

시변 제어 기법을 이용한 비행 제어

최재원* · 이호철**

(부산대학교 기계공학부)

1. 서론

비행체의 비행 제어 연구시 대상 비행체의 운동 방정식은 비행 속도에 관계된 계수를 포함하고 있다. 과거에는 속도를 일정한 것으로 고려하여 선형 미분 방정식의 계수를 상수로 고려하여 그 해를 구하곤 하였다. 아음속 항공기에 의해 구현되는 상대적으로 작은 가속을 가지는 비행에서 그러한 가정은 만족할 만한 결과를 얻기에 적절한 것이었지만, 현대의 초음속 항공기나 미사일 등에 의해 구현되고 있는 급격한 가속도나 속도의 증감은 기존의 선형 시불변 시스템 모델로서는 수용할 수 없는 경우가 생기게 되었다. 또한, 급격한 연료 소비는 비행체의 질량, 무게 중심, 관성 모멘트 등을 제어 동작 중에 상당한 정도로 변화게 한다. 결국 항공기 또는 미사일 등의 비행 제어 시스템 설계 및 해석을 위한 최근 경향은 이러한 시변 파라미터를 고려하여 설계하는 쪽으로 많은 연구가 진행되고 있다.

비행체의 선형 시변 모델을 획득하는 방법은 두 가지가 있는데, 하나는 비행체의 운동 방정식에 직접 시변 요소를 고려하여 선형 미분 방정식이 시변 계수를 가지도록 모델링하는 것이고, 나머지 하나는 비선형 시스템을 궤적에 대하여 선형화를 수행함으로써 구해진다. 본 고에서는 비행체의 비행 제어에 시변 제어 기법을 도입하기 위하여 다음 그림 1과 그림 2에 표시된 제어 전략을 적용한다.

그림 1에서는 비선형 시스템인 비행체가 주어진 궤적을 추종하기 위한 제어 전략을 나타내고, 여기서 비행체의 궤적 $y(t)$ 와 주어진 궤적 $y_d(t)$ 와의 오차에 대하여 선형화를 수행하면 선형 시변 오차 동역학을 획득할 수 있다. 그림 2에서는 선형 시변 오차 동역학에 대한 제어구조를 나타내고, 본 고에서는 시변 제어 이득 $K(t)$ 를 결정하는 알고리즘들에 대하여 살펴본다.

한편, 고유치(eigenvalues) 및 고유벡터(eigenvectors)는 선형 시불변 시스템의 해석에 대단히 중요한 역할을 한다. 특히, 시스템의 안정성 판단이나 시스템 변환(system transformation) 등에 대단히 유용한 역할을 한다. 그러나 선형 시변 시스템의 경우, 시스템 행렬 $A(t)$ 의 매 순간의 고유치 정보로

