

선형행렬부등식 기법을 이용한 횡축형 자기 베어링 시스템의 로버스트 제어

김창화* · 정병건** · 양주호***

A Robust Control of Horizontal-Shaft Magnetic Bearing System Using Linear Matrix Inequality Technique

C-H Kim* · B-G Jung** · J-H Yang***

Key words : Magnetic bearing (자기베어링), Linear matrix inequality (선형 부등 행렬)
Robust control (강인성 제어), Integral type servo system (적분형 서보계)
Parameter perturbation (파라미터 변동)

Abstract

Magnetic bearing system is frequently used for high-speed rotating machines because of its frictionless property. But the magnetic bearing system needs feedback controller for stabilization. This paper presents a robust controller design by using linear matrix inequality for magnetic bearing system which shows the control performance and robust stability under the physical parameter perturbations. To the end, the validity of the designed controller is investigated through computer simulation.

1. 서 론

자기 부상계는 비접촉으로 물체를 부상시키기 때문에 마찰이나 열 등을 최소화하기 위한 고속 회전 기기나 운송 시스템 등 여러 분야에 활발히 응용되고 있다. 이 중 회전체를 무접촉으로 지지하는 자기베어링은 윤활에 대한 문제가 없고, 진공, 고온, 저온 등의 특수한 환경중에서도 사용 가능할

뿐만 아니라, 마찰, 마멸, 소음의 문제가 없거나, 있더라도 극히 적기 때문에 정밀한 중심축 유지, 초고속, 무보수 운전이 가능하다.

또한 과거의 구름베어링, 미끄럼 베어링, 공기 베어링등에서는 얻지 못했던 과도응답이나 강성 등의 특성을 제어계의 설계 사양에 따라 자유롭게 설계할 수 있다는 것이 큰 장점이다.^{1)~2)}

자기베어링은 크게 종축형과 횡축형으로 나누

* 경남정보대학 전자정보통신제어계열(원고접수일 : 2000년 9월)

** 한국해양대학교

*** 부경대학교 제어기계공학과

어 질 수 있으며, 중축형 자기베어링은 최소 1개의 전자석으로 실현 가능한 것에 대해, 본 논문의 연구 대상인 횡축형 자기 베어링은 8~10개의 전자석이 요구되어 지지반 축 반경방향의 강성을 높이고 가해진 외란에 관계없이 축 중심을 정밀히 유지할 수 있다는 특징이 있다.

이러한 자기베어링에 적용하는 흡인식 부상방식은 본질적으로 불안정한 시스템이므로, 부상체를 안정하게 유지하기 위해 안정화 제어가 필요하다³⁾. 그런데 제어기 설계를 위해 실제 시스템을 수학적으로 모델링할 경우 제어 대상의 특성을 완벽히 표현할 수 없는 경우가 많고, 수학적 모델에 대한 제어 특성이 양호하다하더라도, 실제 시스템에 대해서는 양호한 특성이 얻어지지 않은 경우가 생긴다. 따라서 제어기는 어느 정도의 모델링 오차가 있어도 양호한 제어 성능을 발휘할 수 있도록 강인성을 확보할 필요가 있다⁴⁾.

한편 제어계 설계에 있어서 수치적 최적화 기법은 오래전부터 이용되어 왔으나, 근래에 수치적 최적화 기법에 의한 제어계 설계법이 주목을 받고 있는 이유는⁵⁾ i) 제어계 설계에 있어 요구되는 설계 사양이 다양화, 다목적화, ii) 고성능 계산기와 수치계산을 위한 범용 소프트웨어 등의 보급으로 손쉽게 계산이 가능한 것, iii) 대부분의 제어계 설계 사양을 최적화 문제로 취급 가능하고, 최적화 알고리즘이 개발되어 졌다는 점 등이다. 이러한 최적화 기법 중 최근 주목을 받고 있는 제어계의 설계 방법으로 선형 행렬 부등식(LMI : Linear Matrix Inequality)을 이용한 설계법이 있다. 제어 분야에 있어 이론구조 및 실용설계의 새로운 도구로써 LMI가 주목받고 있는 주요한 이유는 우선 강인성, 성능, 안정성 등의 설계지침을 정량화 하여 LMI 조건으로 나타내는 것이 가능하고, 다음으로 수치 계산에 의해 LMI의 해를 구하는 것이 가능하다는 것 등을 들 수 있다. 또한 이 설계법의 주요한 특징은 대역적 최적해를 구하는 것이 가능하고, 다수의 설계 사양을 용이하게 취급할 수 있다는 것과 제어 대상에 있어 미리 지정된 물리 파라미터 변동에 대한 강인성도 행렬 폴리토프(Polytopic)에 의해 보장할 수 있다는 것이다.

이러한 자기베어링 시스템에 대해 자이로 효과

나 불평형 등을 고려하여 시스템 모델링을 행하고, 이에 대해 최적 레귤레이터 기법⁶⁻⁷⁾에 의한 제어기 설계나 불확실성을 고려한 제어이론을 도입한 제어기설계 관한 연구⁸⁻⁹⁾가 수행되고 있지만 기준입력에 대한 추종성이나 LMI기법에 의한 제어기 설계에 관한 연구는 미비한 상태이다.

따라서 본 논문에서는 회전체를 지지하는 횡축형 자기 베어링시스템에 선형행렬부등식 기법을 기초한 로버스트 제어계를 제안한다. 또한 시뮬레이션을 통하여 설계된 제어기의 타당성을 검토한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 자이로 효과를 고려한 자기베어링 시스템의 운동방정식과 설계 사양에 대해 서술하고, 3장에서는 선형행렬부등식에 기초한 상태 피드백 제어치를 설계하며, 4장은 설계된 제어기로 시뮬레이션을 행하고, 5장은 결론에 대해 서술한다.

