韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 11. 제 40권, 제 2호, 241-252.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2001, Vol. 40, No. 2, 241-252.

고등 수학 개념의 올바른 이해를 위한 유의미한 교수법 탐색

한 길 준 (단국대학교)
우 호 식 (미림여자전산고등학교)

Ⅰ. 서 론

현행 교과과정을 배우는 학생들의 대다수가 초등학교에서 수학 교과의 기초적인 셈과 연산 개념이나 자연수, 분수와 같은 기본적인 수 개념 그리고 간단한 도형 개념을 다룬다. 그 후 중학교 교과과정을 시작하면서 다소 이해하기가 어려운 개념들인 집합, 변수, 함수, 복소수, 접선, 미·적분, 무한의 극한 개념과 같은 고등 수학 개념들을 배우게 되면서 점점 더 수학에 대한 흥미와 자신감을 현저히 잃어 가고 있는 실정이다. 이러한 현상은 대학생이 되어서도 계속 이어진다. 이렇게 추상화된 개념들로 구성된 중등 이상의 수학 교과에서 엄밀하고 연역적인 형식과 다양한 기호들의 언어는 학생들에게 사고의 어려움을 가져오게 하고, 이들 개념을 이해하려는 심리적 괴로움은 수학교과 배척의 원인이 되기도 한다. 그러므로 학생들은 종종 수학을 이수하기 위한 유일한 방법으로 중학교 이상의 수학 교과에서 접하는 고등 수학 개념의 정확한 이해보다 오히려 암기 학습을 택하게 된다. 실제로 수학 교과 내에서 정의 속에 함축되어 있는 개념이 유의미하게 이해되지 않은 채 학생들 사고 속에서 개념의 즉각적인 암기로서 그나마 단기적 활용에는 가능하지만 활용 후에는 곧바로 잊어버리게 된다는 사실을 감안할 때, 개념에 대한 일시적으로 분석된 사항과 기억들은 당연히 학생들에게는 언제나 두렵고 생소한 것일 뿐이다. 결국 개념이 올바로 체득되지 않은 상태에서 이해하지 못한 채 더 큰 학습불안을 야기하고 점차 학습마저도 포기하기에 이르게 되는 것이다. 실제로 수학 교수-학습이 이루어지는 현장 교실 수업에서 학생들의 개념에 대한 이해 정도를 알아보면, 많은 학생의 경우 개념에 대한 정확한 이해의 부족에서 오는 오개념이 형성되었음을 발견하게 된다. 아울러 응용 문제 풀이에서도 그 오개념의 영향으로 풀이 과정에서 오류 또는 개념에 대한 사고 전환의 장애가 있음을 확인할 수 있다. 아울러 많은 학생들이 호소하는 것과 같이 혼자의 힘으로는 도저히 교과서 연습 문제나 종합 문제를 풀 수가 없다는 결과가 초래된다. 이는 개념을 정확하게 이해하지 못한 데서 발생하는 결과라고 본다. 이렇게 하나의 개념이 완전히 습득되지 못한 채 계속되는 수업 상황에서 한 개념과 그 개념의 하위 개념 사이의 관계는 다음 단원에서도 이와 관련이 깊은 또 다른 개념간의 거듭된 불완전한 오개념을 불러일으키게 된다. 이런 수업 상황을 항상 접하고 있는 현장 수학 교사들에게 교수법적인 측면에서 "개념을 어떻게 올바르게 가르칠 것인가?", "개념을 어떻게 유의미하게 이해시킬 것인가?", "한 개념과 그 개념의 하위 개념간의 유의미한 이해를 도모하기 위해 어떤 교수-학습 상황이 효과적인가?"라는 물음이 제기된다.

이에 본 논문에서는 고등 수학 개념의 올바른 이해를 위한 유의미한 교수법 탐색을 위하여 선행 연구 자료에 의거하여 개념 정의와 개념 이미지, 개념의 이해를 돕기 위한 직관의 역할과 개념의 표상, 의사 소통으로서의 교수적 대화를 고찰해 보고, 이를 토대로 한 Ausubel의 유의미 학습 이론과 관련하여 교사와 학생 사이의 상호 역할에 대하여 검토해 봄으로써 현장 수학 교사들이 앞으로의 교수-학습 상황하에서 효과적이고도 유의미한 교수법을 채택하는데 도움을 주고자 하는 바램에서 탐색하고자 한다.

Ⅱ. 고등 수학에서의 개념 정의와 개념 이미지

1. 개념 정의와 그에 따른 교수법

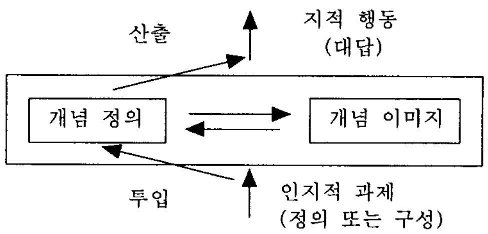
* 2000년 11월 투고, 2001년 7월 심사 완료.
* 주제어 : 개념 정의, 개념 이미지.

수학은 기본 개념과 공리에서 시작하는 연역적 이론이기에 기본 개념에 의해 다른 모든 개념들이 정의되고, 공리가 아닌 모든 정리 또한 추론 규칙에 따라 공리로부터 증명을 해 나가는 순서를 밟게 된다. 물론 모든 상황을 기본 개념과 공리만으로 시작할 수는 없다. 잘 알려진 개념과 정리에서 출발하여 새로운 개념을 정의하고 새로운 정리를 증명해 나가는 것이 보통이라고 할 수 있다. 개념은 주로 정의에 의해 획득된다. 수학적 관점에서 필요하다면 학생들은 정의를 이용해서 문제를 풀고 정리를 증명하기도 한다. 개념 정의를 할 때 정의는 되도록 학생들이 이해하기가 쉬운 것이 좋다. 예를 들어 절대값의 정의로서 $|x|=\sqrt{x^2}$ 와 $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$ 두 경우 모두 형식적인 정의이지만 $|x|=\sqrt{x^2}$ 보다는 $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$ 이 더 학생들이 개념을 이해하는데 있어서 빠른 이해도를 보인다. 여기서 절대값의 정의를 거리 개념으로 도입하는 교과서에서는 수의 절대값을 수직선 위의 원점에서 그 수까지의 거리라고 말하고 있다. 이 경우에, 학생들은 절대값이 포함된 방정식이나 부등식을 풀 때 어려움을 겪게 된다는 것은 자명하다. 예를 들어 "부등식 $|x|+|x-2|<4$를 풀어라."라는 문제가 제시되었을 때, 거리 개념을 이용한 절대값의 정의 아래에서 문제를 풀기에는 다소 어려움이 따른다. 하지만 위에서 언급한 형식적인 정의로서 두 번째 정의를 사용하면 절대값이 포함된 방정식의 해를 쉽게 구할 수 있다. 따라서 형식적인 정의는 우선 받아들이기는 어렵지만 다음 단계에서 이용해야 되는 것으로서 학생들에게 제시되고 설명되어져야 한다는 것을 교사는 유의해야 할 것이다. 사실 교과서에는 형식적인 정의를 이용한 많은 개념들이 있다. 개념의 정확하고 올바른 이해를 위하여 교수법적인 측면에서 어떻게 가르칠 것인가, 어느 정도의 범위 내에서 다룰 것인가, 학생들의 이해 수준을 고려하여 얼마나 효율적이고 다양하게 가르칠 것인가는 교사의 몫이라고 본다. 가령 사면체의 개념을 제시하려고 할 때 우선 사면체의 그림을 그려 놓거나 그러한 모양을 가지고 있는 물건을 제시한 후 "이러한 모양을 가진 도형을 사면체라고 한다."라고 정의하는 방법이 있을 것이고, 다른 경우는 네 개의 꼭지점과 여섯 개의 모서리, 네 개의 면을 가지고 있는 도형을 사면체라고 정의하는 방법이 있을 것이다. 이 때, 전자는 직관적으로 사면체라는 개념을 정의한 것이고, 후자는 모든 원소들의 속성을 추상화하여 엄밀하게 정의한 것으로 볼 수 있다. 사실상 사면체와 같이 단순한 개념이 제시되는 단계에서는 가능하다면 전자와 후자의 정의를 동시에 제시하는 것이 좋다고 할 수 있다(조영미, 1997). 그러나 고등 수학 개념인 복소수, 함수, 극한, 접선, 무한 개념 등을 제시함에 있어서는 직관적으로 정의할 것인지, 엄밀하게 정의할 것인지 혹은 양쪽을 다 취하더라도 어떤 정의에 더 강조점을 둘 것인지에 대해서는 수업 상황에서 학생의 수준을 고려하여 교사가 이에 대한 결정을 내려야만 한다. 이런 상황에서 Vinner(1991)에 따르면 결정의 기준이 되는 것 중의 하나는 앞으로 학생이 높은 수준의 수학을 배울 학습자인가, 그렇지 않은 학습자인가를 고려해야 한다는 것이다. 또 다른 대안으로는 추상화·형식화된 고등 수학 개념일수록 수업 상황에 개념을 처음으로 도입할 때, 그 개념이 갖는 역사 발생적 상황이라는 맥락에 입각하여 교수-학습이 이루어진다면 개념의 올바른 이해는 보다 더 쉽게 이루어질 수 있다고 본다.