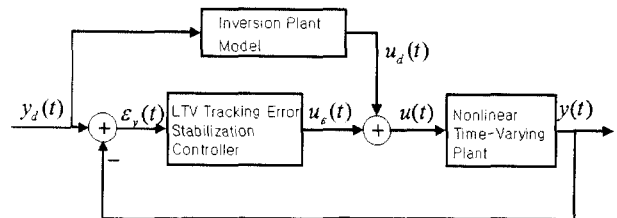


그림 1. 비선형 시스템에 대한 추종 제어기

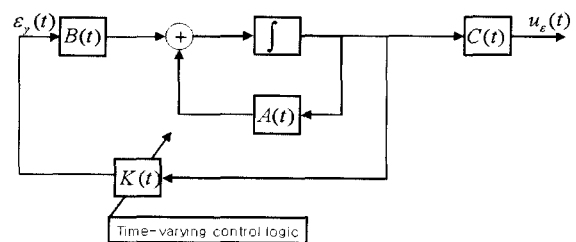


그림 2. 선형 시변 제어기

는 선형 시변 시스템의 안정성을 결정할 수 없다는 사실이 이미 잘 알려져 있다. 뿐만 아니라, $A(t)$ 의 시불변 고유치 이론을 적용하여 구한 고유벡터로 구성된 행렬 $T(t)$ 를 이용한 대수 변환(algebraic transformation) $x(t) = T(t)\bar{x}(t)$ 는 일반적으로 등가의 변환된 시스템 $\bar{A}(t) = T^{-1}(t)A(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t)$ 의 형태를 대각형 또는 Jordan 형태로의 변환을 보장하지 못할 뿐만 아니라, 고유치의 불변성(invariancy)도 유지하지 못한다. 따라서, 선형 시불변 시스템을 위한 고유치의 개념을 선형 시변 시스템에까지 확장해 보려는 시도가, 기존의 극점배치(pole placement) 알고리즘으로는 선형 시변 시스템을 위한 극점배치 기법으로는 더 이상 유효하지 않다는 사실이 알려진 이래로(이것은 선형 시변 시스템의 경우는 일반적인 극점 또는 고유치의 개념이 존재하지 않았기 때문이다), 수 년 동안 많은 연구자들에 의하여 있어 왔다. 본 고에서는 최근에 개발된 선형 시변 시스템에 대한 PD-고유치, PD-고유벡터 개념을 도입하고, 이를 이용한 시변 제어기 설계 기법을 소개한다.

2. 선형 시변 시스템의 새로운 고유치 이론

다음 식과 같이 주어지는 N 차 스칼라 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$y^{(N)}(t) + a_N(t)y^{(N-1)}(t) + \dots + a_2(t)\dot{y}(t) + a_1(t)y(t) = 0 \quad (1)$$

$$y^{(k)}(t_0) = y_{k0}; \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

식 (1)로 표현되는 선형 시변 시스템은 다음과 같은 스칼라 미분 다항식 연산자(SPDO: Scalar Polynomial Differential Operator)를 이용하여 $D_a\{y\} = 0$ 의 형태로 표현될 수 있다.

$$D_a = \delta^N + a_N(t)\delta^{N-1} + \dots + a_2(t)\delta + a_1(t) \quad (2)$$

식 (2)의 $\delta = \frac{d}{dt}$ 는 미분연산자이다. 선형 시변 시스템 (1)에 대한 연구는 제어, 신호처리, 동적 시스템 이론에서 매우 중요하다. 이것은 많은 동적 시스템이 식 (1)과 같이 선형 미분 방정식으로 모델링될 뿐만 아니라 비선형 동적 시스템도 선형화 함으로써 효과적으로 다루어질 수 있기 때문이다. $a_k(t) \equiv a_k$ 인 시불변 시스템의 경우는 해석적인 해, 안정도 판별, 주파수역 해석 및 안정화 제어기 설계 기법 등을 쉽게 적용할 수 있는 고유치 이론이 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 또한 시불변 고유치 이론은 시변 시스템에 직접 적용될 수 없다는 사실도 잘 알려져 있다. 최근에 다음과 식 (3)과 같은 SPDO의 인수분해에 관한 플로켓(Floquet) 결과에 기반을 둔 선형 시변 시스템 (1)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론이 개발되었다.

$$D_a = (\delta - \lambda_N(t)) \dots (\delta - \lambda_2(t)) (\delta - \lambda_1(t)) \quad (3)$$

따라서, 본 장에서는 선형 시변 시스템의 고유치 개념을 도입하기 위하여, 선형 시변 미분 방정식 (1)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론에 관한 새로운 결과들을 간단히 살펴본다. 선형 시변 시스템의 미분 대수 고유치 개념에 대한 기본 용어를 다음과 같이 요약한다.

정의 1. [1]

(a) D_a 를 $a_k(t) (k=1, 2, \dots, N)$ 를 가지고 있는 SPDO라 하자. 그러면 식 (3)의 인수분해에 의해서 주어지는 스칼라 함수 $\lambda_k(t) (k=1, 2, \dots, N)$ 를 D_a 의 SD-고유치(SD-eigenvalue)라 명명한다. 또한, $\rho(t) = \lambda_1(t)$ 를 D_a 의 PD-고유치(PD-eigenvalue)라 명명한다.