2. 제어대상의 모델링 및 설계 사양

2.1 자기베어링 시스템의 모델링

본 연구에서 제어대상으로 하는 자기베어링 시스템은 Fig. 1과 같다. 이 시스템의 회전자는 강체이고, 동시에 회전축에 대해 회전대칭이라고 하면, 3차원공간에 있어서 회전자의 일반운동은 $u_x, u_y, u_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ 에 관한 다음 6개의 식으로 표현된다¹⁰⁾.

$$M(\dot{u}_x + \omega_y u_z - \omega_z u_y) = X \tag{1}$$

$$M(\dot{u}_y + \omega_z u_x - \omega_x u_z) = Y \tag{2}$$

$$M(\dot{u}_z + \omega_x u_y - \omega_y u_x) = Z \tag{3}$$

$$J_x \dot{\omega}_x = M_x \tag{4}$$

$$J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_y) \omega_z \omega_x = M_y \tag{5}$$

$$J_y \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y = M_z \tag{6}$$

여기서, M : 회전체의 전질량, $J_x : X_r$ 축 회전관성모멘트, $J_y : T_r$ 축 회전관성모멘트, X_s, T_s, Z_s : 고정자 좌표계, x_s, y_s, z_s : 고정자 좌표, X_r, Y_r, Z_r : 회전자 좌표계, x_r, y_r, z_r : 회전자 좌표, u_x, u_y, u_z : 회전자의 축방향 속도성분, X, Y, Z : 회전자에 가해지는 각 축방향 외력, M_x, M_y, M_z : 회전자 모멘트 성분, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$: 회전에 의한 롤링, 피칭, 요잉의 각속도, f_{i1}, f_{r1}, \dots : 회전자를 흡인하는 흡

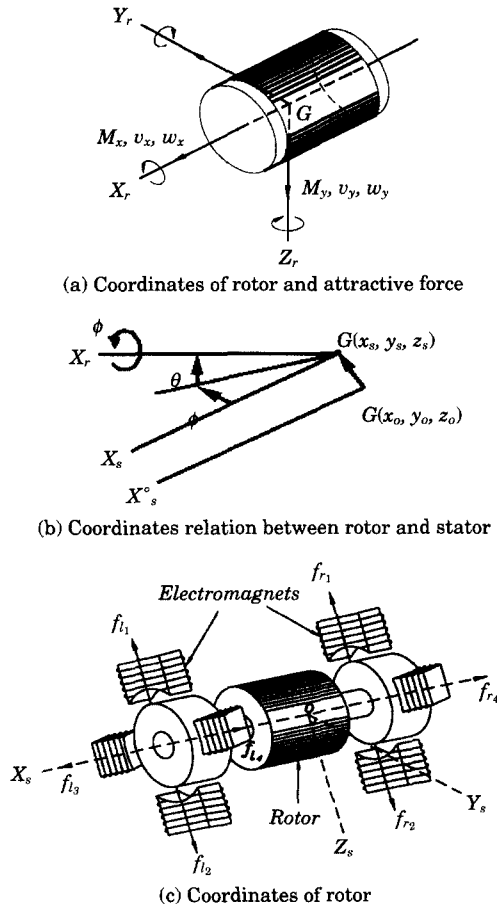


Fig. 1 Magnetic bearing system

인력, ψ : X_s 축에 대한 X_r 축의 수평면 회전각, ϕ : 축에 대한 축의 연직면 회전각, ω : 전동기의 회전에 의한 축 회전각이다.

또한 회전자에 가해지는 힘 F_x, F_y, F_z 와 토크 T_x, T_y, T_z , 는 식(7),(8)과 같다.

$$\begin{aligned} F_x &= f_{l5} - f_{r5} - \beta x_s \\ F_y &= f_{l3} - f_{l4} + f_{r3} - f_{r4} + \alpha y_s \\ F_z &= f_{l2} - f_{l1} + f_{r2} - f_{r1} + \alpha z_s + Mg \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T_x &= T_m - \rho \omega_x - T_0 \\ T_y &= (f_{l1} - f_{l2} + f_{r2} - f_{r1})l \\ T_z &= (f_{l3} - f_{l4} + f_{r4} - f_{r3})l \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 α : 전동기 회전자가 반경방향으로 편심될 때의 불평형 흡인력 계수, β : 축방향으로 편심될 때

의 복원력 계수($\alpha, \beta > 0$), T_m : 전동기의 토크, ρ : 제동 토크 계수, T_0 : 쿨롱 마찰, l : 회전자 길이이다.

평형상태에 있어 고정자와 회전자 사이의 간극을 W 라 하고, 이것으로부터 중심이 (x_s, y_s, z_s) 라 하면, 회전자 축이 만큼 경사가 있을 때, 각부의 간극의 거리 g_{l1}, g_{r1}, \dots 는

$$\begin{aligned} g_{l1} &= W + z_s - l\theta, & g_{r1} &= W + z_s + l\theta \\ g_{l2} &= W - z_s + l\theta, & g_{r2} &= W - z_s - l\theta \\ g_{l3} &= W - y_s - l\psi, & g_{r3} &= W - y_s + l\psi \\ g_{l4} &= W + y_s + l\psi, & g_{r4} &= W + y_s - l\psi \end{aligned} \quad (9)$$

로 된다. 따라서 식(1)~(9)까지에 대해 선형화된 운동방정식을 유도하기 위해 평형점 부근에서 미소변화를 고려하면 $\phi = \omega_x t$, $\omega_x = (T_m - T_0)/\rho$ 이고, $u_x, u_y, u_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \theta, \psi$ 등은 미소량이다.

