 할 수 있으며, 이들을 중심으로 살펴본 이유는 수학 교과에서 올바른 수학적 개념의 이해 및 문제해결상황에서 요구되는 중요한 사고 기능 및 전략으로 판단되었기 때문이다.

7) 불완전 귀납법과 상치되는 개념으로, 완전 귀납법은 어떤 모임에 속하는 유한개의 사례를 모두 열거하여 주장하는 것으로서, 이미 알려져 있는 사실의 기록에 불과하며 새로운 법칙의 발견에 이르지 못한다. 예를 들어, 초등학교 학생들에게 주사위의 마주 보는 면에 있는 눈의 수 사이에 어떤 관계가 있는지를 알게 하려면, 우선 주사위의 모든 마주 보는 면에 있는 눈의 수의 짝을 짓게 한다. 그러면, 학생들은 (1, 6), (2, 5), (3, 4)를 얻게 되고, 이로부터 두 눈의 합이 각각 7이라는 것을 알 수 있다.

1992, p. 122-123) 즉, 귀납적 추리는 일반적으로 상호 관련된 여러 관찰들을 유용한 방법으로 '압축'하여 사용하는데 이용될 뿐만 아니라 관찰이 불가능한 영역에까지 확대하여 사용하는데도 이용된다.

2. 일반화

귀납적 추리는 개별적인 관찰에서 시작하여 지속적인 관찰을 통해 그들 속에서 어떤 형태(패턴, 규칙, 정형, 질서 등)를 발견해 나아가는 '과정'이며, 여기서 이러한 형태를 나타내 주는 '결론'을 내리는 것에 초점을 두게 되면 우리는 이를 흔히 '일반화'라 부른다(<그림 4> 참조). 결국, 이러한 일반화된 귀납적 추리는 연역(설명과 예측)을 가능케 하는 그 어떤 일정한 방향으로 일련의 관찰을 종합하여 얻어낸 결론이라 정의할 수 있다. 그런데, 이러한 일반화된 결과에 대하여 신뢰감을 갖기 위해서는 지지할만한 충분한 관찰의 횟수와 일관성이 유지되어야 할 것이다(김종석, 1997 ; 이용률 외, 1992). 그런데, 실제로 우리는 한 두번의 관찰로 어떤 패턴(일반화)을 만들어 버리는 경향이 있다. 예를 들어, 학원에 다니는 학생 두 명을 알고 있을 때, 이들 모두 학교에서의 수학 성적이 우수하다면 우리는 흔히 학원에 다니면 수학을 잘하게 된다고 단정지어 말한다.

한편, 일반화에 도달하기 위한 가장 보편화된 방법 중에 하나가 유추인데, 유추는 어떤 특수한 경우에서 다른 특수한 경우에 이르는 추리이다. 유추는 어떤 대상이나 집합에서 성립하는 사실이 이와 유사한(다른 몇 가지 점에서도 같은 성질을 갖는) 대상 또는 집합에 대해서도 성립하리라고 추측하는 것이다.

예를 들어, 초등 학교 5학년에서 다뤄지는 선대칭 도형에 대하여 생각해 보자. 선대칭 도형은 꼭 맞게 포개어진다. 그래서 점대칭도 선대칭에서와 같은 방법으로 생각해 볼 수 있다. 즉, 선대칭의 경우와 같이, 도형을 반으로 절단하여 한쪽을 다른 쪽 도형으로 옮겨서 포개어지는지를 알아본다. 이때, 점대칭의 성질은 선대칭의 성질에서 유추된다. 즉, 선대칭일 때, 대응하는 점끼리 연결한 선분은 대칭을 이루게 하는 선, 즉 '대칭축'에 의해 이등분되었으므로, 점대칭일 때도 대응하는 점끼리 연결한 선분이 대칭을 이루게 하는 점, 즉 '대칭의 중심'에 의해 이등분될 것이라는 예상을 할 수 있을 것이다. 그리하여, 선대칭과 점대칭의 개념 내지 성질을 토대로, 이를 선대칭의 위치에 있는 도형과 점대칭의 위치에 있는 도형의 개념으로 확장하여 대칭도형에 관한 통합적인 이해를 도모할 수 있을 것이다. 그러나, 유추나 귀납 추리에 의한 일반화 사고 기능은 언제나 정확하고 완전하다고 볼 수 없으므로, 연역적으로 생각할 필요성을 갖게 한다. 즉, 연역적으로 증명(설명)하는 것이 바람직하다는 말이다. 그러므로, 방금 유추한 사실이나 일반화된 결과가 '참'인지 의문을 가지고 생각하려고 하는 태도가 중요하다.

