

파랑 및 지진하중을 받는 스틸자켓의 동적해석 I : 선형 및 비선형 유한요소 정식화

Dynamic Analysis of Steel Jackets under Wave and Earthquake Loadings I : Linear and Non-linear F.E. Formulation

김 문 영* 백 인 열** 고 진 석***
Kim, Moon Young Paik, In Yeol Ko, Jin Seok

국문요약

파랑하중 및 지진하중을 받는 스틸자켓 해양구조물의 기하학적 비선형성을 고려한 정적 및 동적해석을 위한 주처리 및 전/후처리 프로그램을 개발하고 이를 이용한 해석결과를 제시한다. 본 논문에서는 스틸자켓을 기하학적 비선형성을 고려한 공간뼈대구조로 모델링하며, 유체 동하중은 선형파이론과 Stokes 5차이론에 의하여 구해진 파의 속도와 가속도를 이용하여 Morison 방정식에 근거한 파력을 계산한다. JONSWAP 스펙트럼을 이용하여 특정 유효파고의 크기에 따라 불규칙파를 생성하며, 지진하중은 인공지진 가속도 프로그램(SIMQKE)을 이용하여 목표응답스펙트럼에 맞는 다양한 형태의 인공지진 가속도를 이용하여 동적해석법을 제시한다. 선형 동적 해석을 위하여 직접 적분법과 모드 중첩법을 사용하며, 비선형 동적해석시에는 직접 적분법을 적용한다. 또한, 스틸자켓의 극한거동을 추적하기 위하여 뼈대구조의 소성변형 해석법을 적용한다. 연계논문⁽¹⁾에서는 전/후처리 프로그램의 내용을 설명하고 해양환경하중을 받는 스틸자켓의 정적 및 동적해석 결과를 제시한다.

주요어 : 파력, 지진하중, 스틸자켓, 소성변형, 기하학적 비선형해석, 해양구조물

ABSTRACT

The purpose of this study is to develop the main program and pre/post processor for the geometric and plastic non-linear analysis of steel jacket structures subjected to wave and earthquake loadings. In this paper, steel jackets are modelled using geometric non-linear space frames and wave loadings are evaluated based on Morrison equation using the linear Airy theory and the fifth Stokes theory. Random wave is generated using JONSWAP spectrum. For earthquake analysis, dynamic analysis is performed using artificial earthquake time history. Also the plastic hinge method is presented for limit analysis of steel jacket. In the companion paper⁽¹⁾, the pre/post processor is developed and the numerical examples are presented for linear and non-linear dynamic analysis of steel jackets.

Key words : wave force, earthquake, steel jacket, plastic hinge, geometric non-linear analysis, offshore structure

1. 서 론

해양구조물이란 해양개발을 위하여 해양에 설치된 구조물을 말하며, 실제 예는 세계 도처에 건설된 천해 및 심해의 해저 석유 및 천연가스 개발용 구조물에서 찾을 수 있다. 이와 같은 해양구조물의 출현은 육상에 부존되어 있는 지하자원의 고갈에서 비롯되었다. 즉, 현대 문명사회의 지속적인 발전을 위해서는 천연자원의 확보가 무엇보다 중요한데, 육상자원이 점차부족해 짐에 따라 새로운 자원을 확보하려는 노력의 일환으로 해저 부존자원을 개발하게 되었다. 특히 석유수출국이 한 때 석유공급을 정치적 무기로 이용함에 따라 해저자원개발은 단순한 경제적 요인뿐만 아닌 정치적 요인으로 작용하고 있다. 해양 자원개발은 점차적으로 심해에까지 확장되고 있으며, 이에따라 해양구조물의 목적에 따른 형태와 기능은 특수화, 고도화되고 있다. 이러한 해양구조물의 설계 기술은 해양학, 기초공학, 구조공학, 조선공학, 해양토목공학등의 다양한 연구 분야를 종합적으로 필요로 한다.

우리나라는 1974년 주요 해양구조물의 하나인 해저 석유 시추선을 처음으로 건조수출하였으며 그후 비약적인 발전으로 대형 석유시추선 및 대형 해양구조물등을 건조, 국제적인 해양구조물 생산국이 되었다. 그러나 고도의 설계기술과 특수 기술분야의 일부분은 선진국에 비해 크게 뒤떨어졌으며 기술선진국들의 자국 기술보호장벽에 부딪쳐, 자체적으로 기술, 학문등을 연구발전시켜 나아가야 하는 어려움에 처해 있다. 해양구조물의 설계기술은 종합적인 것으로 해상에 설치된 상태에서 받게 되는 작용하중에 대한 규명과 그 작용하중에 대한 구조물의 응답연구 및 제작에서 마지막 사용목적 달성시 까지의 운송 및 설치 전과정에서 야기되는 운용 조건에 대한 규명등을 포함하는 다양성을 가진 복합기술이라 하겠다. 우리나라의 경우 해양구조물의 제작기술은 과거 수십년간의 경험과 노력으로 높은 수준이라 할 수 있으나 제작사업 일변도의 산업구조로 인해 다양하고 복잡한 설계 기술은 미흡하다고 할 수 있다.

깊은 수심의 해양 환경에 접해 있는 고정식 해양 구조물을 설계할 때, 구조물의 동적거동해석은 설계 과정에서 가장 중요한 요소중의 하나이다. 그리고, 지반운동, 파랑, 조류 및 풍하중 등이 작용하는 구조시스템의 동하중이나 동적응답 및 응력등을 실제적으로 구현하기 위해서는 광범위한 이론

* 정회원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수(대표저자 : kmye@yurim.skku.ac.kr)

** 정회원 · 경원대학교 토목환경공학과 조교수

*** (주)해인 이사

본 논문에 대한 토의를 2001년 12월 31일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2001. 2. 21 / 심사종료일 : 2001. 5. 28)

적 해석을 수행되어야 한다. 또한, 이들 구조물은 불규칙한 해양 상태에서 유체와 구조물의 상호작용, 기반과 구조물의 상호작용 등과 같은 복잡한 거동을 보이므로, 설계자는 이러한 문제들을 해결하기 위하여 동적문제에 대한 깊은 인식을 가져야 한다.