다음으로, 전자석에 대한 흡인력은 (코일의 전류/간극의 길이)²에 비례하고, 8개의 전자석은 모두 같은 특성을 갖으며, 전압 전류식에서 속도 기전력은 작으므로 무시하고, 평형점 부근에서의 미소변화만을 취급하는 것으로 가정하면 자기 베어링 시스템의 전기회로 방정식과 흡인력은 식(10),(11)과 같다.

$$e_j = L(di_j/dt) + Ri_j \quad (10)$$

$$f_i = k(i_j/g_i)^2 \quad (11)$$

단, $j: l_1 \dots l_4, r_1, \dots, r_4, k$: 비례상수

또한 전자석에 있어서도 평형점에서의 미소변화를 고려해야 하므로 전류, 간극의 길이, 흡인력의 정상분을 각각 I_j, W, F_j 라 하면,

$$\begin{aligned} i_j &= I_j + i_j \\ g_j &= W + g_j \\ f_j &= F_j + f_j \end{aligned} \quad (12)$$

로 되어, 식(11)은

$$f'_j = 2F_j \{ (i'_j/I_j) - (g'_j/W) \} \quad (13)$$

로 선형화되며, 코일 전압과 전류의 변화분은

$$\begin{aligned} e'_{l2} &= -e'_{l1}, e'_{r2} = -e'_{r1}, e'_{l4} = -e'_{l3}, e'_{r4} = -e'_{r3} \\ i'_{l2} &= -i'_{l1}, i'_{r2} = -i'_{r1}, i'_{l4} = -i'_{l3}, i'_{r4} = -i'_{r3} \end{aligned} \quad (14)$$

로 된다.

식(1)~식(14)를 정리하면 횡축형 자기베어링 시스템의 상태방정식은

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ z \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ A_1 + B_1 C_2 & A_2 & B_1 C_3 \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & -(R/L)I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ z \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} \\ (1/L)I_{4 \times 4} \end{bmatrix} e \quad (15)$$

로 되며, 출력 방정식은 식(16)과 같다.

$$y = [C_{1,4 \times 4} \quad 0_{4 \times 4} \quad 0_{4 \times 4}] \begin{bmatrix} x_1 \\ z \\ i \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서 0 : 영 행렬, I : 단위 행렬

$$x_1 = [y_s, z_s, \theta, \psi]^T, z = \dot{x}_1$$

$$g_{w1} = \begin{bmatrix} g_{l1} - W \\ g_{r1} - W \\ g_{l3} - W \\ g_{r3} - W \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} a/W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a/W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_x J_x / J_y \\ 0 & 0 & \omega_y J_x / J_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/M & 1/M \\ -1/M & -1/M & 0 & 0 \\ l/J_y & -l/J_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l/J_y & -l/J_y \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -l & 0 \\ 0 & 1 & l & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -l \\ -1 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{W}(F_{l1} + F_{l2}) & \frac{2l}{W}(F_{l1} + F_{l2}) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{W}(F_{r1} + F_{r2}) & -\frac{2l}{W}(F_{r1} + F_{r2}) & 0 \\ \frac{2}{W}(F_{l3} + F_{l4}) & 0 & 0 & \frac{2l}{W}(F_{l3} + F_{l4}) \\ \frac{2}{W}(F_{r3} + F_{r4}) & 0 & 0 & -\frac{2l}{W}(F_{r3} + F_{r4}) \end{bmatrix}$$

$$C_3 = 2 \text{diag} \left[\left(\frac{F_{l1}}{I_{l1}} + \frac{F_{l2}}{I_{l2}} \right), \left(\frac{F_{r1}}{I_{r1}} + \frac{F_{r2}}{I_{r2}} \right), \left(\frac{F_{l3}}{I_{l3}} + \frac{F_{l4}}{I_{l4}} \right), \left(\frac{F_{r3}}{I_{r3}} + \frac{F_{r4}}{I_{r4}} \right) \right]$$

식(15), (16)의 상태방정식과 출력방정식은 중심

의 좌표 y_s, z_s , 회전축의 경사각 θ, ψ 와 그 미분치 및 전류 등을 상태변수로 하여 얻어졌다. 그런데 위치 센서들은 전자석 배치점에 설치하기 때문에 전자석 간극부의 회전자 변위를 상태변수로 잡는 것이 이해하기 쉽고, 또한 검출과 제어의 성능을 향상시키는 것이 가능하다. 따라서 간극 g_w 를 사용하여 새로운 상태변수를 $[g_w^T \dot{g}_w^T i^T]^T$ 로 하면 식(15)에 있는 상태변수 $[x_1^T, z^T, i^T]^T$ 와의 관계는 식(17)과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ z \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_w \\ \dot{g}_w \\ i \end{bmatrix} \quad (17)$$

따라서 평형점에서 전자석과 회전자의 간극을 상태변수로 하면 다음과 같은 횡축형 자기베어링 시스템의 상태공간 표현식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_p u \\ y &= C_p x \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, 0 : 영 행렬, I : 단위 행렬,

$$x = [g_w, \dot{g}_w, i]^T, u = [e'_{l1}, e'_{r1}, e'_{l3}, e'_{r3}]^T$$

$$y = [y_{l1}, y_{r1}, y_{l3}, y_{r3}]^T$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ C_1(A_1 + B_1 C_2)C_1^{-1} & C_1 A_2 C_1^{-1} & C_1 B_1 C_3 \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & -R/L \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} \\ I_{4 \times 4}/L \end{bmatrix}, C_p = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4}^T \\ 0_{4 \times 4}^T \\ 0_{4 \times 4}^T \end{bmatrix}^T$$

본 연구에 이용될 횡축형 자기 베어링 시스템은 마그네틱 모멘트(Magnetic Moment)사의 MBC500이며, Table 1은 이 시스템의 각 퍼라미터 값이다.

