韓國水資源學會論文集
第34卷 第5號 · 2001年 10月
pp. 499~509

입자의 이산확률분포 모형을 이용한 자연하천의 2차원 이송-확산

Modeling of 2-D Advection-Diffusion in Natural Streams Using Particle Discrete Probability Distribution Model

김 영 도* / 서 일 원**
Kim, Young-Do / Seo, Il Won

Abstract

2-D transport model based on a discrete probability distribution for a particle displacement was developed to solve advection-diffusion problems in natural stream. In this proposed model, the probabilities expressed as an average and variance function were used to predict the mass transfer between cells in one time step. The proposed model produces solutions without numerical dispersion for constant velocity, diffusion coefficient, and cross-sectional area. When the stability and positivity restrictions were satisfied, the model produced excellent results compared to analytical solutions and other finite difference methods. The proposed model is tested against the dispersion data collected in the Grand River, Canada. The simulation results show that the proposed model can properly describe the two-dimensional mixing phenomena in the natural stream.

keywords : discrete probability distribution, particle displacement, advection-diffusion, numerical dispersion, stability condition.

요 지

자연하천에서의 이송-확산 과정의 모의를 위하여 입자위치의 이산확률분포에 기초한 2차원 수송 모형을 개발하였다. 제안된 모형에서는 단위 시간간격동안 격자간의 질량이송을 예측하기 위하여 평균과 분산의 함수로 나타내어진 확률분포를 사용하였다. 개발된 모형은 유속, 확산계수, 단면적이 일정한 단순영역에 대하여 수치확산이 없는 해를 구하였고, 양의 확률을 만족시키는 안정조건이 성립한다면, 해석해와 다른 유한차분법과 비교하였을 때, 좋은 결과를 나타내었다. 본 모형의 현장적용성을 검토하기 위하여 캐나다에 위치한 Grand River를 대상으로 얻은 수치실험 결과를 정상상태의 색소실험 결과와 비교하였다. 그 결과로서 본 모형은 자연하천에서의 2차원 이송-확산을 잘 모의할 수 있는 것으로 나타났다.

핵심용어 : 이산확률분포, 입자위치, 이송-확산, 수치확산, 안정조건

* 서울대학교 지구환경시스템공학부 박사과정
Graduate Student, School of Civil, Urban, Geosystems Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea. (E-mail: greendo@chollian.net)
** 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수
Associate Professor, School of Civil, Urban, Geosystems Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea. (E mail: seoilwon@plaza.snu.ac.kr)

1. 서 론

하폭이 넓은 대규모 하천이나, 연직 혼합이 잘 이루어진 수심이 낮은 호수나 연안해역의 오염물질의 거동은 2차원 이송-확산 방정식을 이용하여 해석한다. 이송-확산 방정식에 대한 수치 모형으로서 Eulerian 방법, Lagrangian 방법, Eulerian-Lagrangian 방법, 입자추적(particle tracking) 방법 등을 이용하여 왔다. Eulerian 방법은 고정된 격자에서 이송과정과 확산과정을 동시에 계산하므로 이송과정을 나타내는 쌍곡선 특성을 제대로 반영하지 못하여, 이송이 지배적인 경우에는 수치진동(numerical oscillation)과 수치확산(numerical dispersion)이 발생한다(서승원, 1993; 이종섭과 김호진, 1995; Chapra, 1997). Lagrangian 방법은 이러한 이송항의 수치적인 문제점을 해결하기 위하여 흐름방향으로 이동하는 좌표축을 이용하는 것으로서, 이 방법은 유속장이 급격히 변화하거나 복잡한 지형에서는 격자를 형성하기가 어렵고 과도한 수치오차를 발생시킨다(서일원과 김대근, 1994; Dimou, 1992). Eulerian-Lagrangian 방법은 고정된 격자에서 확산항을 처리하고 이송항은 Lagrangian 방법으로 처리하여 결합하는 형태를 취하고 있다. 이 방법은 질량 보존의 문제와 계산 비용이 큰 것이 단점으로 지적되고 있다(Oliveira와 Baptista, 1995). 입자추적 방법은 연속성을 가진 오염물질의 이송-확산 과정을 미소질량을 갖는 이산적인 입자의 독립적이고 불규칙한 운동으로 계산하며, 급격한 농도 경사를 처리할 수 있고 계산격자가 불필요하나, 하구에서의 염분 수송과 같은 대규모의 이송-확산 과정에 적합하지 않고, 농도를 표현하기 위해서 많은 입자를 필요로 하기 때문에 계산 비용이 큰 것이 단점이다(Hcemink, 1990; Boogaard 등, 1993).

Costa와 Ferreira(2000)는 유한차분 모형의 수치오차와 입자추적 모형의 계산 비용을 해결할 수 있는 방법으로 입자위치의 이산확률분포 개념을 제안하였다. 이산확률분포 개념은 이송-확산 방정식을 차분화하지 않기 때문에 기존의 유한차분 모형과 다르고, 개별적인 입자위치를 추적하지 않기 때문에 전형적인 입자추적 모형과도 다르다. 본 논문에서는 이러한 이산확률분포 개념과 편단법(fractional step method)을 이용하여 2차원 이산확률분포 모형을 개발하였다. 2차원 이산확률분포 모형에서는 이송-확산과정을 개별적인 입자 위치의 평균과 분산으로부터 계산하였다. 모형의 검증을 위하여 단순영역에 적용하여 해석해와 비교하였으며, 대표적인 Eulerian 방법과 Eulerian-Lagrangian 방법을 이용한 유한차분 모형의 결과와도 비교·검토하였다. 또한 실제 하천에의 적용성 여부를 조사하기 위하여 캐나다에 위치한 Grand River에서의 실측자료와 비교하였고, 동일한 지역을 대상으로 한 기존 연구자들(서일원과 김대근, 1995; 서일원과 정태성, 1999)의 결과와도 비교·분석하였다.