2. 의사 개념적 행동에 따른 교수법

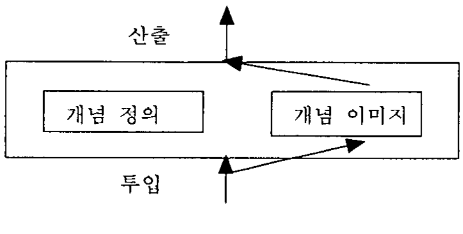
우리는 일상 생활 속에서 어떤 용어나 기호에 대한 의미를 정확히 알지 못하면서도 마치 잘 알고 있는 것처럼 말하고 사용하는 것과 같이, 실제 수학 수업 중에 교사와 학생 사이에서 수학적 개념의 올바른 이해를 파악하는 의사 소통 상황하에서 의사 개념적 행동을 접하게 된다. 예를 들면 수학 수업 중에 한 학생에게 절대값이라는 것이 무엇인가를 물어 보았을 때, 그 학생의 대답은 부호를 없앤 값이라고 하면서 -3의 절대값은 3이라고 예까지 드는 경우를 볼 수가 있다. 결과로는 -3의 절대값은 3이 옳은 대답이지만 사실 엄밀하게 말해서 부호를 없앤 값이 절대값인 것은 아니다. 그 학생에게 $-a$의 절대값은 무엇인가? 라고 물으면 당연히 주저 없이 a라고 대답을 한다. 바로 여기서 이 학생의 행동은 의사 개념적 행동을 보이고 있는 것이다. 절대값 개념에 대하여 가지고 있는 개념 이미지에 근거하여 자신이 진정으로 옳게 답을 낸 것이라고 생각하고 있는 경

우인데 당연히 절대값 개념에 대한 오개념을 가지고 있는 - 수업을 진행하다 보면 이와 같은 경우는 빈번하다. - 경우이다. 사실 학생이 말한 절대값에 대한 개념은 형식적인 수학적 개념의 정의와는 일치하지 않는다. 이것이 바로 개념 정의와 개념 이미지가 발생하는 문맥으로서 이는 수학적으로 타당한 개념과 실제로 학생들이 소유하고 있는 개념이 서로 다른 경우가 존재하고 있음을 뜻한다. 이와 관련한 형식적인 수학적 개념의 정의와 학생들이 가지고 있는 개념 이미지를 비교하는 연구가 Vinner를 비롯한 여러 수학자에 의해 활발히 진행되어 왔다. 고등 수학적 사고 과정으로서의 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용은 <그림 1>과 같은 모델링 과정을 따라야 올바른 개념 형성을 이룰 수가 있다는 것이다.



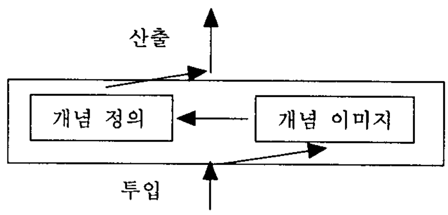
<그림 1> 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용

그러나 실제 수업 상황에서 의사 개념적 행동을 보이는 학생들이 많은데, 이들의 개념 형성 과정뿐만 아니라 문제 해결이나 과제 수행 과정에서 실제로 일어나는 사고 과정을 분석해 보면 <그림 2>에서와 같이 개념 정의를 소홀히 하는 직관적 반응을 나타내는 모델링 과정을 따른다.



<그림 2> 직관적 반응

<그림 2>와 같은 행동을 보이는 학생들의 바람직하



<그림 3> 직관적 사고를 따르는 연역

지 못한 사고 과정이 오개념을 불러일으키는 것을 감안하여 수업에 임하는 수학 교사는 교수-학습에 있어서 이것을 특히 간과해서는 안될 것이다. 이에 <그림 2>에서와 같이 의사 개념적 행동을 보이는 학생이라면 <그림 3>의 경우와 같이 교수-학습에 학생들의 행동을 바로 잡아가는 지도가 필요한 교육적 상황이 요구되리라고 본다. 즉, 새로운 개념 정의를 한 후에 그 개념 형성을 유도하기 위하여 예제 풀이에 의한 다양한 다각도의 문제를 이용하여 개념 이미지를 심어 주고, 다시 개념 정의를 재 언급하여 확인함으로서 개념 정의와 개념 이미지 사이에 오류를 갖지 않도록 교수-학습에 고려하여야 한다. 그리하여 수학 교사는 <그림 1>에서 보여지는 바와 같이 상호 작용하는 형태의 사고 과정으로 학생들의 사고를 유도하여 의사 개념적 행동을 불러일으키지 않는 올바른 유의미한 개념적 사고로의 활동을 유도해야만 한다.