(b) $\lambda_k(t)$ 가 식 (3)을 만족한다면, 집합 $\Gamma_a = \{\lambda_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 D_a 에 대한 SD-스펙트럼(SD-spectrum)이라 명명한다.

(c) $\rho_k(t)$ 가 PD-고유치이고 $\{y_k(t) = \exp(\int \rho_k(t) dt)\}_{k=1}^N$ 가 $D_a\{y\} = 0$ 의 해라면 집합 $r_a = \{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 D_a 에 대한 PD-스펙트럼(PD-spectrum)이라 명명한다.

(d) D_a 를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 가지고 있는 N 차

SPDO라 하고, $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 는 $y_i(t) = \exp(\int \rho_i(t) dt)$ 인 $D_a\{y\} = 0$ 의 근이라 하자. 다음 행렬을 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이라 한다.

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_N(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_N(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(N-1)}(t) & y_2^{(N-1)}(t) & \dots & y_N^{(N-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

그리고, $D(t)$ 는 다음의 대각행렬을 나타낸다.

$$D(t) = \text{diag} [y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)] \quad (5)$$

그러면 다음의 관계가 성립한다.

$$W(t)D^{-1}(t) = P(\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)) \quad (6)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ D_{\rho_1}\{1\} & D_{\rho_2}\{1\} & \dots & D_{\rho_N}\{1\} \\ D_{\rho_1}^2\{1\} & D_{\rho_2}^2\{1\} & \dots & D_{\rho_N}^2\{1\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{\rho_1}^{N-1}\{1\} & \dots & \dots & D_{\rho_N}^{N-1}\{1\} \end{bmatrix}$$

여기서, $D_{\rho_i} = (\delta + \rho_i(t))$, $D_{\rho_i}^k = D_{\rho_i} D_{\rho_i}^{k-1}$ 이고, $W(t) = W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))$ 는 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이다. 표준 좌표변환 행렬 $P(t)$ 는 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 에 대응되는 D_a 에 대한 모드 표준 행렬(modal canonical matrix)이라고 불린다. $P(t)$ 의 열 벡터 $p_i(t)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$A_c(t)p_i(t) - \rho_i(t)p_i(t) = \dot{p}_i(t) \quad (7)$$

그리고 $Q(t) = P^{-1}(t)$ 의 행 벡터 $q_i^T(t)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$q_i^T(t)A_c(t) - \rho_i(t)q_i^T(t) = -\dot{q}_i^T(t) \quad (8)$$

따라서, $p_i(t)$ 와 $q_i^T(t)$ 를 각각 $\rho_i(t)$ 에 대응되는 $A_c(t)$ 와 D_a 의 우 PD-고유벡터(right PD-eigenvector) 및 좌 PD-고유벡터(left PD-eigenvector)라고 정의한다. 여기서 $A_c(t)$ 는 D_a 의 위상 표준형 행렬이다.

식 (1)의 시변 미분 방정식 계수 $a_i(t)$ 와 PD-스펙트럼과의 관계는 다음의 정리 1에 나타나 있고, 이것은 고유치지정 기법에서 바람직한 PD-고유치들을 가지는 페루프 시스템의 미분 방정식 계수 결정에 사용된다.

정리 1. [1]

선형 시변 시스템이 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^N$ 로 구성된다면, 선형 시변 미분 방정식의 계수 $a_i(t)$ 는 다음 공식에 의해서 구할 수 있다.

$$a_i(t) = \frac{\dot{p}_{k,N+1}}{\det P(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t))} \quad (9)$$

여기서 $P(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t))$ 는 식 (6)에서 정의된 모드 표준 행렬이고, $\hat{p}_{k,N+1}(t)$ 는 다음 식 (10)에서 정의되는 행렬 $P_{N+1}(t)$ 에서 $p_{k,N+1}(t)$ 의 여인자(cofactor)를 나타낸다.

$$P_{N+1}(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t)) = [p_{ij}(t)] \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} P_N(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t)) & D_{\rho_1}(1) \\ D_{\rho_1}^N(1) & \dots & D_{\rho_N}^N(1) & D_{\rho_N}(1) \end{bmatrix}$$

다음 정리 2를 통해 다음 식 (11)과 같이 표현되는 선형 시변 시스템 상태공간 방정식의 해를 모드 분해(modal decomposition)한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 시스템 행렬 $A(t)$, 입력 행렬 $B(t)$, 출력 행렬 $C(t)$ 의 차원은 각각 $N \times N$, $N \times m$, $l \times N$ 이다.