Table 1 The parameters value of MBC500 system

	Value	Unit		Value	Unit
간극[W]	0.0004	[m]	k	0.28×10^{-7}	[N-m ² /A ²]
저항[R]	2.2	[Ω]	J_y	0.000158	[kg-m ²]
인덕턴스[L]	0.022	[H]	J_x	0.000005	[kg-m ²]
$F_{r3}=F_{r4}$	0.4375	[N]	$F_{r1}=F_{l1}$	2.3143	[N]
$F_{l3}=F_{l4}$	0.4375		$F_{r2}=F_{l2}$	1.0262	
$I_{r1}=I_{l1}$	1.15	[A]	$I_{r3}=I_{r4}$	0.5	[A]
$I_{r2}=I_{l2}$	0.7658		$I_{l3}=I_{l4}$	0.5	
길이[l]	0.269	[m]	질량[M]	0.2629	[kg]

2.2 적분형 서보계의 구성

식(18)으로 표현된 공칭인 제어대상에 대하여 적분형 서보계 구성을 유도하기 위하여 우선 다음의 가정을 둔다.

(A_p, B_p) : 가안정, B_p : 열 full rank

$\begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix}$: 정칙

또한 스텝상의 기준입력에 추종하기 위해서는 내부모델의 원리에 의해 적분 요소를 포함하고 있어야 한다. 따라서 루프내에 적분기를 도입하기 위해 기준입력 $r(t)$ 와 출력 $y(t)$ 의 차를 오차 $e(t)$ 라고 하고 이를 적분한 것을 $v(t)$ 라 하면, 이는 식(19)과 같이 된다.

$$\dot{v}(t) \triangleq e(t) = r(t) - y(t) \tag{19}$$

따라서 식(18)과 식(19)으로 구성된 확대계의 상태공간 방정식은 식(20)으로 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{v}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{20.a}$$

$$y(t) = [C_p \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \tag{20.b}$$

이러한 확대계에 대한 제어칙은 식(21)과 같다.

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t) \tag{21}$$

이상의 식(20), (21)에 대한 적분형 서보계의 블록선도는 Fig. 2와 같다¹¹⁾.

식(18)의 시스템에 스텝입력이 가해져 일정시간이 지난 후 상태 및 제어입력을 $x(t)_\infty, u(t)_\infty$ 라 하면, 식(18)은 식(22)로 된다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t)_\infty \\ u(t)_\infty \end{bmatrix} \tag{22}$$

또한 상태변수, 제어입력 및 적분기의 정상상태 값

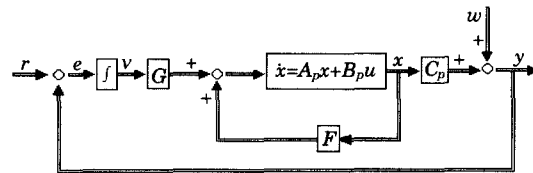


Fig. 2 Integral type servo system

을 $x_\infty, u_\infty, v_\infty$ 라 하고, 정상상태 값과의 오차를

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &\triangleq x(t) - x_\infty \\ \hat{v}(t) &\triangleq v(t) - v_\infty \\ \hat{u}(t) &\triangleq u(t) - u_\infty \end{aligned} \tag{23}$$

로 하면, 이 시스템에 대한 확대 편차계의 상태공간 표현은 식(24)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \tilde{A}_p \hat{x}(t) + \tilde{B}_p \hat{u}(t) \\ e(t) &= \tilde{C}_p \hat{x}(t) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\text{여기서, } \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_p = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_p = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_p = [-C_p \ 0]$$

따라서 Fig. 2로 표현된 적분형 서보계에 대한 상태피드백 제어칙은 식(25)와 같다.

$$\hat{u}(t) = K\hat{x} = [F \ G] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \tag{25}$$

2.3 설계 사양

(가) 물리 퍼라미터의 변동

시스템을 표현하는 식(18)에 있어, 시스템 행렬 A_p, B_p, C_p 계수의 변동을 퍼라미터의 변동으로 생각한다. 이때, 계수행렬을 행렬 폴리토프의 형태로 표현하면, 퍼라미터 변동에 대한 제어계의 강인성은 보증된다. 본 논문에서는 회전자의 회전수 변화 P, 저항 R 및 부상체 질량 M의 변동을

$$P_{\min} \leq P \leq P_{\max}, \quad R_{\min} \leq R \leq R_{\max}, \quad M_{\min} \leq M \leq M_{\max} \tag{26}$$

로 생각하며, 이에 대한 값은 Table 2와 같다.

(나) H_∞ 의 노음 조건

Fig. 2에서 있어서, 외란 w 를 부가하고, 제어칙 (25)를 식(24)에 대입하여 정리하면

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\tilde{A}_p + \tilde{B}_p K) \hat{x}(t) + \tilde{B}_w w(t)$$

Table 2 The value of parameters variation

	P[rpm]	R[Ω]	M[kg]
Min.	0	1.43	0.14454
Max.	10,000	2.97	0.38106

$$y(t) = \tilde{C}_p \tilde{x}(t) + \tilde{D}_w w(t) \quad (27)$$

단, $\tilde{B}_w = [0_{8 \times 4}^T - I_{4 \times 4}^T]^T$, $\tilde{D}_w = I_{4 \times 4}$
로 된다. 따라서 Fig. 2에 있어 w 로부터 y 까지의 전달함수행렬 G_{yw} 에 대해서 $\|G_{yw}\|_\infty < \gamma$ 를 만족하고, 출력측에서 외란의 영향을 저감화하는 것을 목적으로 한다.