2. 이론적 배경

확률통계학적인 관점에서 오염물질의 이송-확산 과정은 개별 오염물질 입자의 독립적이고 불규칙한 이동으로 가정할 수 있으며(Alonso, 1981), 이송은 평균유속에 의한 입자의 움직임을 묘사하고, 확산은 통계학적인 결과를 나타낸다. 그림 1의 1차원 좌표축에서 i번째 격자에 위치한 입자는 이송과 확산으로 인해 다음 시간 단계에서는 주변의 격자로 이동하거나 현재의 격자에 남게 된다.

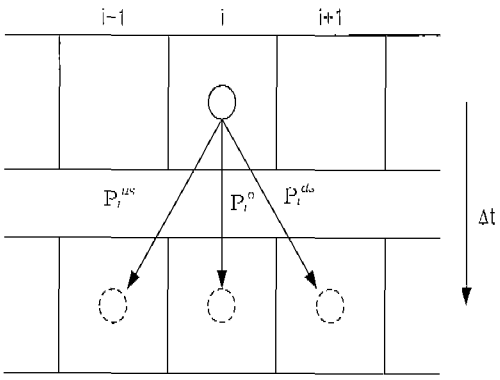

그림 1. 일정한 시간간격(Δt) 후의 입자위치 (1차원)

i번째 격자에 위치한 입자가 x방향으로 $-\Delta x$만큼 이동할 확률을 $P_i(-1)$, $+\Delta x$만큼 이동할 확률을 $P_i(+1)$, 원래의 위치에 그대로 머물게 될 확률을 $P_i(0)$로 나타내면, Δt시간 이후의 입자가 x지점에 위치할 확률, $p(x, t+\Delta t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(x, t+\Delta t) = P(+1)p(x-\Delta x, t) + P(0)\,p(x, t) + P(-1)\,p(x+\Delta x, t) \quad (1)$$

여기서, $p(x, t)$ 는 시간 t에서 입자가 x에 위치할

확률이다. 식 (1)을 Δx에 관하여 Taylor 정리를 이용하여 확장하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&p(x, t+\Delta t) = \\
&[P_i(+1) + P_i(0) + P_i(-1)]p(x, t) \\
&+ [P_i(-1) - P_i(+1)]\Delta x \frac{\partial p}{\partial x} \\
&+ [P_i(-1) + P_i(+1)]\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + O[(\Delta x)^3]
\end{aligned} \tag{2}
$$

여기서, 이산분포를 가정한 입자의 위치는 $X = -1,0,1$인 경우에 대한 이산확률에 의해 결정되고, 통계학적 개념으로부터 3개의 확률의 합은 1이 된다.

$$P_i(-1) + P_i(0) + P_i(+1) = 1 \tag{3}$$

식 (2)에 식 (3)를 대입하여 정리하고 Δt에 관하여 Taylor 급수확장하면, 식 (4)을 유도할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} = &[P_i(-1) - P_i(+1)]\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial p}{\partial x} \\
&+ [P_i(-1) + P_i(+1)]\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\
&+ O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^3]
\end{aligned} \tag{4}
$$

여기서, 이산분포의 입자위치, X의 평균($E_i(X)$)과 분산($V_i(X)$)은 통계적 매개변수로서 이산확률분포의 정의에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_i(X) = -P_i(-1) + P_i(+1) \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
V_i(X) &= E_i(X^2) - [E_i(X)]^2 \\
&= P_i(-1) + P_i(+1) - [-P_i(-1) + P_i(+1)]^2
\end{aligned} \tag{6}
$$

식 (3)과 (5)~(6)으로부터 $P_i(-1)$, $P_i(0)$, $P_i(+1)$를 E_i와 V_i로 나타내면 다음과 같다.

$$P_i(-1) = \frac{1}{2}(V_i + E_i^2 - E_i) \tag{7}$$

$$P_i(0) = 1 - V_i - E_i^2 \tag{8}$$

$$P_i(+1) = \frac{1}{2}(V_i + E_i^2 + E_i) \tag{9}$$

따라서, 식 (4)는 다음과 같이 입자위치에 대한 확률 $p(x, t)$ 의 이송-확산방정식 형태로 유도될 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(E_i\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\frac{\partial p}{\partial x} = \left[(V_i + E_i^2)\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\right]\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{10}$$

3. 모형의 개발

이송과 확산 과정은 입자 위치의 평균(E_i)과 분산(V_i)으로 정의될 수 있으며, 각각의 과정은 독립적이기 때문에 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E_i = E_i^a + E_i^d \tag{11}$$

$$V_i = V_i^a + V_i^d \tag{12}$$

여기서, E_i^a와 V_i^a는 i번째 격자에서 이송된 입자의 평균과 분산을 나타내고, E_i^d와 V_i^d는 i번째 격자에서 확산된 입자의 평균과 분산을 나타낸다.