Skemp(1987)에 의하면 수학적 개념 형성은 수학 학습의 기본이 되는 것이므로 학습자 자신의 마음속에서 일어나야 하며 학습자에게 강요할 수도 없고 대신해 줄 수도 없는 것으로서 교사가 할 수 있는 최선의 것은 수학적인 개념을 바르게 형성할 수 있도록 도와주는 일이 중요하다고 한다. 그는 개념 형성을 시킬 때 그 개념을 깨끗하게 정의하여 주는 것도 중요하지만 그 개념과 관련 있는 범례를 제시해 주는 것이 더욱 중요함을 지적한다. 학습자가 가지고 있는 개념보다 더 고차의 개념은 정의만으로는 이해할 수 없고, 유일한 방법으로 적절한 범례의 집합을 경험하는 일이 필요하며 수학적인 개념을 형성시키는데 있어서 반드시 구체적이고 적절한 범례를 제시하여 공통적인 속성을 뽑아 내는 활동이 필요하다고 보고 개념의 관계적 이해를 강조한다. 범례의 제시 방법은 한 번에 한 예를 보여주고 조금 후에 또 한 예를 보여주는 식의 계속적 제시법 보다는 여러 개의 올바른 예

를 모아서 보여주고 난 뒤에 계속해서 여러 개의 부적절한 예를 모아서 제시하는 초점 제시법이 보다 더 효과적인데, 이보다 더 효과적인 것으로서 올바른 예와 부적절한 예를 혼합 제시하여 공통적인 속성을 발견한 다음에 올바른 예와 부적절한 예를 하나씩 차례로 새로운 예를 제시하여 개념을 확인하는 방법인 동시 제시법을 언급한다. 또한 Vinner(1991)는 직관에 의해 일어나는 전체적인 인상이나 느낌에 집착하지 말고 개념 정의를 생각하거나 분석적으로 사고하는 것을 제시하고 있으며, 행동의 양식은 결과에 의해서 판단될 수 있다는 사실을 염두에 두고 결과가 바람직하지 않다면 그러한 결과를 있게 한 사고 양식을 억제하기 위해 즉각적인 반응을 피하면서 자발적인 사고나 행동을 조절하여야 한다고 주장한다. 그에 의하면 행동은 자극에 대한 외적 반응이기 때문에 우리의 행동은 조절 혹은 통제될 수 있다는 것이다. 따라서 행동의 조절을 통해 그러한 행동을 유발한 직관이 수정되면서 의사 개념적인 사고를 개념적인 사고로 전환시킬 수 있다는 것이다. 일반적으로 비판적인 사고 능력과 반성하는 사고 능력이 부족한 학생들은 통제되지 않은 즉각적인 반응이 바람직하지 않은 수학적 행동을 유발할 가능성이 있다는 사실을 생각하지 못하는 경우가 많다. 학생들은 교사가 말한 개념이 그들의 마음속에 어떤 연상을 일으킨다는 것을 알고는 있지만 그 개념에 대한 이해가 결여되어 있을 때에는 자신의 마음속에 일어난 연상이 올바른 것인지 검토할 수 없고, 그것들이 옳은 결과를 내는 것인지 아닌지를 판단하기도 어려워한다. 따라서 김남희(1997)는 교사가 해야 할 일은 학생들로 하여금 자신의 마음속에 일어난 연상이 무엇인지를 파악할 수 있게 하고, 또한 그것들이 주어진 상황에서 어떤 의미를 만들어 내는지를 판단하는 심리 과정을 올바로 수행할 수 있도록 하여, 학생들이 그릇된 결과를 만들어 내는 행동의 조절을 통해 직관을 바로 잡아 나갈 수 있도록 유도하는 것이라고 한다.

Ⅲ. 고등 수학 개념 이해를 위한 직관의 역할과 정신적 표상

1. 개념 발달을 위한 직관의 역할과 그에 따른 교수법

직관이 비록 보편적이고 확실한 지식은 보장하지 못하지만 수학적 개념의 형성이나 발달에 있어서 결정적인 역할을 한다는 점을 감안한다면 직관을 교육적 대상에서 제외하는 것은 교육의 가장 중요한 영역을 포기하는 것이다. 류희찬(1987)은 수학 교육에서 직관적 사고를 우연적이거나 정확히 나타낼 수 없는 교육적으로 별 가치 없는 사고로 사용하거나 천재적 발명가들의 발명과 관련된 영감이나 계시와 같은 초현실적인 힘으로만 받아들여 교육적 대상으로서의 직관을 소홀히 해서는 안될 것임을 말하고 있다.

류희찬·류성림(1997)은 Poincare의 이론을 수학 교육에 있어서 직관의 역할의 관점에서 다음과 같이 정리하였다.

> 첫째, 논리적이고 체계적인 수학적 기술의 구조를 전체로서 파악하는 것이 가능하다.
> 둘째, 어떤 문제를 해결하고자 하나 막혔을 때, 해결의 방향을 시사하고 해결 가능하도록 한다.
> 셋째, 수학적인 기술, 구조 개념, 원리 등을 실제적 이해가 가능하도록 한다.
> 넷째, 수학의 학습을 꿰뚫기도 하고, 학습한 수학적 개념이나 지식을 현실의 문제에 응용하기도하고, 학습에 유용하도록 한다.

Koyama(1990)는 이들의 각각의 역할에 대하여 구체적인 예를 들어 설명하고 있는데, 이 중에서 넷째의 경우인 응용 가능성은 위에서 말한 3개의 역할과 매우 밀접한 관련이 있고, 오히려 이들 3개의 역할을 전제로 하고 있다고 볼 수 있다. 즉, 수학 학습에 관련되는 문제 또는 학습의 상황을 전체로서 파악할 필요가 있다는 것이다. 또한 학습한 수학적 개념과 수학적 지식을 현실의 문제에 응용하는 것은 실제적 이해이고, 그들이 구조화되지 않으면 별로 쓸모가 없다는 말이다. 순간 속도로서 미분계수를 도입하거나, 물체를 던지는 운동과 미분계수의 변화를 관련해서 설명하기도 한다. 이것은 수학적 개념인 미분계수를 물리적 현상과 관련해서 기술한다는 점에서 실제적인 이해가 가능하고, 나아가 현실의 문제에 응용하는 것이 가능하다고 보는 것이다. 수학적 개념에는 이러한 물리적 현상에 그 기원을 두고 있는 것이 많다. 또, 수학적 개념이 생각했던 본래의 상황 - 그것이

현실적인 것이건, 추상적인 것이건 - 이 반드시 존재한다는 것이다. 그러므로 수학 교육에 있어서 학생이 어떤 수학적 개념을 아직 혼미한 상태로 제대로 형성되어 있지 않아서 이해를 하지 못한 상황이라고 파악되면, 수학 교사는 학생 스스로가 명확하게 수학적으로 형식화해 나갈 수 있도록 도움을 주고 격려해야 한다는 것이다.