수행하는 작업에 따라 여러 종류의 해양 구조물이 있다. 그들 중에는 작은 관부재들로 구성된 자켓식 플랫폼, 콘크리트 중력식 플랫폼, 반 잠수식, 그리고 인장각식 플랫폼 등이 있다. 유체 동하중과 결과 응답을 예측하기 위하여 파장과 비교한 해양 구조물의 규격 또는 그 형식에 따라 다른 방법들이 도입된다. 해양구조물에 작용하는 유체동하중을 계산하기 위한 기존의 방법들에는 Morison 방정식, 이차원 diffraction theory, 그리고 삼차원 diffraction theory 등이 있다. 이들 중에서 삼차원 diffraction theory에 근거한 방법은 주로 대규모 부재로 이루어진 구조물에 대하여 사용되어 왔다. 만약 구조물이 작은 부재들로 구성되었다면, Morison 방정식을 이용한 strip approach가 설계와 구조해석에 주로 사용되었다. 실린더에 작용하는 파력에 대한 이론적, 실험적 연구는 크게 독립부재인 수평 또는 수직 실린더에 대한 연구로 나누어진다. Morison⁽²⁾은 실린더에 작용하는 단위 길이당 하중을 얻기 위하여 전체 하중을 관성력과 항력 등 두가지 흐름 영역으로 구별될 수 있음을 제시하였다. 원형 실린더에 대한 파력은 MacCamy⁽³⁾에 의해 선형화된 파에 대하여 정확한 수학적 해가 처음으로 계산되었다. Chakrabarti⁽⁴⁾는 엄밀해의 형식으로 회절 이론을 포함하여, 수직 실린더에 대한 비선형 파력을 얻었고, 실험결과와 비교하였다. 임의의 방향으로 기울어진 작은 직경의 잠수 또는 반잠수 실린더에 적용할 수 있는 파력의 일반식이 Chakrabarti⁽⁵⁾에 의해 제시되었다. Lighthill⁽⁶⁾은 파력 계산을 위해 적용되는 방법들에 따른 기본적인 물리적 현상을 요약하였다. 수직 실린더에 작용하는 파력에 대하여 자유 수면의 고도, 동적수두, 그리고 이차항의 속도포텐셜등에 의한 비선형 영향들이 Demirbilek와 Gaston⁽⁷⁾에 의해 조사되었다. Lighthill⁽⁶⁾은 유체동하중은 와류흐름과 포텐셜 흐름력으로 분류하는 점의 타당성을 확인하는데 중요한 개념을 개발하였고, 포텐셜흐름력의 2차항의 중요한 역할을 명확히 확인하였다. Koterayam과 Nakamura⁽⁹⁾은 규칙파속에서 요동치는 실린더에 작용하는 파력을 측정하여 Morison 방정식으로 계산된 파력과 비교하였다.

한편, 공간뺀대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석에 관한 연구들은 대체로 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하거나 안정함수(stability function)를 이용하여 강도행렬을 유도하는 직선보 요소와 등매개 형상함수를 사용하여 강도행렬을 산정할 때 가우스 수치적분법을 적용하는 곡선보 요소로 요약할 수 있다.⁽²⁹⁾ 직선보 요소는 Wen과 Rahimzadeh⁽¹⁰⁾의 연구, 곡선보 요소는 Bathe와 Bolourchi⁽¹¹⁾의 논문에서 찾아볼 수 있다. 보-기둥 이론을 이용하는 유한요소법에 관한 연구로는, Saafan⁽¹²⁾이 휨으로 인한 수평절점변위의 변화를 고려하여 평면 뺀대에 대한 강도행렬을 유도하였고 Oran⁽¹³⁾은 이를 평면 및 공간 뺀대로 확장시켜 접선강도행렬을 제

시하였다. Chen과 Blandford^{(14),(15)}는 박벽 공간 뺀대구조에 관한 대변형이론 및 비선형해석을 수행하였고, Conci와 Gattas⁽¹⁶⁾ 그리고 Yang 등^{(17),(18)}은 박벽 공간 뺀대구조의 기하학적 비선형해석을 수행하였다. 김문영⁽¹⁹⁾은 공간 뺀대구조의 기하학적인 비선형 유한요소해석법을 제시하였다.

공간뺀대구조의 3차원 후좌굴 해석시 각 절점은 세 축방향으로 유한한 회전변위를 일으킨다. 이때 방향이 서로 다른 고정축 회전각들은 non-commutativity의 성질을 나타내며, Argyris 등^{(20),(21)}은 여러 개의 부재축이 유한한 각도로 만나는 공간 뺀대구조의 황좌굴 해석을 고정축 회전각에 근거하여 수행하면 상당한 오류가 발생한다는 것을 처음으로 지적하였다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Argyris는 3차원 강체 회전시 회전순서에 상관없이 최종위치가 동일한 semitangential rotation을 정의하여 공간 뺀대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석법을 개발하였다. Kuo 등⁽²²⁾은 유한 회전변위를 고려하여 공간 뺀대구조의 비선형해석을 수행하였으며, Kouhia와 Tuomala⁽²³⁾는 updated Lagrangian formulation에 근거하여 공간 뺀대구조의 기하학적 및 재료적 비선형 거동을 조사하였다. 그리고 김문영과 안성천⁽²⁴⁾은 구속된 비틀을 무시한 경우와 이를 고려한 경우에 대하여 박벽 공간 뺀대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석법을 제시하였다.

본 연구에서는 풍하중, 조류력, 파력 그리고 지진력 등의 다양한 해양환경하중을 받는 고정식 스틸자켓의 동적해석을 위하여 구조물을 공간뺀대 요소로 모형화한다. 파랑하중은 선형파이론과 Stokes 5차 파이론에 의하여 구해진 파의 속도와 가속도를 이용하여 Morison 방정식으로 계산한다 그리고 파의 스펙트럼식 표현방법을 이용한 불규칙한 파랑하중, 조류력, 부력 및 부가질량 등과 같은 실제와 유사한 해양환경을 쉽게 모형화할 수 있도록 한다. 또한 구조물의 기하학적 비선형성을 고려하여 깊은 수심에서 큰 변위를 일으키는 해양구조물에 대한 해석과 지진, 폭풍, 선박충돌 같은 극한상황하에서 소성붕괴해석이 가능하도록 프로그램을 개발한다. 연계논문에서는 입력자료의 편리성과 해석결과 분석을 용이하게 할 수 있도록 전·후처리 프로그램을 개발하며 주프로그램과 전·후처리 프로그램을 통합하여 최종적으로 설계와 해석을 위한 steel jacket식 해양구조물의 구조해석프로그램을 개발한다.

2. 해양환경하중 모델

파력을 받는 스틸자켓의 하부구조는 주로 강관으로 구성되므로, 본 장에서는 주로 강관부재로 이루어진 공간뺀대구조에 대하여 정식화과정을 유도한다.