3. LMI에 의한 제어기 설계

2.3절의 물리 퍼라미터 변동들이

$$q_i^- \leq q_i(t) \leq q_i^+, i=1 \dots r \quad (28)$$

과 같이 표현되면, 식(18)의 횡축형 자기베어링 시스템의 상태공간 행렬은

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \tilde{A}_i, & \tilde{B}_p &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \tilde{B}_i \\ \tilde{C}_p &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \tilde{C}_i, & \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 1, \alpha \geq 0 \\ i &= 1 \dots k, k=2' \end{aligned} \quad (29)$$

와 같이 표현된다. 여기서 $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$ 는 단점행렬이고, 식(29)로 나타내어지는 집합을 행렬 폴리토프라 부른다⁹⁾. 식(29)에 있어 단점행렬 $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$ 는 식(30)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= A_0 + \sum_{i=0}^r q_i A_i \mid q_i = q_i^+ \text{ or } q_i^- \\ \tilde{B}_i &= B_0 + \sum_{i=0}^r q_i B_i \mid q_i = q_i^+ \text{ or } q_i^- \\ \tilde{C}_i &= C_0 + \sum_{i=0}^r q_i C_i \mid q_i = q_i^+ \text{ or } q_i^- \\ i &= 1 \dots 2' \end{aligned} \quad (30)$$

따라서 2.3절 (가) 설계사양은 식(30)으로 표현가능하며, (나)의 설계사양인 H_∞ 노음조건은 아래의 유계실 정리를 이용하여 LMI로 변환할 수 있다.

유계실 정리 : 상기의 전달함수 $G(s)$ 와 어떤 γ 가 주어진다고 할 때, 다음의 명제는 등가이다^{12~13)}.

- (i) A가 안정인 동시에 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$
- (ii) $\|D\| < \gamma$ 이고, 리카치 부등식 $AX + XA^T + BB^T + M < 0$

단, $M = (XC^T + BD^T)(\gamma I - DD^T)^{-1}(XC^T + BD^T)^T$ 을 만족하는 정정 대칭행렬 $X > 0$ 가 존재한다.

$$(iii) \text{ 선형행렬부등식 } \begin{pmatrix} AX + XA^T & B & XC^T \\ B^T & -\gamma I & D^T \\ CX & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0$$

을 만족하는 정정 대칭행렬 $X > 0$ 가 존재한다. 따라서 변수변환법을 위의 유계실 정리에 적용하면, 설계사양을 만족하는 상태 피드백 제어칙은 다음의 정리로 표현된다.

정리 : 식(27) 시스템에 대하여 페루프계가 안정하고, w 에서 y 까지의 전달함수행렬 G_{yw} 에 대해서 $\|G_{yw}\|_\infty < \gamma$ 를 만족시키는 상태 피드백 제어칙 K 가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$\begin{pmatrix} M(X, Y) & \tilde{B}_w & X \tilde{C}_p^T \\ \tilde{B}_w^T & -\gamma I & \tilde{D}_w^T \\ \tilde{C}_p X & \tilde{D}_w & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (31)$$

$$\text{단, } M(X, Y) = \tilde{A}_p X + X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y + Y^T \tilde{B}_p^T$$

가 성립하도록 정정 대칭행렬 X 와 변수 Y 가 존재하는 것이다. 이때 상태 피드백 제어칙 K 는 식(32)와 같다.

$$K = YX^{-1} \quad (32)$$

2.3절의 설계사양을 만족하는 상태피드백 제어칙을 구하는 것은 LMI의 식(31)을 만족하는 공통의 해가 존재하는 것을 의미하고 있으며, 변수변환법에 의해 구해진 해 X, Y 를 이용하여 사양을 만족하는 상태 피드백 제어칙 K 를 구할 수 있다. 자기베어링시스템에 이상의 내용을 적용하여 설계한 상태 피드백 제어칙은 다음과 같다¹⁴⁾. 이때 식(31)에 사용된 값은 3.7이다.

$$K = [F \ G]$$

여기서, $F = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4]^T$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 4.3389 \times 10^6 \\ 3.6151 \times 10^6 \\ 1.9172 \times 10^6 \\ 1.9149 \times 10^6 \\ 1.2472 \times 10^4 \\ 1.1297 \times 10^4 \\ 1.1007 \times 10^4 \\ 1.1020 \times 10^4 \\ -1.3301 \times 10^3 \\ -1.1831 \times 10^3 \\ -1.0001 \times 10^3 \\ -1.0013 \times 10^3 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 3.6151 \times 10^6 \\ 4.3389 \times 10^6 \\ 1.9149 \times 10^6 \\ 1.9172 \times 10^6 \\ 1.1297 \times 10^4 \\ 1.2472 \times 10^4 \\ 1.1020 \times 10^4 \\ 1.1007 \times 10^4 \\ -1.1831 \times 10^3 \\ -1.3301 \times 10^3 \\ -1.0013 \times 10^3 \\ -1.0001 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -3.8932 \times 10^6 \\ -3.8924 \times 10^6 \\ -1.7688 \times 10^6 \\ -1.9816 \times 10^6 \\ -1.1629 \times 10^4 \\ -1.1639 \times 10^4 \\ -1.0444 \times 10^4 \\ -1.1114 \times 10^4 \\ 1.2294 \times 10^3 \\ 1.2305 \times 10^3 \\ 9.3771 \times 10^2 \\ 1.0210 \times 10^3 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} -3.8924 \times 10^6 \\ -3.8932 \times 10^6 \\ -1.9816 \times 10^6 \\ -1.7688 \times 10^6 \\ -1.1629 \times 10^4 \\ -1.1114 \times 10^4 \\ -1.0444 \times 10^4 \\ -1.1114 \times 10^4 \\ 1.2305 \times 10^3 \\ 1.2294 \times 10^3 \\ 1.0210 \times 10^3 \\ 9.3771 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -1.9135 \times 10^6 & -8.0210 \times 10^6 & -1.0494 \times 10^7 & -1.0494 \times 10^7 \\ 8.0210 \times 10^6 & -1.9135 \times 10^6 & -1.0317 \times 10^7 & -1.0494 \times 10^7 \\ -2.9300 \times 10^6 & -3.0362 \times 10^6 & 7.5329 \times 10^6 & 1.2838 \times 10^7 \\ -3.0362 \times 10^6 & -2.9300 \times 10^6 & 1.2838 \times 10^7 & 7.5329 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