이상으로, 수업이나 평가의 문제 해결 상황에서 유추나 귀납 추리 과정을 통해 일반화에 이르는 사고 능력은 <표 1>과 같은 단계를 거치면서 이루어질 것이고 이는 주요한 평가 요소로 활용될 수 있을 것이다(<표 1> 참조).

3. 비판적 사고

비판적 사고는 주어진 상황이나 문제에 대하여 그에 관한 모든 것을 조사하고 상호 관련성을 파악하고 평가하는 사고이며, 이는 더 낫게 더 합리적으로, 그리고 더 생각해 보고 판단하기 위함이다. 즉, 얼른 떠오르는 충동적 생각에 휩쓸리지 않고 일단 그것을 정지시키고 그러한 생각들을 조심스럽게 사고(추리)해 본 다음 판단하는 사고를 말한다. 사실, 이 세상에서 생각을 안 하고 사는 사람은 없다. '생각 좀 해 보아라' 라는 말의 전제는 생각을 하고 있지 않으니 생각을 하라고 한다거나, 또 생각이 잘못 되었으니 생각을 바꾸라고 단정짓는 말이 아니라, 좀더 신중히 생각해 보라는 뜻이다.

이렇듯, 비판적 사고는 특정 결론(주장)에 대한 수용 여부의 결정을 '보다 낫게' 하는 것을 목적으로 한다. 합리적으로 생각하는 사람은 어떤 결론에 대하여 그것을 수용할 것인지 기각할 것인지에 관한 판단을 결정하는데 있어서 그 결론의 타당성, 신뢰성, 그리고 중요성에 대하여 사정(査定)하고, 그 결과를 기초로 결론의 수용 여부를 결정한다고 한다(Resnick, 1987).

<표 1> 관찰 및 일반화 능력에 대한 평가

	평가 요소
관찰	·(주어진) 문제의 주제와 결론(구하려는 것)은 무엇인가? ·그 결론을 지지하는 진술이나 증거는 무엇인가? 이에 대한 구체적이고 쉬운 자료나 정보를 충분히 모았는가? ·그 자료(정보)의 성질, 특성 등과 유사성을 가진 자료(정보)를 보거나 사용한 경험이 있는가? 그렇다면, 그 자료(정보) 사이에는 어떤 공통적인 사실이나 성질이 있는가?
유추 및 귀납추리	·두 문제나 상황 사이에서 공통적인 사실이나 어떤 유사성을 인식하였는가? 이를 설명할 수 있는가? ·위의 문제 상황을 해결하는데 동일한 방법을 사용하면 되는가? 그렇다면, 그것은 어떠한 방법인가? ·하위의 구체적인 사례들을 종합하여 상위의 일반적인 원리나 법칙을 구성할 수 있는가? ·여러 가지 수학적인 사실에서 규칙성을 발견할 수 있는가?
일반화	·발견한 공통적인 사실이나 성질을 말이나 기호, 수식 등의 수학적 언어로 정리하여 표현할 수 있는가? ·결과적으로, 어떠한 일반성을 이끌어 낼 수 있는가?
연역추리	·추측한 일반성이 참임을 보다 확실히 하기 위하여 어떤 새로운 자료 또는 정보로 확인했는가? ·전제로 주어진 명제들로부터 논리적 규칙을 써서 결론을 엄밀하게 도출하였는가? ·상위의 일반적 원리나 법칙을 하위의 구체적인 상황에 적용할 수 있는가?

따라서, 비판적 사고는 학습하는 내용을 보다 깊게 이해하고, 그 내용을 따져보고 사정해 보고, 그것을 확대, 적용해 보도록 하는 과정을 거치면서 향상될 수 있는 기능이라 할 수 있겠다. 그런데, 논증에 관한 분석 자체는 결론과 전제 사이의 관계만을 다룰 뿐, 결론을 뒷받침하고 있는 전제들이 사실인지 아닌지에 관해서는 개의치 안는다. 그래서, 논리적으로 타당한 결론일지라도 비판적 사고로는 그것이 충분히 믿을만하지 못한 결론일 수도 있다. 그러므로, 타당한 결론에 이르기 위해서는 그 결론을 지지하는 전제가 적절하고 충분한지, 아니면 부적절한지 등을 사정하는 단계가 포함되어야 할 것이다. 이처럼, 전제를 근거로 하여 결론이라는 논증의 가치 내지 진실을 밝히고 그래서 더 나은 '판단'에 이르도록 하는 것이 비판적 사고의 핵심이라고 할 수 있다(성일제, 1989)(<그림 5> 참조).