정리 2. [2]

PD-고유치, 좌·우 PD-고유벡터를 이용하여 식 (11)과 같이 주어지는 선형 시변 시스템 상태공간 방정식의 해를 모드 표현으로 나타낼 수 있다. 각 상태의 초기값을 0으로 두면, 식 (11)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t P(t)X(t,\tau)Q(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m p_i(t) \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t \rho_i(\sigma)d\sigma} q_i^T(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N c_k(t) p_i(t) \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t \rho_i(\sigma)d\sigma} q_i^T(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $P(t)=[p_1(t), \dots, p_N(t)]$, $Q(t)=[q_1(t), \dots, q_N(t)]^T$ 이고 $p_k(t)$ 와 $q_k(t)$ 는 각각 우 PD-고유벡터, 좌 PD-고유벡터이다. 그리고 $X(t, t_0) = \text{diag} [e^{\int_{t_0}^t \rho_1(\sigma)d\sigma}, e^{\int_{t_0}^t \rho_2(\sigma)d\sigma}, \dots, e^{\int_{t_0}^t \rho_N(\sigma)d\sigma}]$ 이다.

다음의 정리 3은 PD-고유치, PD-고유벡터를 이용한 선형 시변 시스템의 안정도 판별법이다.

정리 3. [2]

식 (2)와 같이 표현되는 선형 시변 시스템의 PD-고유치와 PD-고유벡터가 다음과 같은 두 가지 조건을 만족하면, 준 선형 시변 시스템은 점근적(asymptotically)으로 안정하게 된다.

(i) 다음 식을 만족하는 어떤 상수 $0 < c_i \leq \infty$ 가 존재한다.

$$\text{em}(\text{Re} \rho_i(t)) = -c_i < 0 \quad (13)$$

여기서 $\text{em}(\sigma(t))$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{em}(\sigma(t)) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma(t) dt \quad (14)$$

(ii) 다음 식을 만족하는 상수 h_i 와 $0 < d_i < c_i$ 가 존재한다.

$$\|p_i(t) q_i^T(t_0)\| < h_i e^{d_i(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq T_0 \quad (15)$$

3. 선형 시변 시스템의 고유치 및 고유구조지정 기법

본 장에서는 서론에서 언급한 그림 1과 같은 제어 전략을 이용하여 비행체의 비선형 운동 방정식으로부터 선형 시변 모델을 획득하는 방법과 시변 제어 기법인 PD-고유치지정 기법과 PD-고유치 및 PD-고유벡터를 동시에 지정하는 고유구조지정 기법에 대해서 기술한다.

3.1. 선형 시변 모델

그림 1에서 비행체의 비선형 운동 방정식이 다음과 표현된다고 하자.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= f(\xi(t), \mu(t), t) \\ \eta(t) &= h(\xi(t), \mu(t), t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, $\xi(t)$, $\mu(t)$, $\eta(t)$ 는 각각 상태, 입력, 출력을 각각 나타낸다. 그러면 명령 궤적 $\bar{\eta}(t)$ 에 대하여 다음 식을 만족하는 $\bar{\xi}(t)$, $\bar{\mu}(t)$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}(t) &= f(\bar{\xi}(t), \bar{\mu}(t), t) \\ \bar{\eta}(t) &= h(\bar{\xi}(t), \bar{\mu}(t), t) \end{aligned} \quad (17)$$