2.1 파 이론⁽²⁵⁾

본 절에서는 선형 및 5차 Stokes 규칙파와 불규칙파를 생성시키는 방법을 고찰한다.

먼저 선형파 이론은 모든 파이론들 중에서 가장 단순하고

효율적인 파이론이다. 선형파이론을 유도하는데 기본 가정은 파고 H 가 파장 L 과 수심 d 보다 매우 작은 경우이다. 이 가정은 자유수면 경계조건이 파의 2차 이상 고차 항들의 영향을 소거할 수 있도록 허용하고 있다. 파의 수면 형상(wave profile)은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (1)$$

이때 수평방향으로 물 입자의 속도는 다음과 같다.

$$u(x, y, t) = \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh(k(y+d))}{\sinh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (2)$$

여기서, 파수(wave number) $k=2\pi/L$ 과 파의 각주파수 $\omega=2\pi/T$ 는 분산 방정식(dispersion equation)을 만족해야 한다. 분산방정식은 다음과 같다.

$$\omega^2 = g k \tanh(kd) \quad (3)$$

또한 Stokes 5차 파이론은 파장에 비해 비교적 작은 파고에 대하여 사용되는 선형과 이론과 달리 파장에 비해 큰 파고에 대해서도 적용될 수 있고, 상대 수심(relative depth : d/L)이 1/10 이상인 경우에 사용된다. 이러한 조건은 폭풍에 의해 높은 파도가 발생할 때 고정식 해양구조물의 설계에 고려되어 왔다. 파의 수면형상은 다음 다섯 항의 합으로 표현된다.

$$\eta(x, t) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^5 F_n \cos n(kx - \omega t) \quad (4)$$

이때 수평 및 수직방향으로 물입자의 속도, 가속도는 아래와 같다.

$$u(x, y, t) = \frac{\omega}{k} \sum_{n=1}^5 G_n \frac{\cosh(nk(y+d))}{\sinh nkh} \cos n(kx - \omega t) \quad (5a)$$

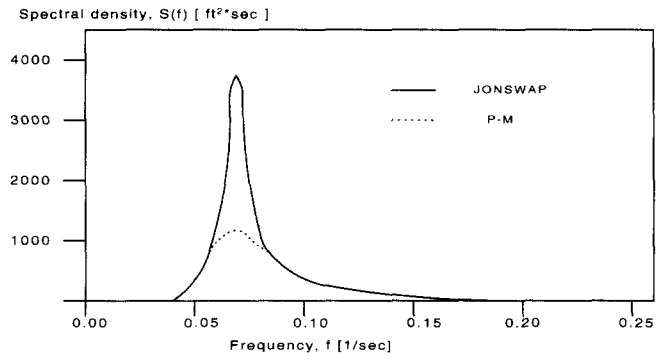
$$v(x, y, t) = \frac{\omega}{k} \sum_{n=1}^5 G_n \frac{\sinh(nk(y+d))}{\sinh nkh} \sin n(kx - \omega t) \quad (5b)$$

$$a_x = \frac{kc^2}{2} \sum_{n=1}^5 R_n \sin n(kx - \omega t) \quad (6a)$$

$$a_y = -\frac{kc^2}{2} \sum_{n=1}^5 S_n \cos n(kx - \omega t) \quad (6b)$$

여기서, F_n, G_n, R_n, S_n 는 참조문헌⁽²⁷⁾을 참조할 수 있다.

마지막으로 JONSWAP 스펙트럼은 날카로운 첨두(peak)를 가지는 Pierson-Moskowitz 스펙트럼의 수정형태를 나타내는 심한 폭풍이 발생한 해양 환경을 나타낸다. 유효 파고(significant wave height) H_s 와 스펙트럼의 첨두 주파수(spectral peak frequency) f_0 의 항들로 나타낸 JONSWAP 스펙트럼(참조 그림 1)의 기본식은 다음과 같다.



Comparison of the JONSWAP and Pierson-Moskowitz Spectrum (P-M : $H_s=30ft$, JONSWAP : $H_s=35.7 ft$)

그림 1 JONSWAP 스펙트럼

$$S_{\eta}(f) = \frac{5}{16} \frac{H_s^2 f_0^4}{f^5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_0}\right)^4\right) \gamma \exp\left[-(f-f_0)^2/2\sigma^2 f_0^2\right] \quad (7)$$

여기서,

$$\sigma = \sigma_a = 0.07 \text{ for } f \leq f_0, \sigma = \sigma_b = 0.09 \text{ for } f > f_0$$

γ (peakedness ratio) : JONSWAP spectrum의 최대 spectral density value와 평균값으로 $\gamma=3.3$ 을 가지는 Pierson-Moskowitz spectrum의 최대 spectral density value와의 비($\gamma=1$ at Pierson-Moskowitz spectrum)

f_0 : $3.5H_s^{0.4}$ 값을 가지는 T_d (dominant wave period)의 역수로 볼 수 있음

H_s : 파들 중 1/3번째 높이까지의 파들의 평균값

파고에 대한 스펙트럼이 주어지면, 불규칙 파형의 시간 이력이 스펙트럼으로부터 직접적으로 얻어지는 파고와 불규칙하게 선택되는 위상각들을 가지는 많은 주파수 성분들의 선형 중첩에 의해 식 (8)로부터 생성될 수 있다.

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} H_n \cos(k_n x - 2\pi f_n t + \phi_n) \quad (8)$$

여기서, $k_n = \frac{2\pi}{L_n}$ 은 분산 방정식에 의해 계산된 파수이다.

유사하게, 물 입자의 속도는 식 (2)에서 주어진 주파수 요소들의 합으로 얻어질 수 있다. JONSWAP 스펙트럼으로부터 생성된 불규칙 파형의 스펙트럼 분석을 한 결과 입력 스펙트럼과 유사한 주파수 분포 상태를 가짐을 알 수 있다. 불규칙 파의 생성은 먼저 분산 방정식으로부터 파수를 계산하고, JONSWAP 스펙트럼으로부터 각 주파수 대의 파고, 파의 위상각 등을 계산하며, 그리고 이들로부터 불규칙 파형을 계산하는 과정으로 구성된다. 이때 파의 시간이력은 총 64개의 조화파들을 중첩한다.