통계학적 매개변수인 E_i^a, E_i^d, V_i^a, V_i^d는 각각 개별적으로 계산할 수 있으며, 이송에 의한 입자의 평균은 속도(U_i)와 시간 간격(Δt)으로 계산할 수 있고, 이송과정은 결정론적이기 때문에 분산은 0이다.

$$E_i^a = \frac{U_i\Delta t}{\Delta x} \tag{13}$$

$$V_i^a = 0 \tag{14}$$

또한, 확산에 의한 입자의 평균과 분산은 확산 속도의 개념을 적용하여, 다음과 같은 이산확률을 적용하여 계산할 수 있다.

$$P_i^d(-1) = \frac{1}{2}\frac{A_iD + A_{i-1}D}{A_i\Delta x}\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{15}$$

$$P_i^d(+1) = \frac{1}{2}\frac{A_iD + A_{i+1}D}{A_i\Delta x}\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{16}$$

여기서, D는 확산계수이고, A_i는 격자 i의 단면적이다. 이 확률은 확산에 의한 입자의 평균과 분산에 사용된다.

$$
\begin{aligned}
E_i^d &= -P_i^d(-1) + P_i^d(+1) \\
&= \left[\frac{A_{i+1}D - A_{i-1}D}{2A_i\Delta x}\right]\frac{\Delta l}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$V_i^d = E_i^d(x^2) - [E_i^d(x)]^2$$
$$= \left[\frac{A_{i+1}D + 2A_iD + A_{i-1}D}{2A_i\Delta x}\right]\frac{\Delta t}{\Delta x} - \left\{\left[\frac{A_{i+1}D - A_{i-1}D}{2A_i\Delta x}\right]\frac{\Delta t}{\Delta x}\right\}^2 \quad (18)$$

전체 평균과 분산은 각각 식 (13)와 (17)의 합, 식 (14)과 (18)의 합으로 구할 수 있다.

$$E_i(x) = \left[\frac{A_{i+1}D - A_{i-1}D}{2A_i\Delta x} + u\right]\frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (19)$$

$$V_i(x) = \left[\frac{A_{i+1}D + 2A_iD + A_{i-1}D}{2A_i\Delta x}\right]\frac{\Delta t}{\Delta x} - \left\{\left[\frac{A_{i+1}D - A_{i-1}D}{2A_i\Delta x}\right]\frac{\Delta t}{\Delta x}\right\}^2 \quad (20)$$

식 (19)~(20)을 식 (7)~(9)에 대입하여 확률을 구하면,

$$P_i(-1) = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{i+1}D + 2A_iD + A_{i-1}D}{2A_i} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{A_{i+1}D - A_{i-1}D}{A_i}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(\frac{u_i\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{2}\right) + \frac{u_i\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{u_i\Delta t}{\Delta x} - 1\right)\right] \quad (21)$$

$$P_i(0) = 1 - \left[\frac{A_{i+1}D + 2A_iD + A_{i-1}D}{2A_i} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{A_{i+1}D - A_{i-1}D}{A_i}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\frac{u_i\Delta t}{\Delta x} + \left(\frac{u_i\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right] \quad (22)$$

$$P_i(+1) = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{i+1}D + 2A_iD + A_{i-1}D}{2A_i} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{A_{i+1}D - A_{i-1}D}{A_i}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(\frac{u_i\Delta t}{\Delta x} + \frac{1}{2}\right) + \frac{u_i\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{u_i\Delta t}{\Delta x} + 1\right)\right] \quad (23)$$

이러한 확률이 같은 격자내의 입자에 적용될 수 있고, 격자내의 질량은 모든 입자의 합임을 고려한다면 이웃한 격자들 사이에서의 질량 이동에 본 확률을 사용하는 것은 가능하다. 예를 들어 i번째 격자에서 i+1번째 격자로 이동한 질량은 현재 시간의 확률 $P_i(-1)$로 계산할 수 있고, 격자내에 그대로 남아 있는 질량은 확률 $P_i(0)$로 산출할 수 있다. 따라서, 다음 시간단계의 질량 M_i^{n+1}은 아래 식으로 계산할 수 있다.

$$M_i^{n+1} = P_{i-1}(+1)\, M_{i-1}^n + P_i(0)\, M_i^n + P_{i+1}(-1)\, M_{i+1}^n \quad (24)$$

여기서, M은 질량, 윗첨자 n은 기지의 시간단계, $n+1$은 미지의 시간단계를 나타낸다. Δx가 일정하다면, 식 (24)은 농도에 대한 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_i^{n+1} = P_{i-1}(+1)\frac{A_{i-1}^n}{A_i^{n+1}}C_{i-1}^n + P_i(0)\frac{A_i^n}{A_i^{n+1}}C_i^n + P_{i+1}(-1)\frac{A_{i+1}^n}{A_i^{n+1}}C_{i+1}^n \quad (25)$$

여기서, C_i^n는 격자 i에서 기지의 농도이다.

그림 2에 나타낸 바와 같이 x방향의 확률에 의한 농도전송 후, y방향에 대한 전송을 수행하는 편단법

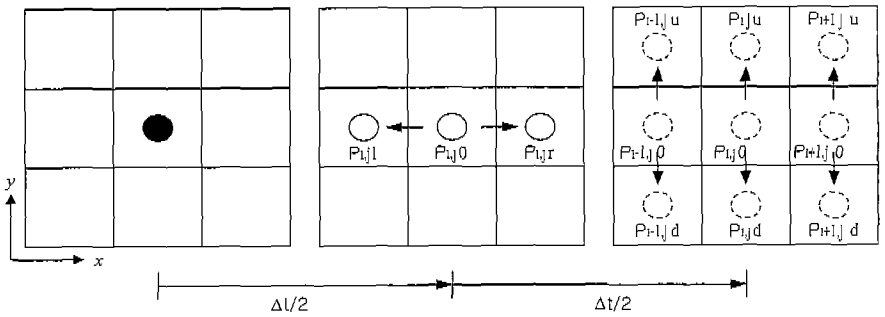

그림 2. 일정한 시간간격(Δt) 후의 입자위치 (2차원)