그리고 $\bar{\xi}(t)$, $\bar{\mu}(t)$ 에 대하여 식 (17)을 선형화하면 다음과 같은 선형 시변 오차 동역학을 구할 수 있다 [3].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, 상태, 출력 추종 오차, 추종 오차 제어 입력을 다음과 같이 정의하고,

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi(t) - \bar{\xi}(t) \\ y(t) &= \eta(t) - \bar{\eta}(t) \\ u(t) &= \mu(t) - \bar{\mu}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

시스템 행렬, 입력 행렬, 출력 행렬 등은 다음 식에 의해서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial \xi}(\bar{\xi}(t), \bar{\mu}(t), t), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(\bar{\xi}(t), \bar{\mu}(t), t) \\ C(t) &= \frac{\partial h}{\partial \xi}(\bar{\xi}(t), \bar{\mu}(t), t), \quad D(t) = \frac{\partial h}{\partial \mu}(\bar{\xi}(t), \bar{\mu}(t), t) \end{aligned} \quad (20)$$

3.2. 선형 시변 시스템의 고유치지정 기법

본 절에서는 선형 시변 시스템의 고유치지정을 위한 선형 시변 시스템의 Ackermann형 공식에 대하여 기술한다. 선형 시불변 시스템에 대한 Ackermann 공식은 잘 알려진 바처럼 페루프 시스템의 바람직한 고유치들로 구성된 특성 방정식의 계수를 이용하여 제어 이득을 구하는 것이다. Ackermann 공식을 이용하여 고유치를 지정을 하면 개루프의 고유치를 구할 필요가 없고, 또한 유사 변환에 의한 상태 변환의 필요도 없다. 본 절에서 기술하는 시변 시스템의 고유치지정 기법은 시불변 시스템을 위한 Ackermann 공식의 장점을 유지하는 시변 시스템의 Ackermann형 공식이다. Ackermann형 공식은 다음 정의 2, 3에 나타나 있다.

정의 2. [4]

제어 가능한 단일입출력(SISO) 선형 시변 시스템 $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t)$ 에 대한 Ackermann형 공식을 다음과 같이 정의한다.

$$u(t) = K(t)x(t) = -([a_0(t) \ \dots \ a_N(t)] + [d_1(t) \ \dots \ d_N(t)]) \begin{bmatrix} \check{C}'_0(t) \\ \vdots \\ \check{C}'_{N-1}(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (21)$$

여기서, $\check{C}'_0(t)$ 는 제어 행렬(controllability matrix)의 역행렬에서 마지막 행이고, 나머지 $\check{C}'_i(t)$ 는 $\check{C}'_p(t) = \check{C}'_{p-1}(t) + \check{C}'_{p-1}(t)A(t)$ 에 의해서 구해진다. $\check{C}'_N(t)$ 는 $\check{C}'_0(t), \dots, \check{C}'_{N-1}(t)$ 의 선형 조합으로 나타낼 수 있는데, 이때 선형 조합 계수가 $a_i(t)$ 이고, $d_i(t)$ 는 바람직한 PD-고유치와 정리 1을 이용하여 구한 계수이다.

정의 3. [4]

제어 가능한 다입출력(MIMO) 선형 시변 시스템 $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ 에 대한 Ackermann형 공식을 다음과 같이 정의한다.

$$u(t) = K(t)x(t) = -B(t) \begin{bmatrix} a_{0,1}(t) & a_{0,2}(t) & \dots & a_{0,m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m}(t) & a_{1,m}(t) & \dots & a_{1,m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{0,1}(t) \dots d_{0,1}(t) & 0 \dots 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 \dots 0 & d_{n-1,m}(t) \dots d_{n-1,m}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{C}'_{0,1}(t) \\ \vdots \\ \check{C}'_{n-1,m}(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (22)$$

여기서, σ_i 는 입력 행렬 $B(t)$ 의 i 번째 열에 해당하는 제어 지수(controllability index)이다. 준 다 입출력 시스템은 제어 지수 σ_i 의 차원을 가지는 입력 행렬의 열 수만큼의 단일 입출력 시스템으로 분할된다. 따라서 $a_{i,j}(t)$ 와 $d_{i,j}(t)$ 는 정의 2에서와 비슷한 방법으로 구할 수 있다.