마찬가지로, 수학에서도 비판적 사고는 주어진 문제 상황에 관하여 그 문제를 이해하고 관련된 정보를 인식, 수집, 조직, 기억, 또는 분석하는 활동을 통해 주어진 자료로부터 적절한 결론을 이끌어 내고, 그 자료에서 모순성과 불일치를 판단할 수 있는 능력을 말한다. 이러한 비판적 사고의 관점에서 수학을 가르치려면, 학생들이 비판적 사고 기능을 수학적 상황으로부터 실제 세계의 상황으로 전이하도록 도와주어야 하는데, 이는 학생들이 수학적 내용을 문제 또는 실제 상황에 적용하고 다시 실제 상황을 수학적 문제, 내용으로 해석할 수 있는 수학적 모델 과정에서 용이할 것이다(English, 1997).

다음의 예를 생각해 보자(대한수학교육학회, 1995, p. 39). 이 문제는 문제 관련의 상황을 토론하고, 이를 해결

적절 (강한) ↓ 부적절 (약한) ↓ 부적절 (약한) ↓ 적절 (강한) ↓

{ [(전제1 + 전제2 + 전제3 + 전제4 +⋯) ➡ 결론] ➡ 논증} ➡ 비판적 사고

↓

판단

전제가 타당한가? 적절한가?

<그림 5> 비판적 사고 과정

하기 위한 아이디어를 마련하고, 모두가 수용할 수 있는 해답을 찾거나 소수의 의견을 제시하고, 한 가지 결정에 도달하도록 그들의 생각을 토론해야 할 것이다.

세 개의 고속도로가 정삼각형 모양의 지역을 둘러싸면서 만나고 있다. 정삼각형 모양의 땅 안에서 공장을 짓기에 가장 좋은 장소는 어디라고 생각하는가?

그러므로, 이러한 사고를 이끌어 내기 위해서는 기본적으로 학생들이 자신의 사고를 모니터하고, 평가하고, 그에 따라 행동하도록 자극할 수 있는 다음과 같은 질문(단계)을 염두에 두어야 할 것이다. 이는 앞서 제시한 일반화 능력에 대한 평가 요소와 마찬가지로, 수업이나 평가의 문제 해결 상황에서 전제와 결론을 바탕으로 하여 판단을 통해 길러지는 비판적 사고 능력에 관한 주요 평가 요소로 활용될 수 있을 것이다(<표 2> 참조).

<표 2> 비판적 사고 능력에 대한 평가 요소

	평가 요소
결론 (주장)	·(주어진) 문제의 주제는 무엇이며 결론(구하려는 것)은 무엇인가?
	·자신의 결론을 옹호하기 위한 증거나 보기는 마련하였는가?
	·그 증거에 대한 충분한 자료(정보)를 갖추고 있는가?
전제 (이유)	·그 자료(정보)로부터 문제 해결에 유용한 사실을 알고 있는가?
	·그러한 사실을 바탕으로 문제상황에서 구체적인 사례를 들어 설명할 수 있는가?
	·결론을 뒷받침하는 다른 반대 증거나 반대 보기가 있는가?
판단	·여러 가지 결론이나 전제 사이에 일관성이 있는가? 그렇다면, 그것을 어떻게 설명할 수 있는가?
	·결론을 뒷받침하는 전제가 적절하고 타당하다고 생각하는가? 그렇다면, 그것은 어떤 판단에서 비롯되었는가?
	·주어진 문제 상황에서 판단의 준거는 무엇이라고 생각하는가?
	·자신의 판단이 옳다고 생각하는 이유는 무엇인가?
	·자신의 판단으로 해결될 수 있는 문제의 특징이 있는가? 그렇다면 그 특징은 무엇인가?
	·궁극적으로, 그 결론은 자신의 '판단의 준거'를 만족하고 있는가?

여기에서는 임의의 문제해결 활동 과정에서[8] 평가자(교사)가 피평가자(학생)의 비판적 사고 능력을 측정하는 상황을 가정하여, 관찰이나 면담과 같은 정의적 영역의 평가에서 주로 사용되는 평정척도법을 이용하여 해당 평가 요목을 제시하고자 한다(<부록 1> 참조).