(fractional step method)을 사용하여 유도된 2차원 이송-확산 모형의 지배방정식은 식 (26)~(33)과 같다.

x 방향 :

$$C_{i,j}^{n+1/2} = P_{i-1,j}^{r} \frac{A_{i-1,j}^{n}}{A_{i,j}^{n+1}} C_{i-1,j}^{n} + P_{i+1,j}^{l} \frac{A_{i+1,j}^{n}}{A_{i,j}^{n+1}} C_{i+1,j}^{n} + P_{i,j}^{0} \frac{A_{i,j}^{n}}{A_{i,j}^{n+1}} C_{i,j}^{n} \tag{26}$$

$$P_{i,j}^{l} = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{i+1,j}D + 2A_{i,j}D + A_{i-1,j}D}{2A_{i,j}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{A_{i+1,j}D - A_{i-1,j}D}{A_{i,j}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{u_{i,j}\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{2} \right) + \frac{u_{i,j}\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{i,j}\Delta t}{\Delta x} - 1 \right) \right] \tag{27}$$

$$P_{i,j}^{r} = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{i+1,j}D + 2A_{i,j}D + A_{i-1,j}D}{2A_{i,j}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{A_{i+1,j}D - A_{i-1,j}D}{A_{i,j}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{u_{i,j}\Delta t}{\Delta x} + \frac{1}{2} \right) + \frac{u_{i,j}\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{i,j}\Delta t}{\Delta x} + 1 \right) \right] \tag{28}$$

$$\left(\frac{u_{i,j}\Delta t}{\Delta x} + \frac{1}{2} \right) P_{i,j}^{0} = 1 - \left[P_{i,j}^{l} + P_{i,j}^{r} \right] \tag{29}$$

y 방향 :

$$C_{i,j}^{n+1} = P_{i,j-1}^{u} \frac{A_{i,j-1}^{n}}{A_{i,j}^{n+1}} C_{i,j-1}^{n+1/2} + P_{i,j+1}^{d} \frac{A_{i,j+1}^{n}}{A_{i,j}^{n+1}} C_{i,j+1}^{n+1/2} + P_{i,j}^{0} \frac{A_{i,j}^{n}}{A_{i,j}^{n+1}} C_{i,j}^{n+1/2} \tag{30}$$

$$P_{i,j}^{d} = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{i,j+1}D + 2A_{i,j}D + A_{i,j-1}D}{2A_{i,j}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{A_{i,j+1}D - A_{i,j-1}D}{A_{i,j}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{v_{i,j}\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{2} \right) + \frac{v_{i,j}\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{v_{i,j}\Delta t}{\Delta x} - 1 \right) \right] \tag{31}$$

$$P_{i,j}^{u} = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{i,j+1}D + 2A_{i,j}D + A_{i,j-1}D}{2A_{i,j}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{A_{i,j+1}D - A_{i,j-1}D}{A_{i,j}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{v_{i,j}\Delta t}{\Delta x} + \frac{1}{2} \right) + \frac{v_{i,j}\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{v_{i,j}\Delta t}{\Delta x} + 1 \right) \right] \tag{32}$$

$$P_{i,j}^{0} = 1 - (P_{i,j}^{u} + P_{i,j}^{d}) \tag{33}$$

여기서, $P_{i,j}^{l}$은 입자가 왼쪽 격자로 이동할 확률, $P_{i,j}^{r}$은 입자가 오른쪽 격자로 이동할 확률, $P_{i,j}^{u}$은 입자가 위쪽 격자로 이동할 확률, $P_{i,j}^{d}$은 입자가 아래쪽 격자로 이동할 확률, $P_{i,j}^{0}$은 입자가 원 격자에 남아있을 확률이다. $C_{i,j}^{n+1/2}$는 x방향 진송 후 농도이고, $C_{i,j}^{n+1}$는 y방향까지 전송된 후의 농도이다.

4. 모형의 검증

표 1에 나타낸 바와 같이, P_e 수의 변화에 따른 해의 거동을 고찰하기 위하여 1차원 영역과 2차원 영역에서 동일한 유속조건에서 확산 계수가 5 m^2/s, 50m^2/s인 경우에 대하여 수치실험을 수행하였다. $x=0$ 인 지점에서 식 (34)와 같은 초기조건을 갖는 오염물질을 부여했을 때, 임의의 시간 t에서의 농도에 관한 해석해는 식 (35)와 같다(Fischer et al., 1979).

$$C(x,0) = M\delta(x) \tag{34}$$

$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4Dt} \right] \tag{35}$$

여기서, M은 단위면적당 부하된 오염물질의 질량 (kg/m^2), t_0는 오염물질 부하시 시간, t는 오염물질 부하 후 현재까지의 시간이다. 마찬가지 방법으로 $x=0$, $y=0$ 인 지점에서 식 (36)과 같은 초기조건을 갖는 오염물질의 임의의 시간 t에서의 농도분포에 관한 해석해는 식 (37)과 같다.

$$C(x,y,0) = M'\delta(x)\delta(y) \tag{36}$$

$$C(x,y,t) = \frac{M'}{4\pi Dt} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2 + (y-vt)^2}{4Dt} \right] \tag{37}$$