2.2 파랑하중

Steel Jacket과 같은 소규모 부재들로 이루어진 구조물에 대한 파랑하중의 모델링은 Morison 방정식을 사용한다. Morison 방정식은 일반적으로 파장에 비해서 구조물이 작을 때, 즉

유효길이 D (cylinder의 경우에는 지름)의 파장 L 에 대한 비 (D/L) 가 0.2 이하일 때, 그리고 점성 항력이 관성력 보다 크게 작용할 때 사용된다.

구조물과 유체의 상대 운동을 고려한 Morison식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁵⁾

$$F_w = C_M \frac{\rho \pi D^2}{4} a - (C_M - 1) \frac{\rho \pi D^2}{4} (\ddot{y}) + \frac{1}{2} C_D \rho D (u - \dot{y}) |u - \dot{y}| \quad (9)$$

여기서,

C_D : 점성 계수

C_M : 관성 계수

ρ : 유체의 밀도

D : 원형 실린더의 직경

u, a : 유체의 속도 및 가속도

\dot{y} : 실린더의 속도

\ddot{y} : 실린더의 가속도

세 번째 항력 항은 물입자와 실린더의 상대 속도에 의존한다. 관성력은 두개의 항으로 나누어지는데, 첫 번째 항은 단지 유체의 운동에 의해 발생하고 두 번째 항은 실린더의 운동이 주변의 물입자를 가속시키는 영향인 부가질량(added mass)항이 된다.

2.3 지진하중의 모형화

인공지진 발생 프로그램인 SIMQKE를 사용하여, 정의된 임의의 응답 스펙트럼에 대한 다양한 형태의 지반 가속도를 생성하고, 이를 구조물 동적해석에 적용하였다. 그림 2, 3에서는 SIMQKE를 이용하여 생성된 지반의 지진 가속도 예와 입력된 목표 속도 응답 스펙트럼과 계산된 지진 가속도로 인한 속도 응답 스펙트럼을 비교하여 보여준다. SIMQKE의 입력 data에서 최대 지반가속도와 주파수 분포 상태는 목표 응답스펙트럼으로 제어하고, 시간대별 분포 상태는 포락함수(envelop function)으로 조정할 수 있다.

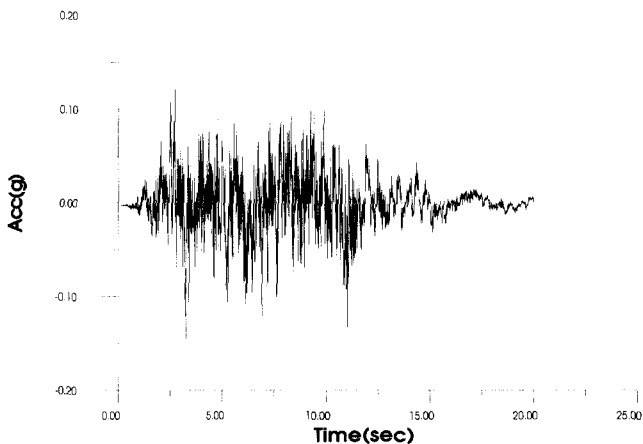


그림 2 인공지진가속도

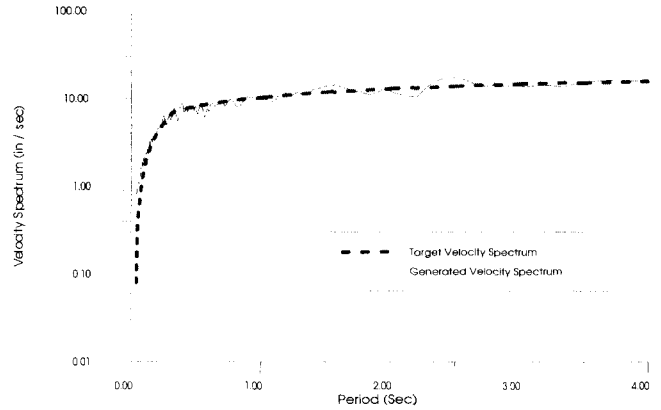


그림 3 목표응답스펙트럼과의 비교

3. 해양환경하중을 받는 스틸자켓의 선형 정식화

지진하중을 받는 고정식 해양구조물은 구조물과 지반 시스템에서 높은 동적 저항력을 발생시키며, 실제 설계를 위하여 정확히 하중을 예측하는 것은 매우 필요하며 이를 위하여 완벽한 구조물과 지반시스템이 모델되어야 하고, 유체 동하중은 적절하게 고려되어야 한다.

지진력과 파력을 동시에 받는 경우에 n 개의 자유도를 갖는 고정식 스틸자켓 해양구조물의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M {}^t\ddot{U} + C {}^t\dot{U} + KU = F_w \quad (10a)$$

$${}^t\ddot{U} = \ddot{U} + B \ddot{U}_g \quad (10b)$$

여기서,

M : 질량행렬

C : 감쇠행렬

K : 강성행렬

${}^t\ddot{U}$: 절점에서의 전체 가속도 벡터

F_w : 유체와 구조물의 상호작용을 포함한 유체동하중

U, \dot{U}, \ddot{U} : 지반변위에 상대적인 절점변위, 속도, 가속도 벡터

\ddot{U}_g : 지반가속도의 삼차원 벡터

B : 지반가속도의 전체 절점 가속도에 대한 기여도를 표시하며, 0과 1로 구성되는 $n \times 3$ 행렬이다.

유체 동하중 벡터 F_w 를 나타내기 위해서, 그림 4에서 나타난 것처럼 절점 p 와 q 사이에 위치한 원통형 부재상에 작용하는 유체 동하중을 생각한다. L 과 D 는 각각 부재의 길이와 직경이며, s 는 부재의 가장 가까운 절점에서부터 부재를 따라 계산되는 변하는 값이다. e_i 는 절점 p 에서 q 방향으로의 단위벡터이다. $\dot{u}(s)$ 은 위치 s 에서의 물분자 속도이고, $\dot{u}_n(s)$ 은 벡터 $\dot{u}(s)$ 와 e_i 의 평면사이에 존재하는 $\dot{u}(s)$ 의 직각성분이다.