직관, 즉, 합리적인 사고 없이 즉각적인 인지에 의한 이해는 발견하는 것에서부터 시작되는 어떤 일련의 과정에서 중요한 역할을 한다. 발견, 직관, 검토는 일련의 수학적 과정의 시작일 뿐이다. 목표는 물론 여전히 개념과 개념 사이의 추상적 관계들을 얼마나 이해하는가이다. 개념과 개념 사이의 관계와 성질, 법칙들을 관련지어 사고하는 추상화 과정은 고등 수학적 사고 과정에서 가장 중요한 것들 중의 하나이다. 추상화 과정은 발견, 직관, 검토 이외에도 증명, 정의 등과 연결 고리의 형태로 상호 작용함으로써 나타나는 여러 가지 과정 중의 일부분일 뿐인 것이다. 새로운 고등 수학 개념에 직면했을 때 학생들은 때때로 이미 가지고 있는 직관적 의미도 상황에 따라 다양할지라도 갈등을 일으킬 수가 있다는 것을 수업을 진행하는 교사는 반드시 인식해야 할 것이다. 즉, 학생들에게 존재하고 있는 개념 이미지도 때로는 일시적이고 불안정하며 갈등을 일으킨다는 것이다. 수업 학습에서 학생들은 사전 경험과 형식적 이론 사이에 갈등이 생기면, 즉 학생들이 인지적 장애에 직면하게 되면 인지적 장애를 반영해서 새롭고 더욱 풍부한 인지적 평형 상태가 되도록 자신들의 지식을 재구성하려고 노력한다는 사실에 대해서는 무한 개념을 이용한 선행 연구가 이루어졌으며, Fischbein & Gazit(1984)에 의하면 학생들이 이미 가지고 있는 모순된 직관이 형식적 지식을 획득하는 데 주된 장애가 됨을 확인할 수 있다. 예를 들어 극한의 대수 법칙을 이용하여 여러 가지 함수의 극한값을 기계적으로 계산하는 방법에 주의를 집중하게 되는 것이 보통이다. 0.999…의 값을 물었을 때 많은 학생들은 1과 같다는 것 곧, 0.999… =1임을 수용하는데 갈등을 느끼며, 단지 1로 향한다는 것, 다시 말하면 필연적으로 1보다 작은 채로 남는다고 생각하는 것이다. 학생들은 세 점 '…'에서 1로 접근하는 실제적으로 결코 끝나지 않는 역동적인 과정을 보게 되므로, 이러한 내용을 접할 때 개념적 장애가 생기게 된다. 그리고 학생의 직관적 신념이 잘못되어 있으면 관련 이론을 형식적으로 배운 이후에도 문제를 푸는 과정에 계속 영향을 미친다는 선행 연구(Clement, 1983; McCloskey, 1983) 결과가 나왔다. 여기에서 보여지는 것과 같이 수업 중에 고등 수학 개념의 교수-학습 상황에서 교사는 반드시 학습자의 직관적 편견 즉, 그릇된 직관을 고려해야 할 것을 권고하고 있다. 즉, 개념에 대한 제2의 직관이 새롭게 형성될 수 있도록 도와주어야 한다는 것이다. Tirosh(1991)는 당연히 학생은 그 개념에 한해서는 처음의 직관을 본인 스스로 통제해야 하는 필요성을 느끼고 직관적으로 대답하는 것을 자제하게 되며, 이후에 문제의 해를 결정하기 위해서는 분명한 정리를 이용할 것을 인식하게 된다는 것이다.

2. 개념 이해를 돕는 정신적 표상과 그에 따른 교수법

표상은 수학에서 중요한 기능을 가지고 있다. 수학 개념과 관련된 표상의 예로서 기호적 표상을 들 수 있는데, Olson과 Campbell(근간; Vinner, 1991(류희찬 역) 재인용)은 기호는 부호와 의미 사이의 관계를 포함하고 있다고 언급하고 있다. 즉, 기호는 어떤 사람의 함축적인 지식(의미)을 기호로 나타냄으로써 분명하게 만드는 작용을 한다고 보았다. 어떤 개념을 기호로 나타내기 전에 개념과 관련된 의미가 있어야 한다는 것이다. Dreyfus(1991)는 수학 수업에서는 흔히 이 점이 간과되며, 결국 잘 알려진 기호의 강요 현상이 일어난다고 보았고, 또한 표상은 수학의 학습과 사고에서 매우 중요하다고 보았다. 미·적분, 함수, 어림과 같은 어떠한 수학적 대상이나 과정에 대하여 이야기하거나 생각할 때라도 수학을 행할 때에는 마음속에 누구나 갖고 있는 어떤 것(대상이나 과정의 정신적 표상)을 떠올리게 된다. 수학자들이 만일 똑같은 정의, 예를 들어 함수에 관한 정의를 생각할 때에도 그 개념에 대한 정신적 표상은 수학자들마다 다를 수가 있다는 것이다. 서로 다른 영역에서 활동을 하는 수학자들에게 함수를 생각할 때 무엇을 떠올렸는지 질문을 해 본다던가 아니면 수학 교사나 학생들에게 이러한 질문을 해 보면, 이러한 차이점은더 뚜렷해질 뿐만 아니라 더 중요해진다고 보았다. 예를 들어 함수에 대한 학생들의 사고는 과정(계산이나 대응)에 제한

되는 반면에 부정 적분을 가르치는 교사는 적분에서 함수를 변형이 가능한 대상으로 생각하게 된다는 것이다. 이러한 불일치 때문에 학생들은 교사들의 설명을 이해할 수가 없게 된다는 점을 말하고 있다. 아울러 어떤 개념을 표상한다는 것은 그 개념의 예, 표본, 보기와 이미지를 생성한다는 것인데, 이때 생성된 예가 기호적 표상인지 정신적 표상인지 그리고 만일 정신적 표상이라면 어떤 정신적 표상이 존재하게 되는지 아울러 그 과정이 어떻게 발달하게 되는지가 대단히 중요하다고 보고 있다. 기호적 표상은 개념에 대한 의사 소통을 더 쉽게 할 목적으로 외적으로 쓰여지거나 말로 된 것인 반면에 정신적 표상은 외부 세계와 의사 소통하기 위해 사용하는 내적인 도식이나 틀을 일컫는다. 따라서 정신적 표상은 외부 세계의 특수한 부분을 생각할 때 마음속에서 일어나는 것으로 사람에 따라 다를 수가 있다는 것이다. 이에 Kaput(1987)는 수학적 개념에 대한 정신적 표상이 어떻게 생성되는가를 좀 더 일반적으로 설명하고 있다. 그의 이론에 의하면 정신적 표상을 만드는 활동은 표상 체계, 즉, 실질적으로 실현될 수 있는 구체적이고 외적인 인공물에 달려 있다는 것이다. 함수의 경우 그래프, 대수적 공식, 화살표, 그림과 대응표 등이 인공물이다. 정신적 표상은 구체적 표상 체계를 토대로 마음속에서 만들어진다. 그래서 사람들은 같은 수학적 개념에 대하여 하나 혹은 여러 가지 정신적 표상을 만들 수가 있다는 것이다. 그렇기에 수학을 학습하는 학생들이 수학을 잘 하려면 여러 가지 개념에 대한 풍부한 정신적 표상을 갖는 것이 바람직하다는 결론이다. 물론 여기서 어떤 개념에 대한 표상을 여러 가지 가지고 있는 것도 중요하지만 표상이 존재하는 것만으로는 문제 해결에서 개념을 잘 활용할 수 있는 것은 아니라고 한다. 그러므로 여러 가지 표상이 제대로 강력하게 연결되어 있지 않으면 문제 해결에 어려움을 겪게 될 것이라는 것을 간과해서는 안 된다는 것이다. 따라서 학생들은 인지함에 있어서 하나의 표상에서 다른 표상으로의 표상 전환이 효과적으로 그리고 자연스럽게 이루어져야만 한다. 예를 들어 삼각 함수의 표에 있는 점들이 그래프의 어느 점을 나타내는지 혹은 높이에 대한 값들이 그래프의 위치를 어떻게 결정하는지를 확실히 파악할 줄 알아야 한다는 것이다. 많은 학생들은 문제 해결에 있어서 여러 표상들을 가지고 있지만 자신이 가지고 있는 여러 표상들을 연결시키지 못한 채 하나의 표상을 사용할 때는 다른 표상은 무시하여 결국 문제 해결에 실패하게 된다는 것을 수학 교사는 깨달아 수업을 진행하면서 여러 가지 표상을 체계적으로 사용하거나 처음부터 표상을 바꾸는 과정을 강조하는 교수 방법을 생각해야 할 필요가 있다고 본다.

