

조정파라미터 공간에서의 제어계 안정한계 특성

최 순 만

Stability Limit Properties of a Control System on the Space of Adjustable Parameters

S-M Choi

Key words : Stability Limit(안정 한계), Parameter Space(파라미터 공간), Frequency Response(주파수응답), Stable Region(안정영역)

Abstract

In this paper, a general one-loop control system was assumed as a model system which has a time-delay element connected with a first order-lag element in series. After the corresponding parameter set causing stability limit condition for the model system were obtained by mathematical procedures, their loci on the parameter space was taken according to frequency change. The parameter set loci of stability limit showed a specific pattern, and particularly the curves on the Kp-Ti parameter space were able to be generalized in the form of an exponential formula. These properties were also compared with the results taken from experimental procedures by Nyquist response method and Ziegler & Nichols method on the time domain, and both results were confirmed to be nearly same.

1. 서 론

조정파라미터의 조합에 의해서 제어계의 안정 특성을 표현하게 되면 실제의 시스템에 대해 적절한 안정상태의 유지관리가 매우 용이해질 뿐 아니라¹⁻³⁾ STC나 퍼지제어를 위한 설계분야에서도 활용이 가능하다⁴⁻⁵⁾.

안정 한계에 해당하는 조정파라미터의 집합은

전달함수로 표현된 시스템에서 수식적인 과정을 거쳐 구하는 것 외에 이미 설치되어 있는 실 시스템의 경우는 한계감도법과 유사한 방법으로 간단히 구하거나 나이퀴스트 선도에 의한 시험을 통해서도 얻어진다.

조정파라미터가 2개 이상인 제어계에서 안정한계 상태에 놓이기 위한 조정파라미터 값들의 조합은 조정파라미터 공간에서 일정한 곡선패턴의 형

* 한국해양수산연수원(원고접수일 : 2000년 11월)

태로 기대된다.

일반적인 단일루프의 제어계를 모델로 할 때 나타나는 안정한계의 이러한 곡선패턴은 제어대상의 특성에 의해 주로 지배될 것이며 결국 제어대상의 전달함수 계수들은 조정파라미터 공간상에서 안정한계 곡선의 패턴형태에 대해 일정한 연관성을 나타내게 될 것으로 보아진다.

본 논문은 안정한계 파라미터 조합이 나타내는 특성과 곡선제적을 분석하기 위한 연구로써 단일루프의 일반적인 제어시스템을 대상으로 PI제어에 대한 한계곡선을 해석하였다. 금번 연구에서는 파라미터 조합을 수식적인 과정을 통해 K_p-T_i 좌표 상에서 나타냄으로써 앞서 연구된 나이퀴스트 선도에 의한 결과⁶⁾와 비교 분석이 되도록 하였다.

2. 안정한계에서의 조정 파라미터

제어대상 $G(s)$ 와 제어기 $K(s)$ 로 구성되는 단일입출력의 직결피드백 계통을 가정할 때 제어기의 가변 조정파라미터가 p_1, p_2 2 개이고 폐회로 전달함수를 $F(s)$, 입출력 시간함수를 r, c 라 하면 이들 관계는 식(1)이 된다.

$$c(t) = \int_0^t f(\tau, p_1, p_2) r(t-\tau) d\tau$$

$$\text{단, } f(t, p_1, p_2) = L^{-1}[F(s)] \quad (1)$$

제어기의 전달함수 $K(s)$ 는 식(2)와 같이 p_1, p_2 에 의한 3항 클래스 제어기 형태로 표현할 수 있으며 여기에서 $K_0(s), K_1(s), K_2(s)$ 는 각각 고정된 전달함수를 나타낸다. 이 경우 개인을 고정한 조건에서 PID제어기의 경우를 포함하게 된다.

$$K(s) = K_0(s) + K_1(s)p_1 + K_2(s)p_2$$

$$p_1, p_2 \in R \quad (2)$$

또한 PI 제어기의 경우 p_1, p_2 를 각각 비례동작 및 적분동작의 크기를 정하는 파라미터로 하여 2항 클래스 제어기로 취급할 수 있다. 계의 제어특성은 루프전달함수 $KG(s)$ 에 의해 정해지고 이것의 미소변화분 $\Delta KG(s)$ 은 2항 혹은 3항 클래스의 제어기이든 제어대상의 특성이 일정하면 편미분 선형화를 통해 식(3)과 같이 나타낼 수 있으며 p_1, p_2 두 파라미터의 변화에 의해서만 영향을 받는다.