4. 시뮬레이션 및 고찰

시스템의 안정성을 알아보기 위해 3장에서 설계한 제어칙을 이용하여 각 단점행렬에 대한 페루프 시스템의 극점 위치를 보인 것이 Fig. 3이다. 이 그림에서 시스템의 물리 퍼라미터 변동에 대해서도 모든 극점이 좌반면에 존재하고 있으므로 제어계가 안정함을 알 수 있다.

또한 Fig. 2에서 입력 w 에서 출력 y 까지의 전달 함수를 감도함수 $S(s)$, 입력 r 에서 제어대상의 출력 y 까지의 전달 함수를 상보감도함수 $T(s)$ 라 하면, $S(s)$ 및 $T(s)$ 는

$$S(s) = [I + N(s)D(s)^{-1}s^{-1}]^{-1} \tag{33}$$

$$T(s) = S(s)N(s)D(s)^{-1}s^{-1} \tag{34}$$

단, $N(s)D(s)^{-1} \triangleq C_p(sI - A_1)^{-1}B_1$

$$A_1 = A_p + B_pF, \quad B_1 = B_pG$$

로 표현되며, 감도함수와 상보감도함수는

$$T(s) + S(s) = I \tag{35}$$

의 관계가 있다. Fig. 4는 식(30)으로 표현된 각 단점들에 대해 r_1 에서 y_1 까지의 $T_{r_1 \rightarrow y_1}$ 와 w_1 에서 y_1 까지의 $S_{w_1 \rightarrow y_1}$ 을 나타낸 보드선도이다. 이 그림으로부터 $T_{r_1 \rightarrow y_1}$ 과 $S_{w_1 \rightarrow y_1}$ 에 대해 H_∞ 노옴의 설계 사양과 식(35)이 만족되고 있음을 알 수 있다.

다음으로 3장에서 설계된 상태 피드백 제어칙을 가지고 Fig. 2와 같은 제어계를 구성하여 시뮬레이

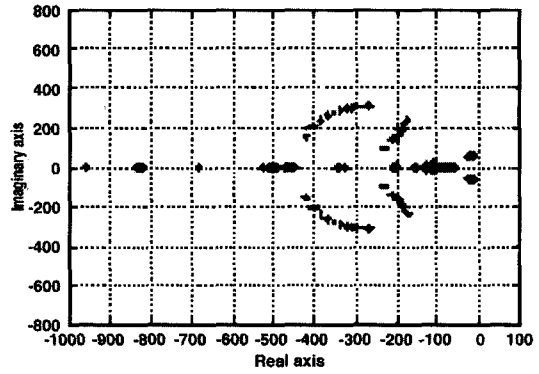


Fig. 3 The poles of closed loop system

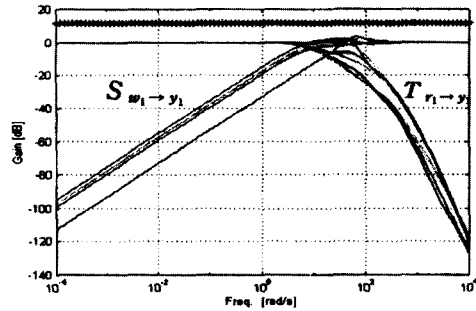


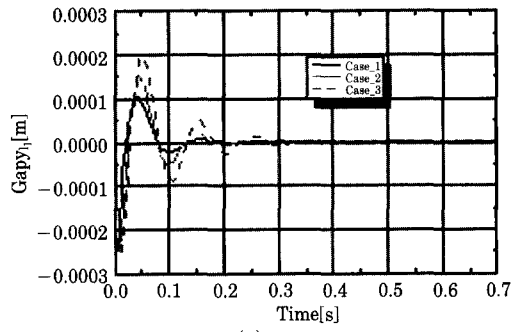
Fig. 4 The plot of $S_{w_1 \rightarrow y_1}(s)$ and $T_{r_1 \rightarrow y_1}(s)$

Table 3 The value of physical parameters at case_1~case_3

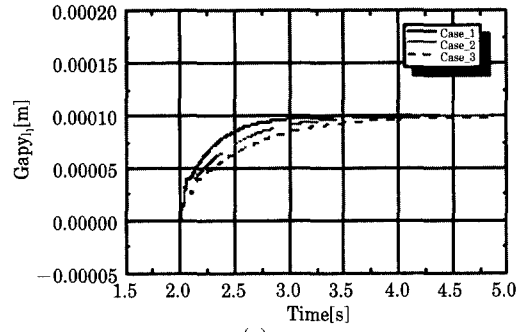
	P[rpm]	R[Ω]	M[kg]
Case_1	0.0	1.43	0.1445
Case_2	5,000	2.20	0.2629
Case_3	10,000	2.97	0.3810

션을 수행하였다. 시뮬레이션은 초기위치에 대한 부상응답, 부상 2[s]후 기준위치의 변경에 따른 추종응답, 그리고 출력측에 계단상 외란을 가할 때의 응답등에 대하여 행하였으며, 시뮬레이션 결과는 Fig.5~Fig.7과 같다. 또한 Case_1~Case_3에 있어 물리 퍼라미터의 값은 다음과 같다.