류희찬(1987)은 앞 절에서 언급한 바 있는 직관을 향상시키기 위한 교육적 방향 중의 하나로 직관과 표상에 대해서는 직관의 일차적 기능을 대상의 표상으로 보고 있다. 또한 직관은 표상을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 능동적으로 표상을 창조하는 정신 능력이므로 학생들 자신이 표상의 구성에 직접 참여하여 그들 스스로 계획을 세우고 조직하지 않으면 안 되며, 한 방법으로 그림이나 도식, 지도 그리고 대응표 등을 제시할 것을 언급하고 있다. 이 때, 교사는 학생이 제시한 그림이나 도식 등을 면밀히 관찰하고, 이를 학생의 입장에서 학생의 사고 과정을 충분히 이해하려는 의도를 가져야 한다. 아울러 교사와 학생 상호간의 역동적인 의사 소통이 활발히 이루어질 수 있도록 모색해야 한다.

3. 의사소통(교수적 대화)에 따른 교수법

NCTM(미국수학교사협의회, 1989)에서는 수학적으로 의사 소통하는 능력을 진정으로 수학을 학습하고, 수학을 이해하는데 있어서 중요한 요소로 보고 있다. 그러나 수학적으로 의사 소통하는 것은 학생들에게 대단히 어려운 문제이다. 수학은 기호의 사용에 의존하고 일상적 언어와 비교할 때 특수하고 때로는 상이한 의미를 갖기 때문이다. 따라서 수학적 아이디어를 표현하는데 혼란스럽고 어려운 경우가 생길 수 있음을 권고한다. 그러나 수학에서의 의사 소통은 아이디어와 관계성을 이해하고 표현하기 위한 수학적 언어, 기호 체계, 구조를 사용할 수 있음을 의미하기에 이러한 의미에서 수학적 의사 소통은 수학을 알고 행하는 것의 일부임을 말한다. 고등학교 이상의 수준에서 학생은 보다 추상적인 아이디어에 접하게 되고 보다 형식적인 수학적 언어를 경험하게 되며 수학적 아이디어를 교환하는데 있어서 엄밀성과 정확성의 역할에 대한 인식뿐만 아니라 수학적 언어, 용어와 문장의 이해 및 개념의 이해 등에 초점을 맞추어 의사 소통에

임해야 할 것이라고 본다. 의사 소통의 방법으로 개념 정의를 돕기 위한 기호 사용에 대한 교사의 기대는 학생의 성숙도뿐만 아니라 과제의 상황과도 관련되어야 함을 권고하고 있다. 교사가 학생들에게 고등 수학적 개념의 이해를 촉진시키거나 돕기 위해서는 교사와 학생간의 상호작용을 통하여 이루어지는 효과적인 교수-학습 상황이 요구된다. 이 때, 적절한 학습 상황으로써 교사와 학생간의 *교수적 대화(instructional conversation)*가 효과적이다. 교수적 대화에 대해 Tharp와 Gallimore(1988)는 다음과 같이 말한다.

> 전문가와 학습자가 각자 자신이 습득한 개념에 대한 이해를 바탕으로 말과 글을 주고받는 대화는 여러 모습으로 나타난다. … 그것의 일반적 명칭은 교수적 대화이다. … 이 명칭은 그 자체로 역설을 내포한다. "교수"라는 것과 "대화"라는 것은 상호 모순적이다. 전자는 권위와 계획 수립을 함의하고, 후자는 평등과 반응을 함의하고 있다. 가르침은 이러한 모순을 해결하는 것이다. 진실하게 가르치기 위해서는 대화하여야 하고, 진실한 대*화는 곧 가르침이다.*

Woolfolk(1995)에 의하면, Goldenberg는 좋은 교수적 대화는 교수와 대화라는 두 요소를 지녀야 한다고 말한다. 특히 토론 상황에서의 교수적 대화를 염두에 두면서 Goldenberg는 다음과 같이 교수적 대화의 특성을 요소별로 분석하여 제시하였다.

<교수 요소>

1. (**주제의 초점**)교사는 토론할 주제를 선정하고 최선의 탐구를 허용하려면 단원을 어떻게 나누어야 할지를 생각하면서 전개될 주제에 대한 전반적인 계획을 한다.
2. (**활성화와 배경 지식의 활용**)교사는 토론 속으로 정보를 엮어 넣거나 학생에게 그 단원의 이해에 필수적인 관련 배경 지식을 제공한다.
3. (**직접적인 가르침**)필요하면 교사는 기술 또는 개념에 대한 직접적인 가르침을 제공한다.
4. (**보다 복잡한 언어와 표현의 확대**)교사는 확장, 질문, 재진술 그리고 잠시 휴식 등을 권하는 등 다양한 유동 기술을 사용함으로써 더 확대된 학생의 기여를 이끌어 낸다.
5. (**진술이나 입장 표명에 대한 근거의 증가**)교사는 주장 또는 입장을 지지하기 위한 학생의 의사 표현, 표상 그리고 추론의 사용을 권장한다.

<대화 요소>

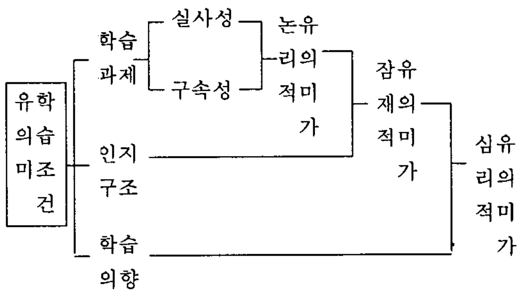
1. (**알려진 답이 거의 없는 질문들**)대부분의 토론들은 하나 이상의 옳은 대답이 있을 수 있는 질문들에 초점이 모인다.
2. (**학생의 기여에 대한 반응**)초기의 계획을 바탕으로 토론에 대한 초점과 일관성을 유지하는 동안 교사는 학생의 진술과 그가 제공하는 기회에 대해서도 반응적이다.
3. (**연결된 담화**)토론은 다중적이고 상호 작용적이며 계속되는 순서를 포함하는 속성을 가지고 있다. 즉 발화가 계속되고 먼저 나타난 발화에 대한 확장을 하는 것이다.
4. (**의욕적이면서 결코 위협적이지 않은 환경**)교사는 긍정적인 정서의 풍토에 의해 균형 잡힌 의욕적인 환경을 창조한다. 교사는 평가자이기 보다는 협력자이고, 학생은 단원의 의미를 조정하고 구성하도록 도전 받는다.
5. (**자기 선택적 순서가 포함된 일반적 참여**)교사는 누가 말하는지를 결정하는 특권을 내세우지 않는다. 학생은 자진해서 하도록 격려되어야 하는데, 그렇지 않으면 발언 순서의 선택에 영향을 받는다.