IV. 맺는 말

지금껏 대부분의 수학 교사들이 수업 시간에 학생들에게 '생각하는 법'을 가르치기 위하여 부단히 노력해 왔을 터인데 사고 기능 및 전략이 학교 교육에서 그다지 강조되어 다루어지지 못하는 이유를 생각해 보면, 학자들 사이에 어떤 수학적 사고 기능을 가르쳐야 할 것인가에 대한 의견의 불일치, 그리고 그러한 기능을 평가하기 위한 도구 내지 방법의 부재 등을 들 수 있다. 특히, 사고 기능 교육에 대한 지도는 항상 가르쳐지는 내용의 함축된 부산물로 간주되어 왔으며, 과연 사고하는 기능이 하나의 독립 과정이 되어야 하는지에 관한 논의는 아직까지 명확히 드러나지 않았다. 현재로서는 사고 능력을 기르기 위한 특별한 프로그램들의 효과에 대한 증거가 희박할 뿐만 아니라, 내용 지식의 공백 상태에서 사고하도록 요구받는 것은 문제가 많다는 지적이다(Resnick, 1987).

결국, 사고의 내용과 기능은 엄밀히 구분될 수 없으며, 사고를 가르치는데 가장 적절한 방법은 어떤 내용과 함께 사고 기능을 가르치는 것이다. 한 연구 결과에 따르면, 주어진 자료를 정교화 하고, 명백히 제시되어 있는 것 이상을 예측하고, 적절한 표현을 만들어 내고, 관계를 분석하고 구성하는 것과 같은 복잡한 사고 기능 및 과정이 필수적인 정신 활동에 포함된다고 한다(Resnick, 1987). 그렇다면, 대부분의 학습자들은 교재에 적혀 있는 것 이상의 정보를 사용하거나 유추해 냄으로서 책에 있는 내용을 제대로 파악할 수 있는 능력을 갖추고 있다고 볼 수 있다. 마찬가지로, 그러한 책에 적혀 있는 수, 기호 등이 조작되어 생성된 규칙들을 단지 암기해서는 기

8) 앞에서 이미 언급하였듯이, 본 고는 일반적인 수업이나 평가 상황에서 교사의 관찰 또는 면담을 통한 수학적 사고 기능 및 전략의 평가를 염두에 두는 것으로, 여기에서 말하는'임의의 문제해결 활동'이라 함은 수업 시간이나 평가 상황에서 교사 나름대로 진행하는 과제 또는 프로젝트 등을 통한 문제해결 활동을 뜻함.

초적인 수학 내용조차 효과적으로 학습할 수 없음은 당연하다.

일반적으로, 학습자들은 그들의 관심/능력/전문 분야에서는 강력하지만 적용 범위는 그다지 포괄적이지 못한 사고 방법을 따르고, 그들의 비관심 분야에서는 포괄적이지만 그다지 강력하지 못한 사고 방법을 따른다고 한다(Resnick, 1987). Resnick (1987)은 좋은 사고자가 되려면, (포괄적이지 않더라도) '힘 있는', 또 (강력하지 않다면) '포괄적이기라도 한' 그러한 사고 능력을 보유하면 된다고 하였다. 그럼에도 불구하고, 지금껏 학교 교육에서는 유능한 사고력을 갖춘 학습자가 소수 몇몇에 국한된 것으로 한정되어 왔다. 그래서, 모든 학습자들이 복잡한 교재를 다루고 본인의 주장을 표현하고 문제에 대한 풀이 과정을 전개해 나갈 필요가 없다고 치부되어 왔다. 그러나, 이러한 능력들은 사회적 조건, 재정적 여건 등이 향상됨에 따라 점차 모든 학습자들에게 요구되고 있다. 이러한 즈음에, 우리는 더 이상 '수학 시간에 학생들이 생각하기를 싫어한다', '수학 시간에 학생들은 그저 문제를 어떻게 풀어야 하는지에 관심을 갖고 그 방법을 들려주기만을 원한다'고 단언해서는 안될 것이다. 이제, 의식적으로라도 수학 수업 지도 및 평가 상황에서 내용에 기초한 수학적 사고 기능 및 과정을 강조하여 다룰 때이다.

결국, 이러한 노력의 일환으로 본 고에서는 사고 개념을 고찰하고 수학적 사고 과정을 살펴보았으며, 이를 근간으로 수학 교과에서 중요시 다뤄지는 수학적 사고 기능 및 전략(즉, 관찰과 추리, 일반화, 비판적 사고)에 관한 평가 요소를 탐색해 보았다. 그러나, 본 연구에서 다룬 평가 요소는 일부 사고 기능 및 전략에 관한 것이므로, 이를 시발점으로 하여 보다 다양한 수학적 사고 관련의 평가 요소가 마련되어야 함은 물론 이를 기초로 하여 실제 활용 가능한 평가 도구 및 방법 등도 연구·개발되어야 할 것이다. 그럼으로써, 수학 수업에서의 사고력 함양을 위한 지도 및 평가가 보다 활성화되고 실현될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

김영채 (1998). 사고력 : 이론, 개발과 수업. 교육과학사.