$$\Delta KG(s) = G(s) \left[\frac{\partial K(s)}{\partial p_1} + \frac{\partial K(s)}{\partial p_2} \Delta p_2 \right]$$

$$= G(s) [K_1(s) \Delta p_1 + K_2(s) \Delta p_2] \quad (3)$$

폐루프계가 안정한계로 되기 위한 주파수응답의 조건식은 식(2)로부터 식(4)가 된다.

$$1 + G(j\omega) [K_0(j\omega) + K_1(j\omega)p_1 + K_2(j\omega)p_2] = 0, \omega \in R \quad (4)$$

식(4)에서 $G(j\omega), K_0(j\omega), K_1(j\omega), K_2(j\omega)$ 가 허수축상에 극을 갖는 경우의 집합을 A 라고 하면 안정한계가 되기 위한 파라미터 집합 P_c 는 식(5)로 나타낼 수 있다.

$$P_c = \{p = (p_1, p_2) \mid 1 + K(j\omega)G(j\omega) = 0, \omega \in A\} \quad (5)$$

식(5)를 풀기 위하여 G, K 를 복소수 형태로 나타내면 식(6), 식(7)과 같으며 여기에서 우변의 a, b, c_{1i}, c_{2i} 는 ω 의 함수이다.

$$G(j\omega) = a(\omega) + b(\omega)j \quad a, b \in R \quad (6)$$

$$K_i(j\omega) = c_{1i}(\omega) + c_{2i}(\omega)j \quad c_{1i}, c_{2i} \in R, i = 0, 1, 2 \quad (7)$$

식(6)과 식(7)로부터 식(4)는 식(8)과 같아진다.

$$H\Theta p = -H\eta - e \quad (8)$$

여기에서

$$p = (p_1 \ p_2)^T, \eta = (c_{10} \ c_{20})^T, e = (1 \ 0)^T \quad (9)$$

$$H = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \Theta = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (10)$$

이다.

행렬 Θ 가 비특이이면 식(8)을 만족하는 p 의 집합 P_c 는 식(11)에 의해 구해진다.

$$p = \Theta^{-1}(-\eta - H^{-1}e) \quad (11)$$

또한 식(2)를 p_1, p_2 만의 2항 클래스에 의한 제어기로 가정하면 p 는 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$p = -\Theta^{-1}H^{-1}e \quad (12)$$

3. 제어계의 안정한계곡선

3.1 단일루프 제어계의 모델링

조작기와 측정기 및 제어대상으로 구성되는 단일루프의 일반적인 제어계에서 조작기와 측정기를 1차지연, 제어대상을 시간지연과 1차지연의 적으로 나타내면 이것의 모델링은 Fig.1의 블록 다이어그램이 된다.

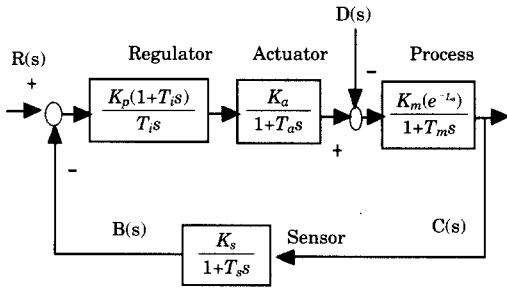


Fig. 1 Block Diagram of a System

- K_p : 조절기 정상이득
- T_i : 조절기 적분시간 [m]
- K_a : 조작기 정상이득
- T_a : 조작기 시정수 [m]
- K_m : 제어대상 정상이득
- T_m : 제어대상 시정수 [m]
- L : 제어대상의 지연시간 [m]
- K_s : 센서 정상이득
- T_s : 센서의 시정수 [m]

여기에서 각 계수는 모델 시스템의 작동으로부터 T_a, T_m, L, T_s 는 1/50 [m], 1.0 [m], 1/5 [m], 1/12 [m]로, 그리고 정상이득은 $K_a=K_m=K_s=1$ 로 정한다.

3.2 안정한계 곡선

Fig.1의 제어계에 대한 루프전달함수에서 조절기를 제외한 부분을 $G(s)$ 로 나타내면 식(10)의 ω 에 대한 함수 α, b 는 다음과 같다.

$$\alpha(\omega) = \frac{A(\omega) \cos \omega L - B(\omega) \sin \omega L}{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

$$b(\omega) = \frac{-A(\omega) \sin \omega L - B(\omega) \cos \omega L}{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (13)$$

단,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 1 - \omega^2(T_s T_m + T_a T_s + T_a T_m), \\ B(\omega) &= \omega(T_a + T_s + T_m - \omega^2 T_a T_s T_m) \end{aligned} \quad (14)$$

이다.