표 1. 모형 검증을 위한 수치실험 조건

Case	1 Dimension		2 Dimension	
	1A	1B	2A	2B
Δx	200 m	200 m	200 m	200 m
Δt	100 sec	100 sec	100 sec	100 sec
Total Cells	300	300	300×300	300×300
Flow Velocity	0.5 m/s	0.5 m/s	u, v = 0.5 m/s	u, v = 0.5 m/s
Diffusion Coefficient	5 m²/s	50 m/s	5 m²/s	50 m/s
Initial Concentration	M = 793 kg/m t0 = 10000 sec	M = 2507 kg/m t0 = 10000 sec	M = 628318 kg/m t0 = 10000 sec	M = 6283184 kg/m t0 = 10000 sec
Δx_{max}	20 m	200 m	20 m	200 m
Δy_{max}	-	-	20 m	200 m
Δt_{max}	24.7 sec	247.2 sec	24.7 sec	247.2 sec

여기서, M 은 단위길이당 부하된 오염물질의 질량(kg/m)이다. 수치모형에서는 t_0의 시간에서의 농도분포를 초기조건으로 하여 모의를 수행하여 식 (35)과 식 (37)의 해석해와 비교하였다. 또한 동일한 조건에서 Eulerian 모형과 Eulerian-Lagrangian 모형을 적용하여, 본 모형의 결과와 비교하였다. Eulerian 모형에서는 풍상차분법(upwind method)을 이용하였고, Eulerian-Lagrangian 모형에서는 연산자 분리기법(split operator method)과 Hermite 보간다항식을 이용하였다(서일원과 김대근, 1994).

표 1의 1A는 이송이 지배적인 경우이고, 1B는 확산이 지배적인 경우이다. 이송이 지배적인 경우는 그림 3에서보는 바와 같이 본 모형의 결과는 약간의 진동이 발생하고 전체적인 상도 해석해와 차이를 보이고 있는 것으로 나타났다. 이에 반해, 그림 4에 도시한 확산이 지배적인 경우에 대해서는 해석해와 거의 일치하는 것으로 나타났다. 본 모형에 대한 안정조건은 3개의 이산분포 확률이 0과 1사이라는 조건을 통해 Δx 와 Δt 의 연립부등식을 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다(Costa와 Ferreira, 2000).

$$\Delta x \le \frac{a_i D}{u_i} \tag{38}$$

$$\Delta t \le \frac{\Delta x(0.5 b_i D - \sqrt{0.25 b_i^2 D^2 + 4 c_i u_i D \Delta x + 4 u_i^2 \Delta x^2})}{2 u_i(-c_i D - u_i \Delta x)} \tag{39}$$

여기서,

$$a_i = \frac{A_i + A_{i-1}}{A_i} \tag{40}$$

$$b_i = \frac{A_{i+1} + 2A_i + A_{i-1}}{A_i} \tag{41}$$

$$c_i = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{A_i} \tag{42}$$

단면적이 일정한 경우에는 $a_i = 2$이 되어 식 (38)의 안정조건은 $P_e \le 2$과 같은 형태가 된다. 1A의 경우는 시간간격과 격자간격이 안정성 조건을 만족하지 않기 때문에 그림 3에서 보는 바와 같이 해석해와 차이를 보이지만, 1B는 안정성 조건을 만족하기 때문에 그림 4과 같은 결과를 보이고 있다.

모형의 2차원에 대한 검증(표 1의 2A, 2B)을 해석해와 비교 검토하였다. 1차원 검증과 마찬가지로 2A는 안정성 조건을 만족하지 않는 경우이고, 2B는 만족하는 경우이다. 그 결과는 그림 5와 6에 나타내었다. 2차원 검증의 결과도 1차원 검증의 결과와 같은 현상을 나타내는 것을 확인할 수 있다. 안정성 조건을 만족하지 않는 2A는 진동이 발생하고 상의 차이를 발견할 수 있지만, 만족하는 경우는 해석해와 거의 일치하는 것을 볼 수 있다.

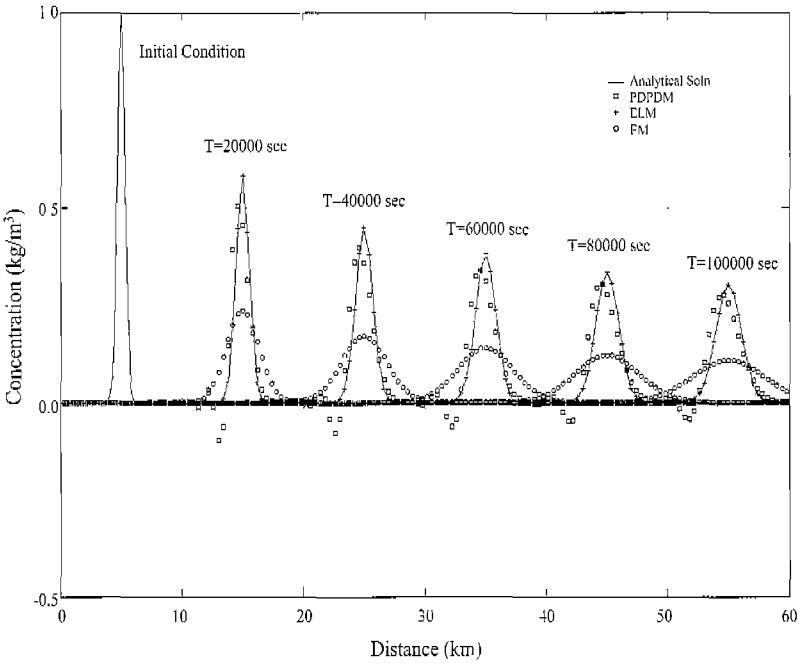

그림 3. 모의시간에 따른 농도분포 비교 (Case 1A)