그림 4에는 나타나 있지 않지만 $\dot{u}(s)$ 와 $\dot{u}_n(s)$ 와는 다른 방향을 가지는 물분자의 가속도 성분이 $\ddot{u}(s)$ 와 그것의 직각성분 $\ddot{u}_n(s)$ 이 존재한다. 부재는 ${}^t\dot{U}(s)$ 와 ${}^t\ddot{U}(s)$ 로 표

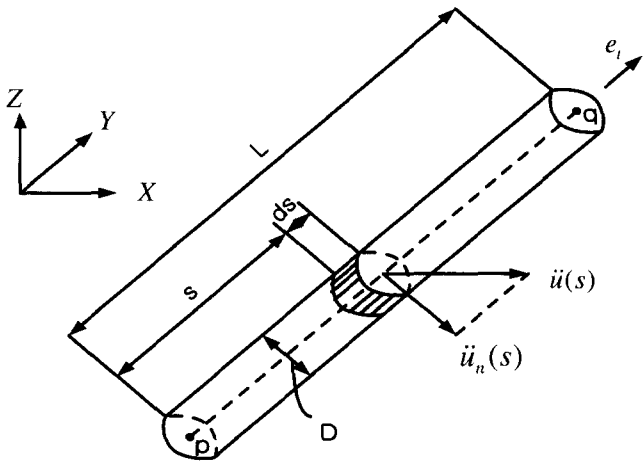


그림 4 부재를 따른 물분자 속도

시하는 속도와 가속도로 유체의 흐름속에서 움직이고 있다. 임의의 위치 s에서 부재길이를 따른 단위길이당 유체동하중은 다음과 같은 벡터관계로 표시된다.

$$f_w = \rho A \ddot{u}_n + \rho A (C_M - 1) [\ddot{u}_n - {}^t\ddot{U}_n] + \rho DC_D |\dot{u}_n - {}^t\dot{U}_n| (\dot{u}_n - {}^t\dot{U}_n) \quad (11)$$

여기서,

$A = \pi D^2/4$: 실린더의 단면적

${}^t\dot{U}_n(s), {}^t\ddot{U}_n(s)$: 각각 ${}^t\dot{U}(s), {}^t\ddot{U}(s)$ 의 수직성분

이러한 속도, 가속도성분은 아래 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{u}_n(s) &= N\dot{u}(s), & \ddot{u}_n(s) &= N\ddot{u}(s) \\ {}^t\dot{U}_n(s) &= N^t\dot{U}(s), & {}^t\ddot{U}_n(s) &= N^t\ddot{U}(s) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$N = I - e_i e_i^T = \begin{bmatrix} (1 - e_{i1}^2) & -e_{i1}e_{i2} & -e_{i1}e_{i3} \\ -e_{i1}e_{i2} & (1 - e_{i2}^2) & -e_{i2}e_{i3} \\ -e_{i1}e_{i3} & -e_{i2}e_{i3} & (1 - e_{i3}^2) \end{bmatrix} \quad (13)$$

이고 e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} 은 x, y, z방향에서의 단위벡터 e_i 의 성분이다.

식 (11)의 속도성분들은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$${}^t\dot{U}(s) = \dot{U}_g + \dot{U}(s) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_n(s) - {}^t\dot{U}_n(s) &= \dot{u}_n(s) - \dot{U}_{gn} - \dot{U}_n(s) \\ &\equiv \dot{q}_n(s) - \dot{U}_n(s) = N[\dot{q}(s) - \dot{U}(s)] \end{aligned} \quad (15)$$

$$|\dot{u}_n - {}^t\dot{U}_n| (\dot{u}_n - {}^t\dot{U}_n) = |\dot{q}_n - \dot{U}_n| (\dot{q}_n - \dot{U}_n) \quad (16)$$

식 (16)을 선형화시키기 위하여 아래 조건식을 가정한다.

$$\langle |\dot{q}_n| \rangle \gg \langle |\dot{U}_n| \rangle \quad (17)$$

식 (17)의 $\langle \rangle$ 은 시간에 관한 평균값을 나타낸다. 이러한 가정하에서 식 (16)은 아래와 같이 근사적으로 선형화된다.

$$|\dot{u}_n - {}^t\dot{U}_n| (\dot{u}_n - {}^t\dot{U}_n) = |\dot{q}_n| \dot{q}_n - 2|\dot{q}_n| \dot{U}_n \quad (18)$$

여기서 식 (12)를 이용하면, 식 (11)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} f_w &= \rho A C_M N \ddot{u} - \rho A (C_M - 1) N^t \ddot{U} \\ &\quad + \rho DC_D |\dot{q}_n| \dot{q}_n - 2\rho DC_D |\dot{q}_n| N \dot{U} \end{aligned} \quad (19)$$

이제 Lumping technique⁽²⁹⁾을 이용하여 벡터함수 $f_w(s)$ 를 그림 5에서 보인 것처럼 절점 p와 q에서 각각 6개의 절점변위에 대응하는 12개의 힘 벡터성분로 이산화하면, e 번째 부재의 등가하중성분 f_{we} 는 아래 식과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{we} &= \rho V_e C_{Me} M_e \ddot{u}_e - \rho V_e (C_{Me} - 1) M_e {}^t\ddot{U}_e \\ &\quad + \rho A_{De} C_{De} M_e \dot{q}_e (M_e \dot{q}_e - 2M_e \dot{U}_e) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $\ddot{u}_e, {}^t\ddot{U}_e, \dot{q}_e$, 그리고 \dot{U}_e 은 부재의 절점좌표에서의 12개의 성분벡터들이며, V_e 은 부재의 유효체적이고, A_{De} 은 부재의 유효항력면적, M_e 은 아래와 같이 주어진 12×12 매트릭스이다.

$$M_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

유효 체적 매트릭스와 항력 면적 매트릭스를 정의하면 다음과 같다.

$$V_e^* \equiv V_e M_e, \quad A_{De}^* \equiv A_{De} M_e \quad (22)$$

그리고 식 (20)의 마지막항을 근사화하면 다음과 같이 주어진다.

$$2\rho A_D C_D |\dot{M} \dot{q}_e| M \dot{U}_e \approx 2\rho A_D C_D \langle |\dot{M} \dot{q}_e| \rangle M \dot{U}_e \quad (23)$$

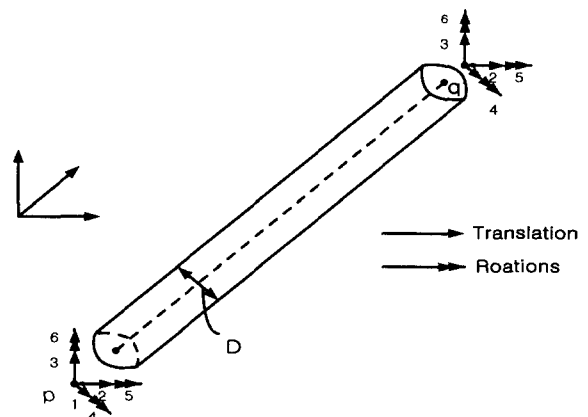


그림 5 부재의 절점 p와 q에서의 절점 변위성분

식 (20)은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f_{we} = \rho C_{Me} V_e^* \ddot{u}_e - \rho(C_{Me} - 1) V_e^{*T} \dot{U}_e + \rho C_{De} |N_e \dot{q}_e| A_e^* \dot{q}_e - K_{De} \dot{U}_e \quad (24)$$