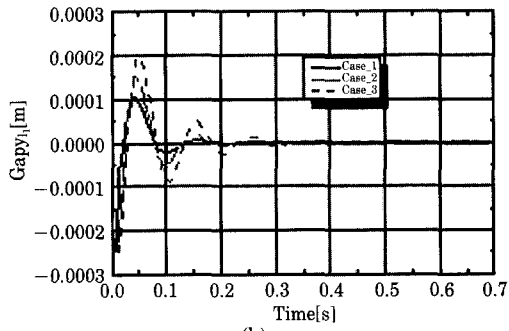
Fig.5는 초기치가 0.25[mm]에 대한 응답으로서 모두가 0.5[s] 이내로 안정하게 부상하고 있음을 알 수 있다. Fig. 6은 기준위치를 수직방향으로 0.1[mm] 변경하였을 때 시뮬레이션 결과이다. 이 실험에서도 모든 물리퍼라미터 변동에 대해서도



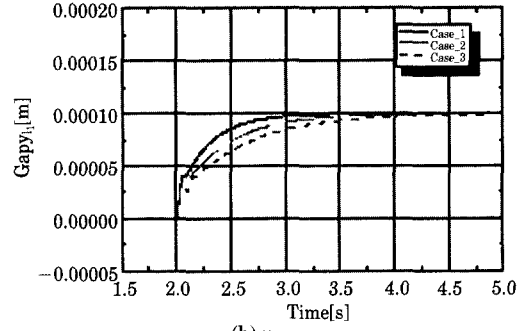
(a) y_{l_1}



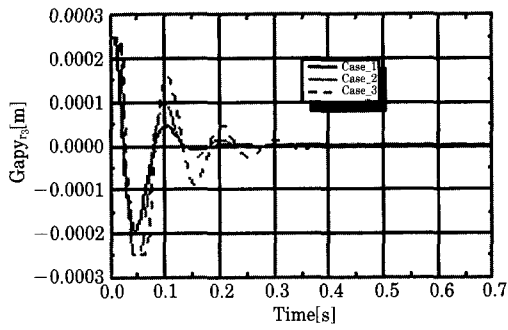
(a) y_{l_1}



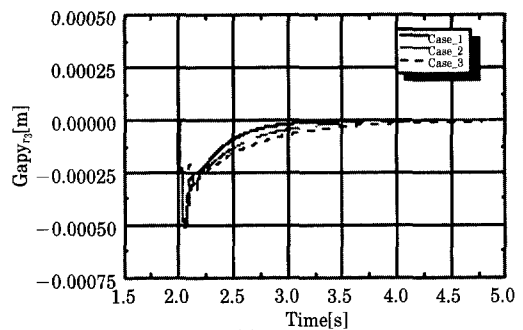
(b) y_{r_1}



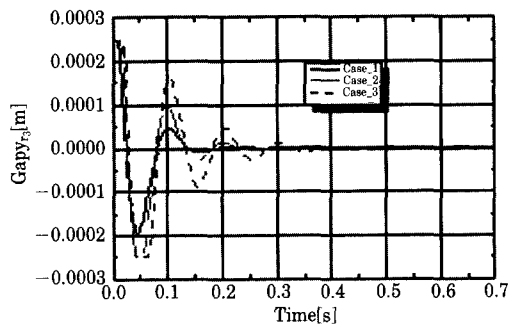
(b) y_{r_1}



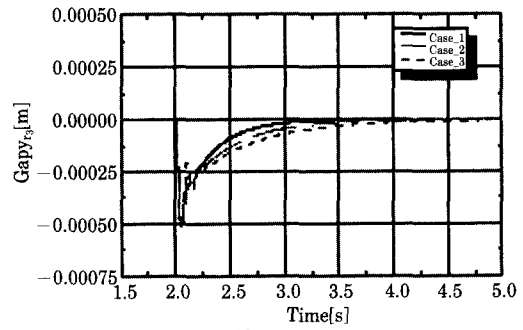
(c) y_{l_3}



(c) y_{l_3}



(d) y_{r_3}



(d) y_{r_3}

Fig. 5 Response to the initial reference

Fig. 6 Step response

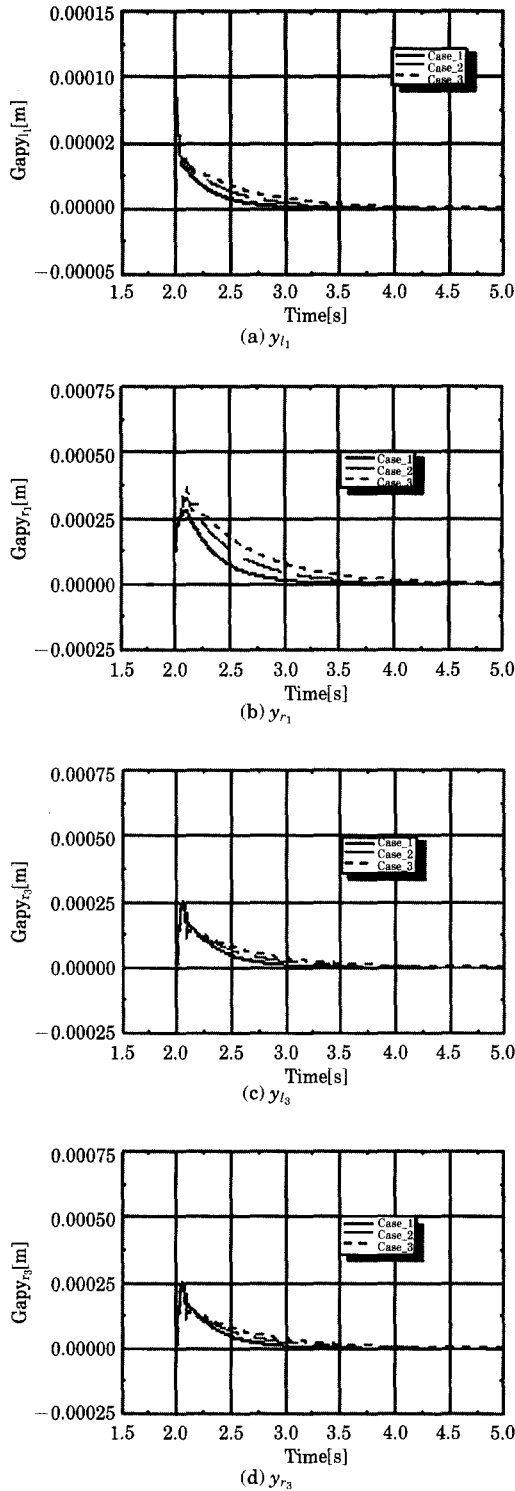


Fig. 7 Disturbance response

오차없이 추종하고 있으므로 1형 서보제어 기능을 발휘하고 있으며, 변동량이 적은 경우가 정상상태에 빨리 도달하고 있음을 알 수 있다. Fig.7은 출력측 y_{i_1} 에 외란을 가했을 때 시뮬레이션 결과이다. 이때 외란은 출력측에 스텝적으로 가하였으며, 그 크기는 0.1[mm]이다. 이 실험에서도 1.5[s] 후 외란의 영향이 모두 제거되는 것을 볼 수 있고, 외란이 영향이 다른 출력에도 영향을 주고 있지만 모두 제거되어 강한 외란제거성능 갖고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 자기 베어링 시스템에 대해 최근에 주목받고 있는 수치적 최적화 기법의 하나인 선형 행렬부등식을 이용하여 상태 피드백 제어치를 설계하고, 시뮬레이션을 통하여 그 타당성을 조사하였다. 구성된 제어시스템은 물리 파라미터 변동 및 외란에 대해서도 강인함을 보여주고 있으며, 기준위치 변경에 대해서도 오차없이 추종하고 있음을 보여주었다. 물리 파라미터 변동에 대한 강인성과 H_∞ 제어사양 이외에 향후 지정된 영역에 극을 배치하여 복잡한 설계사양을 만족하는 제어치를 구하는 것과 실제 실험장치를 통한 검증은 계속할 예정이다.

참고문헌

- [1] 電氣學會, “磁氣浮上と磁氣軸受”, コロナ社, pp.6~36, 1993
- [2] 清水, 谷口, “磁氣軸受の原理と應用”, 機械の研究, Vol.22, pp.1620, 昭45-12.
- [3] 野波, “磁氣浮上磁氣軸受制御の現況と制御理論”, 計測と制御, Vol.32.4, pp.301, 1993
- [4] 김창화 외1명, “LMI를 이용한 자기 베어링 시스템의 강인성 제어”, 한국자동제어학술대회, pp. D-436~D-439, 1999
- [5] 小原, 松江, “最適化を用いた制御系設計”, 日本システム/制御/情報學會, Vol.38, No.3, pp. 138~146, 1994
- [6] 野波, “5自由度 制御形磁氣軸受制御系の研究 -ジャイロ効果による相互干渉のある系の最適レギュ

レータの構成”, 計測自動制御學會論文集, Vol.20.12, pp.1095~1101, 1984