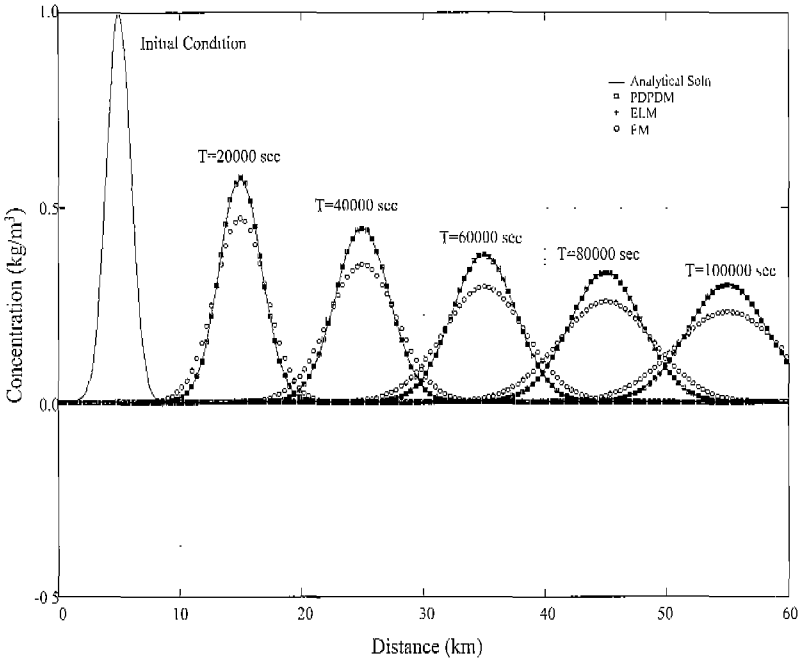

그림 4. 모의시간에 따른 농도분포 비교 (Case 1B)

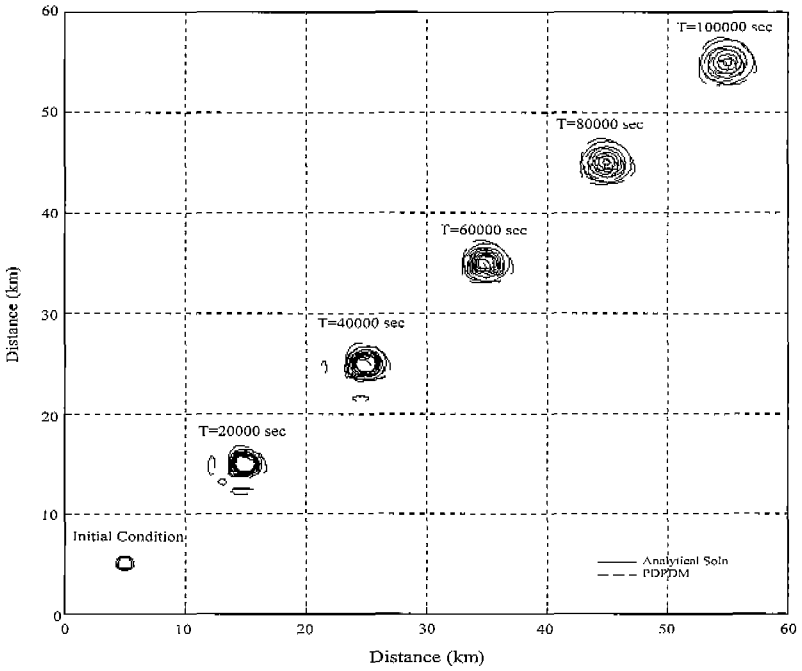

그림 5. 모의시간에 따른 농도분포 (Case 2A)

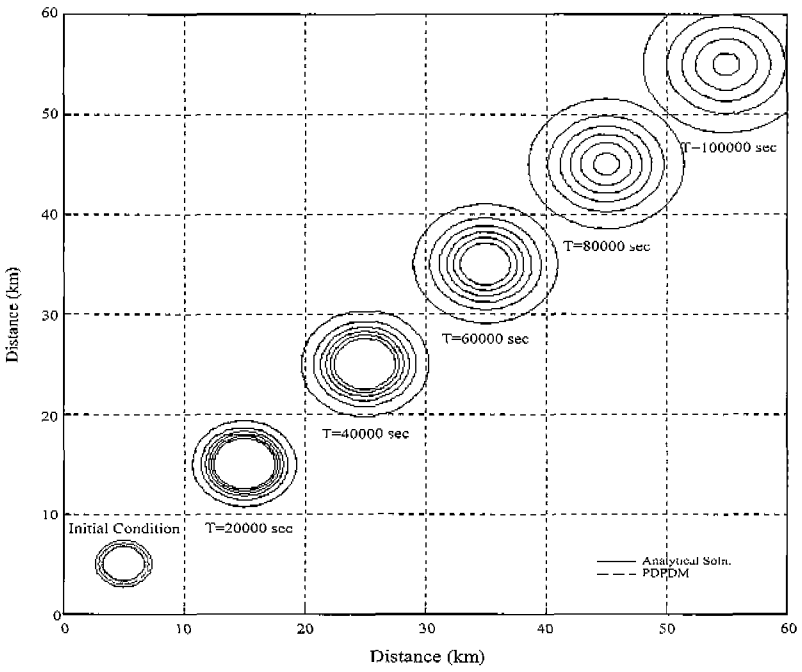

그림 6. 모의시간에 따른 농도분포 (Case 2B)