여기서,

$$K_{De} \equiv 2\rho C_{De} \langle |N_e \dot{q}_e| \rangle A_e^* \quad (25)$$

식 (10a)에서 필요한 전체 유체 동하중 벡터를 얻기 위해서 식 (24)에 의해서 정의된 12개의 힘 벡터들은 n 개의 벡터 F_w 로 결합되어야 한다. 이 과정은 아래식으로 표현된다.

$$F_w = \sum_{e=1}^m f_{we} = \sum_{e=1}^m \{ \rho C_{Me} V_e^* \ddot{u}_e - \rho(C_{Me} - 1) V_e^{*T} \dot{U}_e + \rho C_{De} |N_e \dot{q}_e| A_e^* \dot{q}_e - K_{De} \dot{U}_e \} \quad (26)$$

여기서, 각 벡터 f_{we} 은 식 (26)에 의해서 정의되며 m 은 구조 시스템에서 전체 부재수이다. 첨자 e 는 부재 e 를 명확하게 나타내기 위해서 첨가되어졌다.

식 (10a)에 식 (26)을 대입하여 다시 정리하면 아래와 같은 식이 주어진다.

$$\overline{M} \ddot{U} + \overline{C} \dot{U} + KU = M_w \ddot{u} - \overline{M} B \ddot{u}_g + f_D \quad (27)$$

여기서,

$$\overline{M} = M + \sum_{e=1}^m \rho(C_{Me} - 1) V_e^* \equiv M + M_a \quad (28a)$$

$$\overline{C} = C + \sum_{e=1}^m K_{De} \equiv C + \overline{C} \quad (28b)$$

$$M_w \equiv \sum_{e=1}^m \rho C_{Me} V_e^* \quad (28c)$$

$$f_D = \sum_e f_{De} = \sum_{e=1}^m \rho C_{De} |M_e \dot{q}_e| A_e^* \dot{q}_e \quad (28d)$$

4. 소성힌지효과를 고려한 스틸자켓의 기하학적 비선형 정식화

4.1 기본가정

스틸자켓의 비선형 유한요소해석법을 제시하기 위하여 다음의 가정을 둔다.

- (1) 단면은 길이방향으로 일정하며 2축대칭(원형 또는 H형)이다.
- (2) 구속된 뒤편효과는 무시하고, 부재의 강제이동 및 회전변위는 유한하지만 변형도는 작다.
- (3) 각 하중단계에서 변형으로 인한 뼈대부재의 곡선형상은 무시하고, 단순히 축방향력을 받는 두 절점을 잇는 직선부재로 가정한다.

- (4) 탄·소성거동은 소성힌지개념을 도입하여 고려한다. 이때 소성힌지 발생여부와 소성변형을 산정하기 위하여 재단력성분의 함수인 항복함수를 사용한다.

4.2 탄성영역에서 접선강도행렬

초기응력 하에서 대칭단면을 갖는 공간뼈대요소의 증분 평형방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta(\Pi_E + \Pi_G) = \delta\Pi_{ext} \quad (29)$$

여기서,

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^l [EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 + GJ\theta'^2] dx_1 \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = \frac{1}{2} \int_0^l [{}^tF_1(U_y''^2 + U_z''^2) + {}^tM_P \theta'^2 \\ + {}^tM_1(U_z' U_y'' - U_z'' U_y') + {}^tM_2(U_y'' \theta - U_y' \theta') \\ + {}^tM_3(U_z'' \theta - U_z' \theta') + {}^tF_2 U_z' \theta + {}^tF_3 U_y' \theta] dx_1 \end{aligned} \quad (30b)$$

$$\Pi_{ext} = U_e^T F_e \quad (30c)$$

그리고

$$U_e = \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q \rangle \quad (31a)$$

$$F_e = \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, M_2^p, M_3^p, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q \rangle \quad (31b)$$

윗 식에서 EA, EI_2, EI_3, GJ 는 각각 축강성, 휨강성, 그리고 비틀림강성을 나타내고, U_x, U_y, U_z, θ 는 각각 축방향, 횡방향 변위, 그리고 비틀림회전각을 표시한다. 또한 U_e 와 F_e 은 각각 구속된 뒤편을 고려한 부재좌표계에서의 부재증분변위 및 부재력 벡터를 나타낸다. 이때, ' $\langle \rangle$ '는 열벡터를 의미한다. 그림 6은 공간뼈대요소의 재단변위벡터를 표시한 것이다. 네개의 변위함수들(U_x, U_y, U_z, θ)을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 연구에서 축방향변위와 비틀림회전각은 선형변화로 가정하고, 휨거동에 의한 횡방향 처짐은 3차 Hermitian 다항식을 사용한다.⁽²⁴⁾

형상함수로 표현되는 변위장을 식 (30a) 및 식 (30b)에 대입하여 적분을 행하면 증분평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta U_e^T {}^tK_e U_e = \delta U_e^T F_e \quad (32)$$