김종석 (1997). 사고기능과 교수-학습 전략, 교육과학사.

대한수학교육학회 (1995). 수학교육연구주제 2. 1995년 대한수학교육학회 하계 집중 세미나. (원저: O'Daffer, Phares G. & Thornquist, Bruce A., Research Ideas for the Classroom High School Mathematics, NCTM, 1993.)

성일제 (1989). 사고교육의 이론과 실제, 배영사.

이용률·성현경·정동권·박영배(공역) (1992). 수학적인 생각의 구체화, 서울: 경문사.

Dubinsky, Ed. (1994). Comments on James Kaput's Chapter(Democratizing Access to Calculus : New Routes to Old Roots). *Mathematical Thinking and Problem Solving*, In Alan H. Schoenfled(Ed.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Engen, Henry V. (1953). The Formation of Concepts. *The learning of Mathematics : Its theory and practice.* The National council of Teachers of Mathematics Twenty-First Yearbook.

English, Lyn D. (1997). Children' Reasoning Processes in Classifying and Solving Computational Word Problems. *Mathematical Reasoning.* In L. D. English(Ed.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Glaser, R. (1984). Education and Thinking: The role of knowledge. *American Psychologist* **39(2)**, pp.93-104.

Holmes, Emma. E. (1995). *New Directions in Elementary School Mathematics.* Merrill Prentice Hall.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Resnick, Lauren B. (1987). *Education and Learning to Think.* National Academy Press.

Skemp, Richard R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Evaluation Factor related to Thinking Skills and Strategies based on Mathematical Thinking Process

Hwang, Hye Jeang

Department of Mathematics Education, Chosun University, susuk-dong, dong-gu, kwangju Seoul, Korea, 501-759

Developing mathematical thinking skills is one of the most important goals of school mathematics. In particular, recent performance based on assessment has focused on the teaching and learning environment in school, emphasizing students' self construction of their learning and its process. Because of this reason, people related to mathematics education including math teachers are taught to recognize the fact that the degree of students' acquisition of mathematical thinking skills and strategies(for example, inductive and deductive thinking, critical thinking, creative thinking) should be estimated formally in math class. However, due to the lack of an evaluation tool for estimating the degree of their thinking skills, efforts at evaluating student's degree of mathematics thinking skills and strategy acquisition failed. Therefore, in this paper, mathematical thinking was studied, and using the results of study as the fundamental basis, mathematical thinking process model was developed according to three types of mathematical thinking - fundamental thinking skill, developing thinking skill, and advanced thinking strategies. Finally, based on the model, evaluation factors related to essential thinking skills such as analogy, deductive thinking, generalization, creative thinking requested in the situation of solving mathematical problems were developed.

<부록 1> 평정척도법을 이용한 수학적 사고 기능 및 전략 평가의 예[1)]

평 정 척 도						
관찰(면담) 요목		매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
결론	• 문제의 주제와 결론을 파악하였는가					
	• 자신의 결론을 주장하기 위한 증거와 보기를 마련하였는가					
	• 자신의 결론을 충분히 옹호(설명)하였는가					
전제	• 그 자료나 정보로부터 문제해결에 유용한 사실을 파악하고 있는가					
	• 그러한 사실을 바탕으로 문제 상황에서 구체적인 사례를 들어 설명하였는가					
	• 결론을 뒷받침하는 반대 증거나 반대 보기를 고려하였는가					
판단	• 여러 가지 결론이나 전제(가정) 사이에 일관성이 있는가					
	• 여러 가지 결론이나 전제 사이에 일관성이 있음을 적절히 표현(또는 설명)하였는가					
	• 결론을 뒷받침하는 전제가 적절하고 타당한가					
	• 자신의 판단이 옳음을 적절히 표현(또는 설명)하였는가					
	• 자신의 판단으로 해결될 수 있는 문제의 특징을 파악하였는가					
	• 궁극적으로 그 결론은 자신의 판단과 일치하다고 생각하였는가(또는 만족하였는가)					

1) 본 고에서 제안한 평정척도법에서의 관찰(면담) 요목은 그때그때의 상황에 따라(즉, 평가 목적이나 평가 목표, 평가 대상 등) 적절히 재구성하여 활용해야 할 것임.