5. 모형의 적용

자연하천에서의 적용성을 검토하기 위하여 Lau와 Krishnappan(1981)이 캐나다의 Grand River(그림 7)에서 측정한 확산실험 자료를 이용하였다. 적용구간은 길이가 약 1,200 m, 사행도는 약 1.1, 곡률반경은 약 400 m, 하폭이 약 50m 정도인 소하천으로서, 횡확산이 작아 오염물의 확산거동은 2차원적인 양상을 나타낸다(서일원과 정태성, 1999). 실험시 평균유량은 10.4 m3/s였으며, 색소는 우안의 한 지점에서 연속적으로 투입되었고, 6개 단면에서 농도의 횡분포자료를 수집하였다. 각 단면의 수리량 및 분산자료는 표 2와 같으며, 여기서 D_x는 다음과 같이 계산되었다.

$$D_x = 5.93 dU_* \tag{43}$$

여기서, d는 수심, U_*는 마찰속도를 나타낸다. 횡확산 계수는 Lau와 Krishnappan(1981) 이 제시한 값을 이용하였다. 격자크기는 안정조건($\Delta x \leq 0.26$m, $\Delta t \leq 0.23$ sec)을 만족시키기 위하여 $\Delta x = \Delta y = 0.2$m를 사용하였으며, 시간간격은 $\Delta t = 0.2$을 이용하였으며, 초기조건으로는 단면 1의 농도분포를 이용하였다. 또한 평균유속이 각 단면의 측선에 직각방향으로 작용한다고 가정하여, 측선의 기울기를 이용하여 종방향 유속과 횡방향 유속을 분리하여 각 단면의 2차원 유속으로 사용하였다(서일원과 정태성, 1999).

본 모형의 계산결과를 2차원 유관확산 모형을 이용한 서일원과 김대근(1995)의 연구와 Random-Walk 입자추적 모형을 이용한 서일원과 정태성(1999)의 연구와 비교하였다. 그림 8은 각 단면에서의 계산결과를 이들의 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 만곡부인 단면 5와 단면 6의 경우, 서일원과 정태성(1999)의 결과와 마

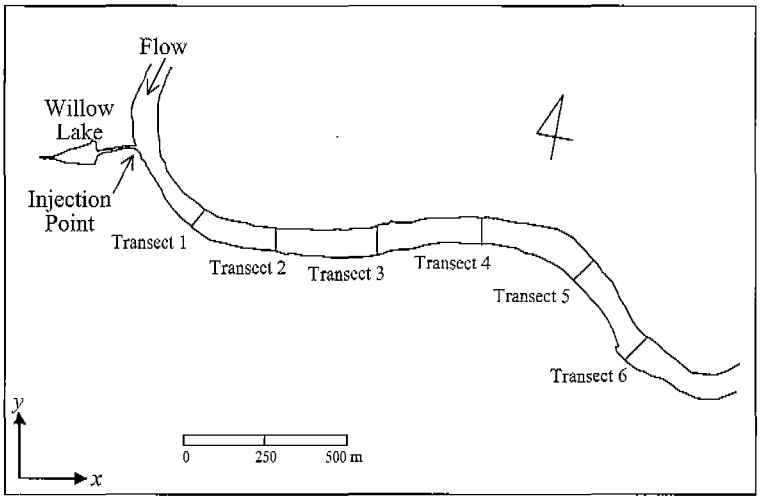

그림 7. Grand River의 하천형상 및 모형 좌표축

표 2. Grand River의 수리량 및 확산계수

단면	하폭 (m)	수심 (m)	평균유속 (m/s)	2차원 유속(m/s)		마찰속도 (m/s)	확산계수(m^2/s)	
				U	V		Dx	Dy
1	49.0	0.47	0.46	0.32	-0.32	0.067		
2	60.0	0.57	0.29	0.29	0.00	0.074	0.25	0.015
3	60.0	0.42	0.42	0.42	0.00	0.063	0.16	0.012
4	55.7	0.28	0.70	0.70	0.00	0.052	0.09	0.007
5	57.0	0.65	0.29	0.29	0.18	0.079	0.30	0.007
6	79.5	0.55	0.23	0.17	-0.17	0.072	0.23	0.013