여기서 tK_e 는 부재좌표계에서 12×12 접선강도행렬을 나타낸다. 이 강도행렬의 자세한 결과는 표 1에 제시하였다. 좌표

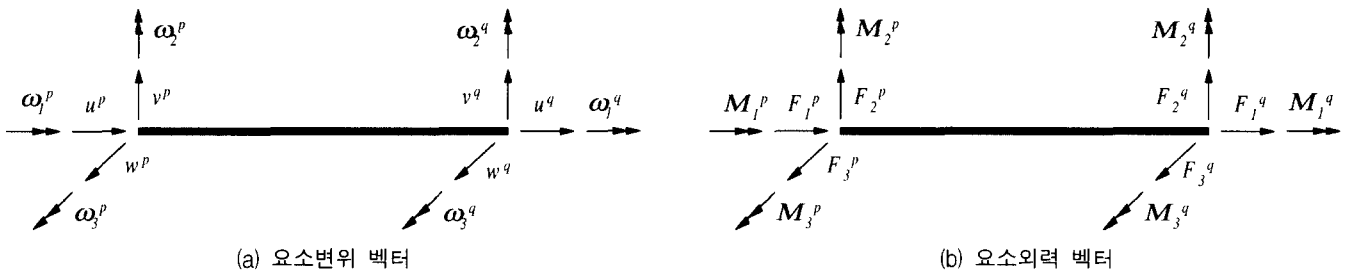


그림 6 부재 변위와 외력 벡터

표 1 공간빔대요소의 12×12 접선강도행렬 K_e

a_1	$-a_1$
a_2	.	$-e$	v	b_1	.	$-a_2$.	f	$-v$	b_1	.
a_3	.	$-e'$	$-b_2$	v	.	.	$-a_3$	f'	$-b_2$	$-v$.
		m	$-h'$	h	.	e	e'	$-m$	g'	$-g$.
			c_1	.	.	$-v$	b_2	g'	d_1	w	.
				c_2	.	$-b_1$	$-v$	$-g$	$-w$	d_2	.
					a_1
						a_2	.	$-f$	v	$-b_1$.
							a_3	$-f'$	b_2	v	.
Sym								m	$-i'$	i	.
									c_1	.	.
										c_1	.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= EA/L, \quad a_2 = 6F_1^p/5L + 12EI_3/L^3, \\
 a_3 &= 6F_1^p/5L + 12EI_2/L^3, \quad b_1 = F_1^p/10 + 6EI_3/L^2, \\
 b_2 &= F_1^p/10 + 6EI_2/L^2, \quad c_1 = 2F_1^pL/15 + 4EI_2/L, \\
 c_2 &= 2F_1^pL/15 + 4EI_3/L, \quad d_1 = -F_1^pL/30 + 2EI_2/L, \\
 d_2 &= -F_1^pL/30 + 2EI_3/L, \quad e = -(M_2^p)/L, \\
 f &= (M_2^q)/L, \quad g = -(M_2^p + M_2^q)/6, \\
 h &= (2M_2^p - M_2^q)/6, \quad i = -(M_2^p - 2M_2^q)/6, \\
 m &= (I_2 + I_3)F_1^p/AL + GJ/L, \quad v = -M_1^p/L, \quad w = -M_1^p/2
 \end{aligned}$$

축을 도심-주축과 무관한 임의의 축으로 선정하였기 때문에 축방향 변위, 휨 및 비틀 변위가 서로 연계되므로 거의 모든 성분들이 영이 아닌 값을 가지고 있음을 알 수 있다.

여기서 ($e' - i'$)는 ($e - i$)의 식들에 M_2^p 대신 M_3^p , M_2^q 대신 M_3^q 를 대입하여 얻는다.

동적해석시 필요한 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Pi_M &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L [A(\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2) + I_o \dot{\theta}^2 \\
 &\quad + I_3 \dot{U}_y'^2 + I_2 \dot{U}_z'^2] dx_1 \quad (33)
 \end{aligned}$$

접선강도행렬을 유도하는 과정과 동일한 방법을 적용하면, 공간빔대요소의 질량행렬을 산정할 수 있다.

4.3 탄성영역에서 공간빔대구조의 불평형하중 산정

구조물의 비선형해석시에는 증분형식의 반복계산법을 적용하여야 하며, 이러한 계산에서 변형된 상태에 대응하는 부재력증분을 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위하

여 updated Lagrangian co-rotational formulation에서는 구조물 평형방정식으로부터 산정한 부재의 증분변위를 강제운동변위 U_{rigid} 와 순수변형성분 U_{pure} 로 분리시켜야 한다. 이를 식으로 나타내면 식 (34)와 같다.

$$U_t = \langle U_{rigid} : U_{pure} \rangle \quad (34)$$

여기서,

$$U_{rigid} = \langle u_r, v_r, w_r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle \quad (35a)$$

$$U_{pure} = \langle u_{p1}, u_{p2}, u_{p3}, u_{p4}, u_{p5}, u_{p6} \rangle \quad (35b)$$

$\langle u_r, v_r, w_r \rangle$ 과 $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ 는 각각 강체이동 및 강체회전 변위이다. u_{p1} 는 축방향변형이고 $u_{p2}, u_{p3}, u_{p4}, u_{p5}$ 는 각각 부재 단부의 회전에 의한 휨변형이다. u_{p6} 는 비틀변형을 나타낸다. U_t 의 강제운동변위와 순수변형성분은 아래의 식으로 산정한다.

$$\begin{aligned}
 u_r &= (u^p + u^q)/2, \quad v_r = (v^p + v^q)/2 \\
 w_r &= (w^p + w^q)/2, \quad \gamma_1 = (\omega_1^q + \omega_1^p)/2 \\
 \gamma_2 &= (w^q - w^p)/l, \quad \gamma_3 = (v^q - v^p)/l \quad (36a \sim f)
 \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned}
 u_{p1} &= u^q - u^p, \quad u_{p2} = \omega_3^p - (v^q - v^p)/l \\
 u_{p3} &= \omega_3^q - (v^q - v^p)/l, \quad u_{p4} = \omega_2^p + (w^q - w^p)/l \\
 u_{p5} &= \omega_2^q + (w^q - w^p)/l, \quad u_{p6} = \omega_1^q - \omega_1^p \quad (36g \sim l)
 \end{aligned}$$

윗 식으로부터 부재증분변위 (U_e)와 일반화된 변위 (U_t)와의 관계식을 아래와 같이 적합매트릭스 a_e 를 이용하여 산정할 수 있다.

$$U_e = a_e \cdot U_t, \quad U_t = A_e \cdot U_e \quad (37a,b)$$

여기서 표 2는 12×12 적합행렬 a_e 를 나타낸다.

한편, 일반화된 변위벡터 U_t 에 대응되는 일반화된 힘벡터 F_t 는 아래와 같이 정의된다.

$$F_t = \langle F_{rigid} : F_{pure} \rangle \quad (38)$$

표 2 적합행렬 a_e

1	-1/2
.	1	.	.	.	-L/2
.	.	1	.	L/2
.	.	.	1	-1/2	.
.	.	.	.	1	1	.	.
.	1	.	1
1	1/2
.	1	.	.	.	L/2
.	.	1	.	-L/2
.	.	.	1	1/2
.	.	.	.	1	1	.
.	1	.	.	1	.	.	.