조절기를 PI제어로 하면 $p_1=K_p, p_2=K_p/T_i$ 이므로 조절기의 θ 는 식(15)가 된다.

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \quad (15)$$

따라서 파라미터 집합 p 는 2항제어기 경우인 식(12)와 식(13)의 관계로부터 식(16)으로 나타낼 수 있다.

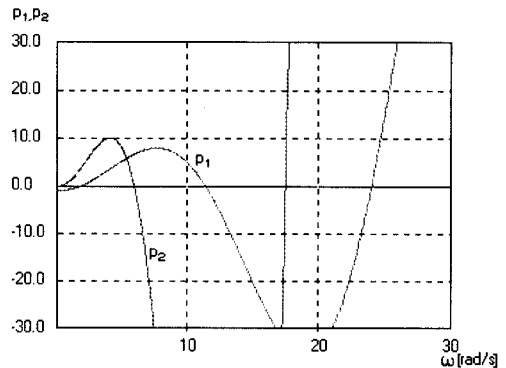


Fig. 2 p values according to ω ($L=0.2$ [m])

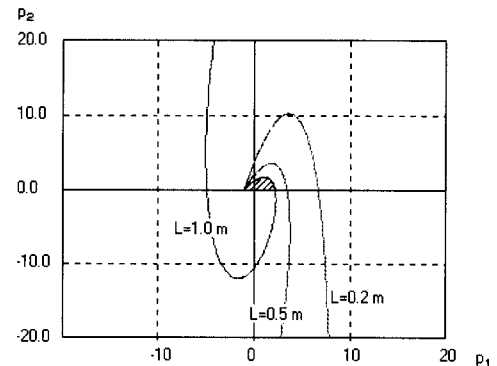


Fig. 3 Stability limit curve with $L=0.2, 0.5$ and 1.0 [m] ($T_m=1.0$ [m])

$$p = \begin{pmatrix} -A(\omega) \cos \omega L + B(\omega) \sin \omega L \\ A(\omega) \omega \sin \omega L + B(\omega) \omega \cos \omega L \end{pmatrix} \quad (16)$$

식(16)에 의해 각주파수 ω 에 대한 p_1 과 p_2 의 변화를 구하면 Fig.2와 같아진다.

p_1 과 p_2 에 의한 안정한계 곡선을 $T_m=1.0$ [m]의 조건에서 $L=0.2$ [m], 1.0 [m], 2.0 [m]에 대해 나타내면 Fig.3과 같이 되며 Fig.4는 $L=0.2$ [m]상태에서 T_m 의 값을 달리 하여 구한 결과를 보인다.

여기에서 실제적인 안정영역은 $p_2 \geq 0$ 인 조건이므로 $L=0.2$ [m]의 경우에는 곡선과 p_1 축이 이루는 빗금친 부분의 폐영역이 된다.

파라미터 p_1, p_2 를 식(17)에 의해 대응하는 조정 파라미터 K_p, T_i 로 바꾸어 나타내는 경우 K_p-T_i 좌표에서의 안정한계 곡선은 Fig.5와 같으며 여기서의 안정영역은 안정한계곡선의 아래쪽 부분이다.

$$\begin{pmatrix} K_p \\ T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{p_1}{p_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

4. 안정한계곡선의 분석

Fig.3과 Fig.4에서 집합 p 의 궤적은 $\omega=0$ 일 때인 $(-1,0)$ 의 지점을 기점으로 하고 있으며 ω 의 증가에 따라 궤적은 시계방향으로 회전하는 모양이 된다.

Fig.3에서 안정영역이 되기 위한 p_1 의 최대값을 p_{1m} 이라 하면 $p_2=0$ 일 때의 양방향 p_1 값 중 최소

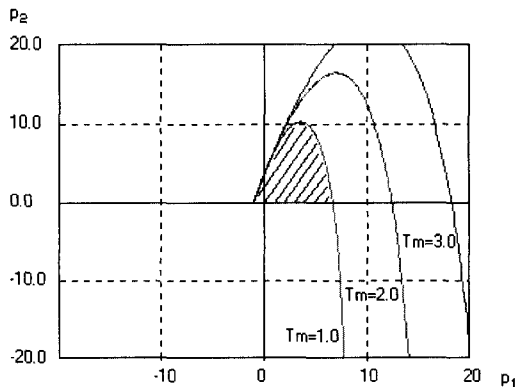


Fig. 4 Stability limit curve with $T_m=1.0, 2.0$ and 3.0 [m] ($L=0.2$ [m])

치가 p_{1m} 이 됨을 알 수 있다.