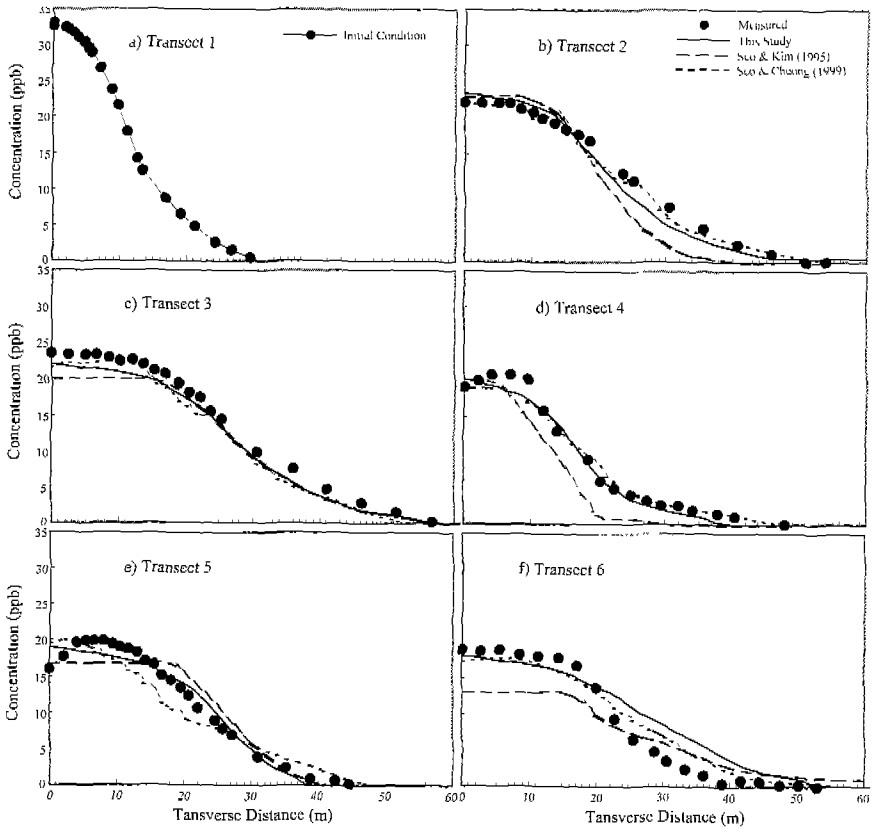

그림 8. 각 단면에서의 농도분포 비교

한가지로 실측치와 약간의 오차가 발생하고 있는 데, 이것은 종확산 계수와 횡확산 계수를 적용함에 있어서 주흐름 방향을 x방향으로 가정함에 있어서 단면 5에서 단면 6의 구간에서는 주흐름 방향이 사행하므로 이에 기인하는 것으로 판단된다. 김영도 등(2000)은 이를 해결하기 위하여 입자추적 모형의 경우 지배방정식의 좌표변환을 통한 방법을 제시한 바 있다.

6. 결 론

자연하천의 이송·확산과정을 해석하기 위하여 입자의 이산확률분포 개념을 도입하여 2차원 수송모형을 개발하였다. 본 모형을 해석해가 존재하는 단순한 문제에 적용하여 검증하였고, Eulerian 모형과 Eulerian-Lagrangian 모형과도 비교·검토한 결과, 안정조건을 만족하는 경우에는 우수한 거동을 보여주었다. 본 모형의 현장적용성을 검토하기 위하여 캐나다에 위치한 Grand River에서 수행된 정상상태의 색소실험 결과와 본 모형의 결과를 비교하였다. 그 결과 본 모형은 자연하천에서의 2차원 이송-확산을 잘 모의할 수 있은 것으로 나타났다. 본 모형에서 이용한 이산확률분포 개념은 유한차분모형과 입자추적모형의 단점을 해결할 수 있는 새로운 개념의 접근방법이다. 그러나, 확률의 양의 조건으로 인한 안정조건으로 인하여 유속에 비해 확산계수가 작은 구간에서는 작은 격자크기를 필요로 하며, 실제 하천에의 적용에 있어서는 좌표변환 기법의 도입이 향후 추가적으로 연구되어야 할 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구의 일부는 서울대학교 공학연구소의 지원에 의한 것으로서 이에 감사드립니다. 또한 하천자료와 모형결과를 제공해 주신 UC Davis의 정태성 박사에게도 감사의 뜻을 전합니다.

참 고 문 헌

김영도, 강시환, 서일원, 오병철 (2000). "3차원 입자추적 모형에 의한 수중방류 하수의 이송·확산 예측." 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제 20권, 제 6-B호, pp. 843-852.

서승원 (1993). "2차원 Eulerian-Lagrangian 모형을 이용한 연안해역의 확산해석." 한국해안·해양공학회지, 한국해안·해양공학회, 제 5권, 제 3호, pp. 173-181.

서일원, 김대근 (1994). "Eulerian-Lagrangian 방법을 이용한 1차원 종확산방정식의 수치모형." 한국수문학회지, 한국수문학회, 제 27권, 제 2호, pp. 155-166.

서일원, 김대근 (1995). "자연하천에서 오염물질의 횡확산에 관한 수치모형." 한국수자원학회논문집, 한국수자원학회, 제 28권, 제 5호, pp. 151-162.

서일원, 정태성 (1999). "2차원 Random-Walk 모형을 이용한 자연하천의 횡확산 해석." 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제 32권, 제 1호, pp. 61-70.

이정규, 김주영 (2000). "2차원 이송-확산방정식의 수치모형." 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제 20권, 제 3-B호, pp. 351-360.

이종섭, 김호진 (1995). "Random Walk 모형에 의한 확산해의 민감도 분석." 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제 15권, 제 5호, pp. 1267 1277.

Alonso, C. V. (1981). "Stochastic models of suspended-sediment dispersion." *Journal of Hydraulic Division*, ASCE, Vol. 107, No. HY6, pp. 733-757.

Boogaard, H., M., Hoogkamer, and A. Heemink, (1993). "Parameter identification in particle models." *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, Vol. 7, pp. 109-130.

Chapra, S. (1997). Surface water quality modeling. McGraw-Hill International Editions, New York.

Costa. M. and Ferreira, J. S. (2000). "Discrete particle distribution model for advection-diffsiontrans port." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 126, No. 7, pp. 525-532.

Dimou, K. (1992). *3-D hybrid Eulerian-Lagrangian / particle tracking model for simulating mass transport in coastal water bodies*. Ph.D. dis sertation, Department of Civil and Environmental Engineering, MIT.

Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C. Y., Imberger, J., and Brooks, N. H. (1979). *Mixing in inland and coastal waters*. *Academic Press*, New York.

Heemink, A. (1990). "Stochastic modelling of dispersion in shallow water." *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, Vol. 4, pp. 161-174.

Lau, Y. L. and Krishnappan, B. G. (1981). "Modeling transverse mixing in natural streams." *Journal of Hydraulic Division*, ASCE, Vol. 107, No. HY2, pp. 209-226.

Oliverira, A. and Baptista, A. M. (1995). "A comparison of integration and interpolation Eulerian Lagrangian methods." *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 21, No. 3, pp. 183-204.

(논문번호:01-035/접수:2000.04.18/심사완료:2001.07.26)