사실 교수적 대화는 우리의 학교 현장, 즉, 우리가 보통 관찰할 수 있는 전형적인 교실 상황에서의 교사와 학생간에 주고 받는 말에서는 좀처럼 보기 어렵다. 우리의 교실에서의 수업 상황을 들여다보면, 대부분의 경우 과밀 학급 체제에서 교사의 주도하에 수업이 진행되고 있다. 교사는 학생들에게 수업 내용과 관련하여 질문하지만 그 질문에 "예", "아니오"의 대답 정도만을 요구하거나 혹은 이미 교사가 생각하고 있는 정답만을 전제로 한 매우 간결한 정답만을 요구하는 경우가 많이 있다. 간혹 학생이 질문을 제기하기도 하지만 이는 상당히 드문 일이고 그나마 학생은 교사에 의해 면박을 당하지는 않을까 혹은 친구들로부터 조롱을 받지는 않을까 주저하면서 질문을 한다. 교수적 대화는 교사의 권위가 학생의 학습을 억압하는 가운데서는 찾아볼 수 없다. 우리의 교육 현실에서 진정한 교수적 대화를 찾아보기가 쉽지 않다는 점인데, 학교에서 교수적 대화가 없는 이유는 한 교사가

많은 학생들을 지도해야 한다는 이유 이외에도 교사들이 교수적 대화의 방법을 모르기 때문과 교사들 자신이 지도하는 교과에 대한 전문적인 능력 또한 충분치 못하다는 점과 교사가 학생의 개념 이해 발달 수준을 제대로 파악하고 있지 못하기 때문이라 할 수 있다. 특히 과제 영역과 관련된 대상 학생들의 이해 상태를 정밀하게 파악하지 못하는 것이 문제임에도 이에 대해 민감하지 조차도 못하기 때문에 교사는 그 학생들의 각기 다른 근접발달대[1]내에서의 적절한 도움을 제공하지 못하는 것이라고 본다. 따라서 한순미(1999)에 따르면 교사는 학생들의 학습 이해 상태를 파악하는데 유념해야 하며 그 과제에서 대상 학생들이 범하는 오류의 유형에 민감해야 할 것을 권고하고 있다. 수학적 의사 소통의 중요성으로 우정호(1999)는 "교육은 대화를 통해 이루어진다. 소크라테스의 대화법-산파법은 이상적인 수학 교수 방법의 전형이 되고 있다. 학생들에게 그들의 지적 수준에 알맞은 수학적인 사고를 요하는 문제를 해결하도록 함으로써 호기심을 자극하는 동시에 사고를 유발하며 발견에 이르게 할 수 있는 질문을 통해 학생들이 수학의 개념 이해는 물론 원리와 알고리즘을 재 발명하여 문제를 해결하도록 하는 경험을 시킬 수 있다면, 교사는 학생들에게 독자적인 고등 수학의 참 맛과 그러한 사고 방법을 제공해 주게 될 것이다."라고 말하고 있다.

Ⅳ. Ausubel의 유의미 교수-학습 이론에서의 교사와 학생의 상호 역할

Ausubel(1973)이 말하는 유의미 학습이란 유의미 수용 학습을 말하는데, 내면화 과정을 통해서 잠재적 유의미가를 가진 학습 과제 또는 학습 자료를 이해하거나 교사가 제시한 학습 과제와 교수-학습 자료를 학습자가 그의 인지구조에 의미 있게 연결할 때 일어나는 수용 학습을 의미한다. 여기서 애매하게 알고 있었던 개념들 사이의 관계를 교사의 설명을 통해서 분명한 의미로 이해할 때 일어나는 학습이 이에 해당된다. 사실 중등 이상의 많은 학생들이 주로 수용 학습을 통해서 고등 수학 개념을 조절하거나 동화함으로써 추상적이고 형식적인 수학 지식을 획득하게 된다. 유의미 학습은 의미와 체계를 갖춘 학습 과제에 대한 학습의 한 형태로서 학습 과제가 논리적 유의미가를 지니고 있고 학습자가 학습 태세를 갖추고 있어서 심리적 유의미가를 지닌 학습 과제를 그 학습자가 현재 파지하고 있는 인지구조에 의미 있게 관련 지움으로써 일어난다. Ausubel의 유의미 학습의 정의에 따르면, 학습자가 주어진 정보에 담겨져 있는 의미를 안다고 하는 말은 그가 유의미 학습 과정을 거쳤다는 뜻으로 해석할 수도 있다. Ausubel은 대부분의 교실 수업이 유의미 수용 학습으로 이루어지고 있다고 가정하고 그에 따라 유의미 수용 학습의 중요성을 강조할 뿐만 아니라 그 특성을 어느 학습 형태보다 더 자세하게 설명한다. 특히, 그는 유의미 수용 학습은 몇 가지의 조건을 만족시켜야만 그 효과가 극대화된다고 말한다. 유의미 학습이 일어날 수 있는 조건과 그것들 사이의 관계를 요약하면 <그림 4>와 같다.



<그림 4> 유의미 학습의 조건

<그림 4>에서와 같이 실제의 학습 상황에서 제시되는 학습 과제 또는 학습 자료가 유의미 학습의 조건이 되기 위해서는 무엇보다도 실사성(substantiveness)과 구속성(nonarbitrariness)을 지녀야 한다는 것인데, 학습 과제가 지니는 실사성이란 그 구조와 내용을 어떻게 표현하더라도 그 의미와 본성이 변하지 않는 불변적이고 절대적인 특성을 의미한다. 즉, 어떤 부호나 기호를 사용하

1) 근접발달대(zone of proximal development)란 비고츠키의 개념 중에서 가장 잘 알려진 것 중의 하나로 학습과 발달 사이의 관계를 개념짓는 방법이다. 그리고 비고츠키는 발달을 어느 한 지점이 아니라 행동의 연속 혹은 성숙의 정도로 보았기 때문에 zone이라는 용어를 사용하였다. 아동은 누구나 과제의 난이도에 따라서 독립적으로 수행할 수 있는 수준의 하한계와 최대한으로 도움을 받아야만 수행할 수 있는 수준의 상한계 사이에서 행동의 발달이 일어난다는 것이다.