3.3. 선형 시변 시스템의 고유구조지정 기법

고유구조(고유치/고유벡터) 문제는 제어가능한 시스템의

고유치와 고유벡터를 동시에 요구하는 값 및 방향을 갖도록 제어기를 설계하는 문제로서, 고전적인 제어문제에서 다루어 왔던 감쇠, 정착시간 및 모드 또는 외란 분리 특성을 현대 다 변수 제어 구조에 반영시킬 수 있는 효과적인 방법으로 알려져 있다. 일반적으로 시스템의 반응 속도는 시스템의 고유치에 의하여 결정되는 반면, 고유벡터는 시스템의 반응 형태(mode shape)를 결정한다. 고유구조지정을 위한 제어기의 역할은 부과된 사양을 만족하도록 개루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 페루프 시스템에서 적절한 값 및 방향을 갖도록 지정하는 것이다. 이러한 고유구조지정 기법은 비행체의 모드 분리 등을 위한 비행제어시스템의 구성이나 유연구조물의 진동억제 제어문제 등에 폭넓게 사용되어 왔다 [5].

선형 시변 시스템에 대한 고유구조 지정기법을 위하여 다음의 선형 시변 상태 공간 방정식을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (23)$$

$$= A(t)x(t) + \sum_{k=1}^m b_k(t) u_k(t)$$

$$u(t) = K(t)x(t) \quad (24)$$

여기서, (i) $x \in R^N$, $u \in R^m$ 는 각각 시스템의 상태 변수와 제어 입력을 나타내며; (ii) $A(t), B(t)$ 는 모든 요소가 연속이고 시간에 대하여 $(N-1)$ 번 미분 가능한 함수이며; (iii) $\{A(t), B(t)\}$ 는 제어가 가능하고; 마지막으로 (iv) $\text{rank } B(t) = m \neq 0$ 이고 $m \leq N$.

식 (23)을 선형 시변 시스템의 고유치 문제로 정의하기 위하여 Lyapunov 변환을 하고, 변환된 시스템에 대하여 상태 독립적으로 주어지는 제어 입력을 인가하면, 전체 페루프 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{z}(t) = (A_c(t) + \overline{B}(t) \overline{K}(t))z(t) \quad (25)$$

여기서 $A_c(t)$ 는 $A(t)$ 의 위상 표준형 행렬이다. 그리고, 식 (7)을 이용하면 위 페루프 시스템에 대응하는 우 PD-고유치 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$(A_c(t) + \overline{B}(t) \overline{K}(t))p_i(t) - \rho_i(t)p_i(t) = \dot{p}_i(t) \quad (26)$$

여기서, $p_i(t)$ 는 PD-고유치 $\rho_i(t)$ 에 대응하는 우 PD-고유벡터를 나타낸다. 선형 시변 시스템의 PD-고유치들은 모두 정확하게 요구하는 위치에 배치시키고 동시에 우 PD-고유벡터들도 최소한 최소 자승의 의미에서 원하는 방향을 갖도록 만드는 제어 이득 $K(t)$ 를 구하기 위해서 식 (26)의 우 PD-고유치 문제에서 다음과 같이 정의되는 대개벡터 $h_i(t) = \overline{K}(t)p_i(t)$ 를 도입하면 우 PD-고유치 문제 식 (26)은 다음과 같은 미분 Sylvester 방정식의 형태로 주어진다.

$$A_c(t)p_i(t) - \rho_i(t)p_i(t) + B(t)h_i(t) = \dot{p}_i(t) \quad (27)$$

이를 행렬 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$A_c(t)P(t) - P(t)Y(t) + B(t)H(t) = \dot{P}(t) \quad (28)$$