또한 L 의 증가에 대해서 안정영역이 감소하여 제한되고 있으며 T_m 증가에 따라서는 안정영역이 보다 확대됨을 나타낸다.

조정 파라미터를 p_1, p_2 로부터 조정다이얼에서의 실제적인 표현인 적분시간과 게인값으로 변환한 Fig.5의 결과에서 안정한계 곡선은 대략 식(18)의 지수함수 형태로 일반화할 수 있다.

$$K_p = \max(K_p) \left[1 - \exp\left(-\frac{T_i}{c}\right) \right] \quad (18)$$

여기에서 파라미터 c 는 $\max(K_p)$ 와 의 값과 함께 곡선 모양을 결정하는 지수가 된다. 이 같은 결과는 동일한 제어계에 대하여 나이키스트 선도에 의해 구한 결과와 시간영역에서의 한계감도법에 의해 얻어진 Fig.6의 결과를 서로 비교할 때 양자는 거의 일치되는 것이 확인된다. Fig.6에서 K_{po} 는 $L=$

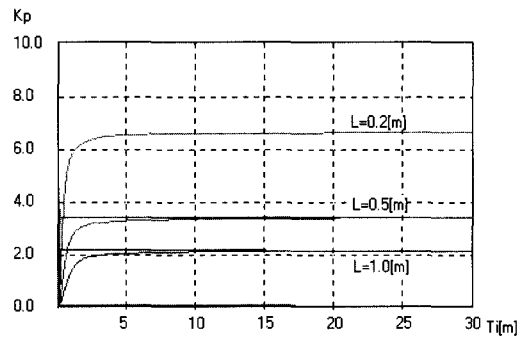


Fig. 5 Stability limit curve by the K_p-T_i axis ($T_m=1.0$ [m])

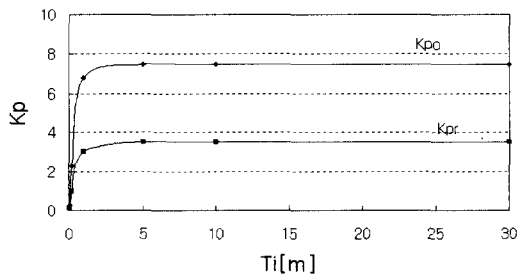


Fig. 6 Stability limit curve by experimental result of Nyquist method and Critical Sensitivity method ($L=0.2$ [m])

0.2[m]일 때의 안정한계곡선이고 K_{pr} 은 안정한계에서 감쇠가 커지는 방향의 조정으로 적절한 안정도를 갖게 되는 곡선이다.

$K_{pm} = \max(K_p)$ 라고 할 때 K_{pm} 의 값은 제어대상의 지연시간 L 과 시정수 T_m 에 의해 달라진다. Fig.7은 지연시간의 증가에 따른 K_p 의 변화를 나타낸 것이다.

K_p 는 p_1 에 해당하며 식(16)으로부터 식(19)와 같이 표현된다.

$$K_p = -\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \cos(\omega L + \alpha) \quad (19)$$

단, 위상각 $\alpha = \tan^{-1}B(\omega)/A(\omega)$ 이다.

따라서 Fig.7에서 $L=0.2$ [m]일 때의 K_{pm} 를 구한다면 처음의 맥동 최대치가 되는 $\omega=7.5$ [rad/s]에서의 K_p 값으로 나타낼 수 있으며 이 때의 값은 식(20)이 된다.

$$K_{pm} = K_p(\omega)_{\omega=7.5} = 7.8 \quad (20)$$

Fig.7에서 K_{pm} 값은 L 의 증가에 따라 크게 감소하므로 K_p-T_i 곡선에서도 안정영역이 감소되는 것이 확인되며 또한 Fig.8에서와 같이 T_m 의 증가에 따라 K_{pm} 가 증가하는 것은 시스템의 안정영역이 보다 넓어짐을 나타내고 있다.

이러한 지연시간 L 과 시정수 T_m 은 식(18)에서 수렴하는 값인 K_{pm} 의 크기뿐 아니라 곡선의 전체적인 모양을 정하는 파라미터 c 의 값도 이들 값으로 정해진다. Fig.5와 Fig.8의 결과에서 c 는 L 과 T_m 의 증가에 따라 같이 증가되는 양상임을 나타낸다. 또한 이와 같은 안정한계곡선에서 적절한 안정도를 얻기 위한 조정은 안정한계선으로부터 감쇠가 큰 쪽으로 적절하게 떨어진 지점의 계인 및 적분시간으로 정해줄 필요가 있다⁶⁾.