더라도 그 의미가 변하지 않는 개념·법칙·이론·명제 등에 내재된 본질적인 속성을 뜻한다. 예를 들어 거리·시간·속도 등의 개념과 그 관계는 어떤 부호나 문장 및 언어로 표현하더라도 그것의 본질적 속성은 변하지 않고 동일한 의미로 인식할 수 있는데 이러한 불변적인 속성을 말한다. 그리고 학습 과제의 또 다른 준거인 구속성은 학습자가 자신의 의미를 통해서 어느 정도 깨달을 수 있는 추상적 용어로 인지구조에 연결시킬 수 있는 가능성과 잠재력, 즉, 학습자가 가지고 있는 인지구조와 관련시킬 수 있는 학습 과제의 성질을 의미한다. 예를 들면, '삼각형의 세 내각의 합은 180° 이다.'라는 명제는 기하학의 체계가 바꾸어지기 전에는 어느 나라에서나 통용될 구속성이 있다고 할 수 있다. 따라서, 어떤 학습 과제나 교수-학습 자료가 구속성을 가지고 있다는 말은 학습자가 그 학습 과제를 그와 관련이 있는 인지구조에 연결시킬 수 있는 적절하고 자명한 근원을 갖고 있다는 의미로 해석할 수 있다. 학습자는 사물의 궁극적인 실체나 참을 알 수 없고, 그 사물에 관한 정보 중에서 단지 학습자의 인지구조를 통해 선별한 정보만을 해석함으로서 그 사물의 특성을 인식한다. 예를 들어 고등 수학 개념인 함수라는 개념의 정의의 궁극적인 실체나 참은 알 수 없지만, 함수 개념의 표상으로서 그래프, 도식, 표, 화살표 그리고 대수적인 식 등과 같은 것으로서 인지구조에 연결시킬 수가 있는 개념이기에 함수 개념은 구속성을 갖고 있다고 볼 수 있다. Ausubel은 어떤 학습 과제와 교수-학습 자료가 실사성과 구속성을 동시에 갖고 있을 때, 그것은 논리적 유의미가를 갖는다고 말한다. 이 때, 유의미 학습에 있어서는 학습 과제의 본질적인 속성인 논리적 유의미가 외에 학습자가 현재 파지하고 있는 인지구조의 특성도 결정적인 조건이 된다. 학습 과제가 아무리 논리적인 유의미가를 지니고 있을지라도 학습자가 그와 관련이 있는 개념적 인지구조를 파지하고 있지 않다면 그 학습 과제는 유의미 학습 과정을 통해서는 학습 될 수 없고, 설사 학습이 일어난다고 할지라도 그것은 단지 기계적 암기에 의한 학습일 뿐이다. 바로 여기서 개념적 인지구조를 파지하고 있다는 말은 개념적 이미지를 정확히 내면화하고 있다는 말로 대신할 수가 있다고 하겠다. 의사개념적 행동을 보이는 학생은 올바른 개념적 인지구조를 파지하고 있지 못하기 때문에 교수-학습 상황에서 개념 이해의 부족으로 유의미 학습을 불러일으키지 못하게 되는 것이다. 여기서 Ausubel은 어떤 학습 과제에 논리적 유의미가가 내재되어 있으며 학습자가 인지구조에 그 학습 과제와 관련이 있는 개념적 내용을 파지하고 있을 때, 그 과제는 그 학습자에 대하여 잠재적 유의미가를 갖는다고 말한다. Ausubel과 Gagne는 잠재적 유의미가를 높이기 위한 선행조직자의 원리를 강조한다. 선행조직자란 학습자가 새로이 학습해야 할 여러 가지 많은 정보를 제시하기 전에 이들을 포함하는 보다 포괄적인 개념이나 원리 또는 체계적 관계를 말한다. 학습 자료의 잠재적 유의미가는 학습자의 선행 학습 경험, 나이, IQ, 사회적 지위 또는 문화적 배경에 따라 달라질 수도 있다고 보았다. 학습자가 현재 가지고 있는 인지구조가 이런 요인들의 영향을 받아 구성되기 때문이라는 사실이다. 학습 과제가 학습자에 대하여 잠재적 유의미가를 지니고 있다고 할지라도 학습자가 학습하려는 의도 즉, 학습 의향을 갖추고 있지 않는 한 유의미 학습은 일어나지 않는다고 한다. Ausubel은 학습 의향을 일컬어 특정한 학습 방법을 통해서 학습 과제를 인지구조에 연결하려고 하는 학습자의 성향이라고 한다. 학습 의향은 학습자가 학습을 통해 겪은 경험과 그 결과를 반영한다. 바꾸어 말하면, 학습 의향은 주어진 학습 과제를 다루거나 특정한 형태의 문제를 해결하는 방법의 세련도와 특정 활동에 관여할 수 있는 준비도의 순간적 상태 혹은 그 활동을 수행하는 태도를 의미한다. 학습 의향이 갖추어져야 학습 결과의 전이도가 높아진다고 보았다. 어떤 학습 과제와 교수-학습 자료가 잠재적 유의미가를 지니고 있으며 그와 동시에 학습자가 그 학습 과제를 학습하기 위한 학습 의향을 갖추고 있을 때, 그 학습 과제는 그 학습자에 대하여 심리적 유의미가를 갖는다고 말한다(박승재 외, 1999). 교사와 학생 사이의 상호 역할의 중요성이 유의미 수용 학습의 극대화를 얻을 수가 있다고 볼 때, 앞 절에서 고찰한 바와 같이 개념의 올바른 이해를 도모하기 위해서는 학생은 개념 정의에 따른 개념 이미지를 인지구조에 유의미하게 연결을 잘 시켜야 할 것이며, 교사는 학생이 올바른 개념 이미지를 갖도록 충분한 설명이 이루어져야 한다. 즉, 개념은 무엇을 말하는 것인가 또한 무엇을 내포하고 있는가를 학생들이 정확히 이해 할 수 있도록 유의미한 교수법을 발휘해야만 한다. 그래야만 학생은 잠

재적 유의미가를 갖게 되는 것이다. 교사는 매 수업마다 학생들의 인지 발달 수준을 고려하여 학생들의 고등 수학적 사고 과정을 요구하는 고등 수학 개념을 이해할 수 있도록 돕는 입장에서 개념 정의를 할 때, 엄밀하고 형식적인 개념 정의가 꼭 필요한 상황일지라도 될 수 있으면 다양한 표상을 제시해 줌으로써 개념 정의를 우선적으로는 직관적인 방법으로 파악한 후 분석적으로 파악해 나갈 수 있도록 사전 충분한 교수-학습 자료를 연구하여 학생들에게 제시해야 한다. 왜냐하면 학습자가 학습 내용을 어려워하면 Ausubel이 언급하고 있듯이 학생들의 학습 성향이 감소되기 때문이고, 이는 곧 심리적 유의미가에 영향을 미치기 때문이다. 또한 다양한 표상들을 제시해 줌으로써 올바른 개념 이미지 형성에 도움을 주어 학생들의 오개념에서 오는 의사 개념적 행동이 발생되지 않도록 해야 한다. 또한 효과적인 교수법 중의 하나인 적절한 교수적 대화를 이용한 의사소통이야말로 Ausubel이 말하는 또 하나의 심리적 유의미가를 갖게 된다는 사실을 감안할 때 더없이 소중한 유의미 학습법임을 교사는 간과해서는 안 된다.