여기서, $P(t)=[p_1(t), \dots, p_M(t)]$, $Y(t)=[\rho_1(t), \dots, \rho_M(t)]$ 이고, $H(t)=[h_1(t), \dots, h_N(t)]$ 로 구성된다. 요구하는 페루프 PD-고유치들로 이루어진 행렬 $Y(t)$ 에 대하여 매개벡터 $H(t)$ 를 임의로 선택을 하면 가능한 페루프 우 PD-고유벡터를 생성할 수 있지만, $H(t)$ 행렬의 임의 선택은 부적절한 결과를 유발할 수 있으므로 먼저 요구하는 방향성을 갖는 모드 행렬을 상정하고 이를 표적 모드행렬이라 하자.

$$P_d(t)=[p_{d_1}(t), \dots, p_{d_N}(t)] \quad (29)$$

선정한 표적 모드행렬을 미분 Sylvester 방정식에 대입하면 다음과 같이 $H(t)$ 를 구할 수 있다.

$$H(t) = -B^*(t)(A_c(t)P_d(t) - P_d(t)Y(t) - \dot{P}_d(t)) \quad (30)$$

여기서 $B^*(t)$ 는 행렬 $B(t)$ 의 의사 역행렬(pseudo-inverse)를 의미한다. 이것은 $H(t)$ 가 최소 자승의 의미에서 계산(즉, $m \leq N$)되었다는 것을 나타낸다. 이와 같이 구한 $H(t)$ 를 $\tilde{H}(t)$ 로 놓고 식 (28)에 대입하여 $P_d(t)$ 대하여 다시 미분 Sylvester 방정식을 풀게 되면 다음 식과 같이 $P_d(t)$ 와는 다른 $P_a(t)$ 가 구해지는데 이 모드행렬이 바로 획득 가능한 (achievable) 모드행렬이 된다.

$$A_c(t)P_a(t) - P_a(t)Y(t) + B(t)\tilde{H}(t) = \dot{P}_a(t) \quad (31)$$

이와 같이 구해진 $P_a(t)$ 를 $\tilde{H}(t) = \bar{K}(t)P_a(t)$ 에 대입하면 이득 행렬 $\bar{K}(t)$ 가 구해진다 [6].

4. 결 론

본 고에서는 강한 비선형성과 시변 요소를 가지는 비행체를 제어하기 위한 제어 전략을 소개하였다. 즉, 비선형 시스

템을 제적 선형화를 통하여 선형 시변 시스템 모델을 획득하였고, 선형 시변 시스템의 안정화 제어를 설계하기 위하여 새로운 고유치 이론을 도입하였다. 선형 시변 제어기 설계 기법으로는 고유치 지정을 위한 Ackermann형 공식과 미분 Sylvester 방정식을 이용한 고유구조지정 기법을 제시하였다. 본 고에서 제시한 시변 제어 기법은 기존의 비행체 제어 기법에 많이 사용되고 있는 이득계획기법(gain scheduling)에 비하여 획기적인 성능 개선과 안정도 강인성을 확보할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- [1] J. Zhu, and C. D. Johnson, "Unified Canonical Forms for Matrices over a Differential Ring," *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 147, pp. 201-248, 1991.
- [2] J. Zhu, "A Necessary and Sufficient Stability Criterion for Linear Time-Varying Systems," *Proceedings of the 28th IEEE Southeastern Symposium on Systems Theory*, pp. 115-119, 1996.
- [3] M. C. Mickle, and J. Zhu, "Skid To Turn Control of the APKWS Missile Using Trajectory Linearization Technique," *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3346-3351, 2001.
- [4] 이호철, 최재원, "Ackerman형 공식을 이용한 선형 시변 시스템의 고유치지정 기법," *KIEE/IEEK/ICASE 합동 학술 발표회 논문집*, pp. 26-31, 2001.
- [5] J. W. Choi, "A Simultaneous Assignment Methodology of Right/Left Eigenstructures," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 34, No. 2, pp. 625-634, 1998.
- [6] J. W. Choi, H. C. Lee, and J. Zhu, "Decoupling and Tracking Control Using Eigenstructure Assignment for Linear Time-Varying Systems," *International Journal of Control*, Vol. 74, No. 5, pp. 453-464, 2001.