- [7] Johnson, R.G., D.Pang, J.Kirk and D.Anand, “Physical Modelling of High Speed Magnetic Bearing System”, *Proc. of the 3th Int. Symp. on Magnetic Bearing*, pp.474~482, 1992
- [8] K. Nonami. et al, “Robust Control of Magnetic Bearing System using Constantly Scaled Control”, *Proc. of the Sixth Int. Symp. on Magnetic Bearing*, pp.713~722, 1998
- [9] M. Matsumura. et al., “Application of Gain Scheduled Robust Controllers to Magnetic Bearing”, *IEEE Trans. on Control System Technology*, Vol.4, No.5, pp. 484~493, 1996
- [10] Holt Ashley, *Engineering analysis of flight vehicles*, Dover Inc., 1974.
- [11] 池田, “2自由度積分形最適サーボ系の構成”, 計測自動制御學會論文集, Vol.27, No.8, pp. 907~914. 1991
- [12] P. Gahinet and P. Apkarian. “A linear matrix inequality approach to control”. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol.4, pp.421~448, 1994
- [13] T. Iwasaki and R. E. Skelton. “All controllers for the general control problem : LMI existence conditions and state space formulas”. *Automatica*, Vol.30, No.8, pp. 1307~1317, 1994.
- [14] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI control toolbox*, The Math Works Inc., 1994.

저 자 소 개



김창화(金昌和)

1965년 12월생, 1991년 부산수산대학교 기관공학과 졸업, 1993년 부경대학교 대학원 제어기계공학과 졸업(석사), 1997년 부경대학교 대학원 제어기계공학과 졸업(박사), 1997년~현재 경남정보대학 전자정보통신제어계열 조교수, 당학회 회원



정병건(鄭柄健)

1959년 9월생, 1981년 한국해양대학교 기관공학과 졸업, 1981.3~1988.1 한진해운(주) 근무, 1990년 한국해양대학교 대학원 기관공학과 졸업(석사), 1993년 부경대학교 대학원 수료(박사), 1992.3~현재 한국해양대학교 선박전자기계공학부 부교수, 당학회 회원



양주호(梁注鎔)

1953년 10월생, 1977년2월 부산수산대학교 졸업, 1980년 2월 부산수산대학교 대학원 졸업(석사), 1988년 2월 한국해양대학교 대학원 졸업(박사), 1980년 3월~1988년 2월 경남전문대학 교수, 1988년 3월~현재 부경대학교 제어기계공학과 교수, 당학회 회원