V. 결 론

개념은 의미 있는 사고의 바탕이 되는 사고의 단위라고 볼 수 있는 기본적인 것이며 현대 수학의 특징은 개념적 사고를 강조하는데 있다. 따라서 학교 수학 교과에는 여러 가지 수학적인 개념, 원리, 법칙이 포함되어 있다. 아울러 여러 가지 수학적 개념의 정확한 이해를 바탕으로 수학적인 원리와 법칙의 이해가 가능해지는 것이다. 또한 수학적인 개념, 원리, 법칙은 여러 가지 용어와 기호, 식, 그래프 등으로 표현된다. 수학적으로 사고한다는 것은 그러한 내용의 의미를 파악하여 수학적인 안목을 갖고 사고한다는 의미 즉, 개념의 올바른 이해로부터 수학적인 언어를 능숙하게 구사하며 사고한다는 의미이다. 그렇기 때문에 수학 교육의 주요 문제로 소위 '언어주의'를 극복하고 수학적인 안목을 형성시키기 위한 '이해를 위한 교육'의 문제로 보고 있다. 그러나 학교 현장에서 수학의 개념, 원리, 법칙을 가르치다 보면 우선 접하게 되는 것이 학생들의 고등 수학 개념의 정확한 이해 부족에서 오는 오개념이다. 이로 인해 학생은 자신의 인지 구조상에 올바르게 개념 정의와 일치하는 개념 이미지를 갖고 있지 못하는 결과를 초래한다. 이 오개념은 곧 바로 수학 학습의 장애를 불러일으켜 결국 수학의 학습 의욕의 저하를 가져오게 하고, 수학 학습의 불안 요인으로 크게 작용한다는 것이다. 학습 결손이라는 용어도 엄밀히 분석해 보면 개념의 이해 부족에서 오는 인식 장애의 누적이라고 볼 수가 있다. 이전의 선행 학습 내용은 또 다시 다음의 차시 학습 내용과 연결된다. 수학 교과는 하위 개념에서 상위 개념으로의 구조적인 연계성을 나타내는 계통성을 갖는 교과이므로 오늘 학습하는 내용 속에 선수 학습 내용이 포함되어 보다 짜임새 있는 내용을 형성한다. 그러나 선수 학습에 결손이 생기면 이는 학습 내용이 지니고 있는 수학적 구조의 상호 연계성을 논리적으로 체계화하여 전개해 나가는 뼈대를 무너뜨린다. 즉, 수학에서 구조적이고 논리적인 연계성이 결여되면 그 계통성이 무너지기 때문에 당연히 수학 교과는 많은 학생들에게 매 수업 시간마다 정확한 개념 이해를 우선적으로 삼고 있는 것이다. 이에 본 논문에서는 수학 교수-학습에서 발생하는 개념의 오개념을 방지하기 위한 수학 교사의 유의미한 교수법으로서 활용하기 위해 선행 연구 자료를 근거로 하여 첫째로 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용에 대한 학생들의 인지 과정에서의 교사의 역할을 살펴보았고, 둘째로 개념의 이해를 돕기 위한 교수법으로 직관의 역할 및 교사가 고려하여야 할 학생의 사고 과정에 있어서 직면하게 되는 직관적 사고의 편견에 대하여 살펴보았으며, 학생의 올바른 개념 이미지를 돕는 표상(그림, 그래프, 도식, 대응표)에 대해서도 살펴보았다. 셋째로, 수학 교수-학습에서 과밀 학급인 현 교실 환경의 힘든 학습 상황일지라도 수학 교과의 특성상 반드시 필요한 유의미한 교수 방법의 하나로서 "의사 소통으로서의 교수적 대화"를 살펴보았다. 그리고 마지막으로 Ausubel의 유의미 학습 이론을 바탕으로 교수법적 상황 즉, 유의미한 수업을 이끌기 위한 교사와 학생 상호간의 역할에 대하여 고찰하였다. 앞서 말한 바와 같이 본 논문은 현장 수학 교사와 예비 수학 교사들이 앞으로의 교수-학습 상황하에서 효과적이고 유의미한 수업을 이끌기 위한 교수 활동에 조금이나마 보탬이 되었으면 하는 뜻에서 고찰한 것이다.

참 고 문 헌

김남희 (1997). Vinner이론에 따른 의사개념적 행동과 의사분석적 행동에 관한 소고, 대한수학교육학회논문집, **7(2)**, pp.339-342, 서울: 대한수학교육학회

김인식 · 최호성 · 최병욱 (2000). 수업설계의 원리와 모형 적용, 교육과학사, pp157-163.

류희찬 (1987), 교육적 대상으로서의 직관과 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **25(3)**, pp.11-18, 서울: 한국수학교육학회

류희찬 · 류성림 (1997), 수학교육에서의 직관에대한 고찰, 대한수학교육학회논문집, **7(2)**, pp.108-110, 서울: 대한수학교육학회

박승재 · 조희형 (1999), 교수-학습이론과 과학교육, 교육과학사, pp.248-253.

우정호 (1999), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부, p.17.

이홍천 · 강옥기 · 박재석 (1996), 고등학교 공통수학, 동아출판사, p.114.

조영미 (1997), 수학적 개념의 정의 유형 분석 -고등학교 교과서를 중심으로-, 서울대학교대학원교육학석사학위논문, pp.15-16.

한순미 (1999), 비고츠키와 교육-문화/역사적 접근-, 교육과학사, pp.129-131

Ausubel (1973), *"Facilitating Meaningful Verbal Learning in the Classroom"*, Higgins, J.L.(ed), Mathematics Teaching and Learning, Charles A. Jones Publishing Company, pp.202-209.

Clement. J (1983), *'A conceptual model discussed by Galileo and used intuitively by physics students'*, in D. Genter and A. L. stevens(Eds.), Mental Models, Lawrence Erlbaum Associates, London, pp.325-340.

Dreyfus, T. (1991), *Advanced Mathematical Thinking*, Advanced mathematical thinking processes, Kluwer Academic Publishers, pp.30-34.

Fischbein & Gazit (1984), 'Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?', *Educational Studies in Mathematic*, 15, pp.1-24.

Kaput, J. J. (1987), 'PMEll Algebra papers : A Representational Framework', *Proceedings of PMEll, Montreal*, 1, pp.345-354.

Koyama, M (1990), *A Study on Intuition in Mathematics Education*, 수학교육학회 Perspective, 동경 : 성문사

McCloskey, M (1983), *'Intuition physics'*, Scientific American, 248, pp.114-122.

Olson, D. R. & Campbell. R.(in press), *'Representation and Misrepresentation : On the beginning of symbolization in young children'*, in D. Tirosh(Ed.) Implicit and Explicit Knowledge : An Educational approach, Ablex, Norwood NJ.

Skemp, R. R. (1987), *The Psychology of Learning Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. New Jersey, 황우영 역 (1998), 수학 학습 심리학, 민음사

Tharp, R. G. & Gallimore, R. (1988), *Rousing minds to life : Teaching, learning and schooling in social context*, Cambridge University Press

NCTM(The National Council of Teachers of Mathematics, 1989), *Curriculum and Evaluation Standards for Mathematics*, 구광조 외2 역 (1992), 수학교육과정 평가의 새로운 방향, 경문사, pp.303-308.

Tirosh, D. (1991), *Advanced Mathematical Thinking, The role of students' Intuitions of infinity in teaching the cantorial theory*, Kluwer Academic Publishers, pp.199-214.

Vinner. S (1983), 'Concept definition, concept image and the notion of function', Intuitional Journal of *Mathematical Education in Science and Technology*, 14, pp.239-305.

Vinner. S (1991), *Advanced Mathematical Thinking, The role of definitions in the Teaching and Learning of mathematics*, Kluwer Academic Publishers, pp.65-73, 류희찬 역, 고등 수학적 사고, 대한수학교육학회

Woolfolk, A. E. (1995), *Educational psychology*, 김아영 외(역), 1997, 교육심리학, 학문사

A Search for the meaningful method of teaching for Correct Understanding of Advanced Mathematics Concepts

Han, Gil Jun
Department of Mathematics Education, Dankook University, 8 Hannam-dong, Yongsan-gu, Seoul, Korea, 140-714

Woo, Ho Sik
Mirim girl's computer science high school, 1557-1 Shinrim-dong, Gwanak-gu, Seoul, Korea, 151-019

Many high school students are having difficulties for studying advanced mathematics concepts. It is more complicated than in junior high school and they are losing interest and confidence. In this paper, advanced mathematics concepts are not just basic concepts such as natural numbers, fractions or figures that can be learned through life experience but concepts that are including variables, functions, sets, tangents and limits are more abstract and formal.

For the students to understand these ideas is too heavy a burden and so many of the students concentrate their efforts on just memorizing and not understanding. It is necessary to search for a meaningful method of teaching for advanced mathematics that covers deductive methods and symbols. High school teachers are always asking themselves the following question, "How do we help the students to understand the concept clearly and instruct it in a meaningful way?" As a solution we propose the followings :

Ⅰ. To ensure they have the right understanding of concept image involved in the concept definition.

Ⅱ. Put emphasis on the process of making mental representations and the role of intuition.

Ⅲ. To instruct students and understand them as having many chance of the instructional conversation.

In conclusion, we studied the meaningful method of teaching with the theory of Ausubel related to the above proposed methods. To understand advanced mathematics concepts correctly, the mutual understanding of both teachers and students is necessary.