5. 결 론

안정한계 조정파라미터의 조합이 나타내는 곡선패턴을 안정특성의 판별과 조정에 활용하기 위하여 단일루프의 일반적인 제어계를 대상으로 안정한계 곡선을 구하였으며 특히 수식적인 과정에 의해 얻어진 K_p-T_i 평면에서의 패턴 결과는 나이퀴스트선도를 통한 이전 연구의 결과와 거의 유사한 것임이 확인되었다. 연구에서 이러한 곡선체적의 형상이 나타내는 결과에서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 1) 단일루프 제어계에서 p_1, p_2 의 조정계수에 의한 안정한계 곡선은 ω 의 변화에 대해 $(-1,0)$ 지점을 기점으로 하여 시계방향으로 회전하는 발산형태의 형상을 나타낸다.
- 2) p_1-p_2 에 대응하는 K_p-T_i 의 변환파라미터가 그리는 한계곡선은 식(18)과 같은 지수함수 형태로 일반화할 수 있으며 이러한 결과는 나이퀴스트 선도에 의해서 구한 결과와 동일하게 나타났다.
- 3) 안정영역이 되기 위한 최대 계인 p_{1m} 또는 K_{pm} 은 p_1-p_2 곡선에서 $p_2=0$ 일 때의 p_1 값 증양방향으로서 최소치가 된다.
- 4) p_1-p_2 및 K_p-T_i 영역 모두에서 제어대상의

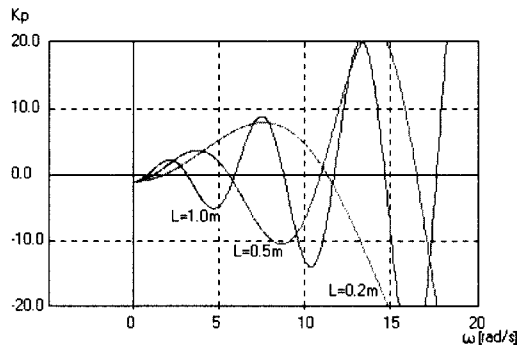


Fig. 7 K_p variation to ω with 0.2, 0.5, and 1.0 [m] of L

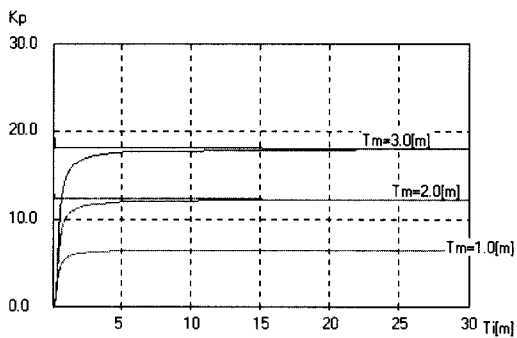


Fig. 8 K_p-T_i Curves at Stability Limit with 1.0, 2.0, and 3.0 [m] of T_m

파라미터 L 과 T_m 에 따른 안정영역의 변화가 잘 확인되며 적절한 안정도의 선택은 도시적으로 쉽게 정해질 수 있다.

참고문헌

- 1) Hidefumi Taguchi, Masateru Doi and Mitsuhiko Araki, "Optimal Parameters of Two-Degrees of Freedom PID Control Systems", SICE Trans. (Japanese), Vol.23, No.9, pp889~895, 1987
- 2) Masami Saeki and Daii Hirayama, "Parameter Space Design Method of PID Controller for Robust Sensitivity Minimization Problem", SICE Trans.(Japanese), Vol 32, No.12, pp1612~1619, 1996
- 3) Yyou Kondo, Shinji Hara and Takuji Kaneko, "Parameter Space Design for H_∞ Control", SICE Trans.(Japanese), Vol 27, No.6, pp714~716, 1990

- 4) P.J.Gawthrop ; "Self-Tuning PID Controllers- Algorithms and Implementation", IEEE Trans. Automatic Control, AC-31-3, pp201~209, 1986
- 5) T.Yamamoto, S.Omatu and H.Ishihara, "A Construction of Self-Tuning PID Control Algorithm and Its Applications", Proceedings of SICE '89, ES15-1, pp1143~1146, 1989
- 6) 최순만, "조정파라미터 공간에서의 제어계 동작점과 안정성에 관한 연구", 한국박용기관학회지, 제24권 제4호, pp470~477 (2000)

저 자 소 개



최순만(崔淳萬)

1955년 3월생, 1977년 한국해양대학교 기관공학과 졸업. 1990년 동대학원졸업(석사). 1995년 동대학원졸업(박사). 1987년-현재 한국해양수산연수원 교수, 당학회 회원