여기서,

$$\mathbf{F}_{rigid} = \langle f_{r1}, f_{r2}, f_{r3}, m_{r1}, m_{r2}, m_{r3} \rangle \quad (39a)$$

$$\mathbf{F}_{pure} = \langle f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}, f_{p4}, f_{p5}, f_{p6} \rangle \quad (39b)$$

윗 식에서 f_{p1} 는 축력이고 $f_{p2}, f_{p3}, f_{p4}, f_{p5}$ 는 각각 재단 휨 모멘트이다. f_{p6} 는 비틀림모멘트이다.

비선형해석의 반복계산과정에서 \mathbf{F}_{rigid} 는 요소 자체에서 평형을 이루기 때문에 항상 영의 값을 갖는다. Contragredience 원리를 적용하면 부재력벡터(\mathbf{F}_e)와 일반화된 힘벡터(\mathbf{F}_t)와의 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{a}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \quad (40)$$

중분 부재력을 효율적으로 계산하기 위하여, 부재변위 벡터와 부재력 벡터로 표현된 식 (32)를 아래와 같이 일반화된 변위 벡터와 힘 벡터로서 변환시킨다.

$$\delta \mathbf{U}_t^T \cdot {}^t \mathbf{K}_t \mathbf{U}_t = \delta \mathbf{U}_t^T \mathbf{F}_t \quad (41)$$

여기서,

$${}^t \mathbf{K}_t = \mathbf{a}_e^T \cdot {}^t \mathbf{K}_e \mathbf{a}_e \quad (42)$$

위 식의 ${}^t \mathbf{K}_t$ 에 대한 계산결과는 표 3에 제시되어 있다. 특히, 표 3의 매트릭스에서 굵은선 안쪽의 6×6 매트릭스(${}^t \mathbf{K}_{t,pure}$)는 순수변형성분(\mathbf{U}_{pure})에 대응되는 접선강도행렬을 의미한다. 부재의 강체회전변위가 발생하는 동안의 부재력의 변화는 영이라는 사실을 적용하기 위하여, 중분변위는 먼저 순수변형성분이 발생하고 그 이후에 강체이동변위가 발생한다고 가정한다. 따라서, 순수변형성분이 발생하는 동안 \mathbf{U}_{rigid} 와 \mathbf{F}_{rigid} 는 각각 영이 되기 때문에 순수변형성분에 대응되는 일반화된 힘벡터(\mathbf{F}_{pure})는 다음의 식으로부터 계산된다.

표 3 공간뼈대요소의 12×12 접선강도행렬 ${}^t \mathbf{K}_t$

.
.
.
.
.	-h'	h	.	i	j	-i'	-j'
.	-h'	a ₂	.	.	-e	e	.
.	h	.	a ₂	.	.	e	-e
.	a ₁	.	.	.
.	b ₁	c ₁	.
.	.	.	.	i	-e	e	f
.	.	.	.	j	e	.	.	.	c ₁	b ₁	-e
.	.	.	.	-i'	.	e	.	.	.	-e	b ₂
.	.	.	.	-j'	.	-e	.	.	e	.	c ₂
.	-k	k	.	.	f	g	-f'
.	-g'	-g'	d

$$\begin{aligned} a_1 &= EA/L, \quad a_2 = F_1^p L, \quad b_1 = 2 F_1^p L/15 + 4EI_3/L, \\ b_2 &= 2 F_1^p L/15 + 4EI_2/L, \quad c_1 = -F_1^p L/30 + 2EI_3/L, \\ c_2 &= -F_1^p L/30 + 2EI_2/L, \quad d = (I_2 + I_3) F_1^p / AL + GJ/L, \\ e &= M_1^p/2, \quad f = -(M_2^p - 2M_3^p)/12, \quad g = -(2M_2^p - M_3^p)/12, \\ h &= -(M_2^p + M_3^p)/2, \quad i = M_3^p/2, \quad j = M_3^p/2, \quad k = (M_2^p - M_3^p)/4 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{t,pure} \mathbf{U}_{pure} = \mathbf{F}_{pure} \quad (43)$$

식 (43)에 의하여 총부재력벡터는 중분부재력이 누적되어 계산된다. 그리고 그 이후 발생하는 강체회전변위에 의하여 각각의 부재의 좌표변환행렬을 구성하는 방향여현(direction cosine)들이 새로이 계산된다. 이 과정에서 총부재력벡터의 방향은 Cauchy 응력텐서에 의한 힘들이므로 변환되지 않는다. 또한, 뼈대구조의 기하적인 비선형 해석시에는 휨 및 비틀림변위에 의한 축방향 길이 변화를 고려해야한다. 따라서, 중분축력을 계산할 때 축방향변형은 다음과 같이 수정하여 계산한다.

$$u_{p1} = u^a - u^b + \Delta \quad (44)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta &= (u_{p2}^2 + u_{p3}^2 + u_{p4}^2 + u_{p5}^2) \frac{l}{15} \\ &\quad - (u_{p2} u_{p3} + u_{p4} u_{p5}) \frac{l}{30} + \frac{\beta_1}{2} u_{p6}^2 \end{aligned} \quad (45)$$

공간 뼈대요소의 중분평형방정식을 전체좌표계로 좌표변환시키고 직접강도법을 적용하면 구조물전체의 중분방정식을 얻을 수 있다. 전체좌표계에서 중분평형방정식으로부터 중분변위가 구해지면, 각 부재에 대하여 부재력중분을 산정하고 불평형하중을 결정하게 된다. 이때 중분형식의 반복계산법을 사용하는 경우, 불평형하중은 다음의 반복계산에서는 하중으로 작용한다. updated Lagrangian co-rotational formulation에 근거한 비선형 해석 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 구조물 전체의 중분방정식을 풀어서 중분변위벡터를 구한다.

- 2) 각 부재에 대응하는 증분변위성분을 부재좌표계로 좌표 변환시킨다.
- 3) 부재좌표계에 대한 증분변위로부터 강제회전변위와 순수 변형성분을 계산한다.
- 4) 단계 3)에서 계산된 강제회전변위를 전 단계까지의 강제회전변위에 더하여 새로운 좌표변환행렬을 구성한다.
- 5) 단계 3)에서 계산된 순수변형성분을 식 (43)에 대입하여 각 부재력증분을 산정하고, 변형된 상태에 대응하는 재단력을 산정한다.
- 6) 단계 5)에서 계산된 각 부재의 재단력에 대응하는 절점력 벡터와 각 절점에 작용하는 외력벡터의 차이로 불평형하중을 산정한다.
- 7) 단계 6)에서 구해진 불평형하중 성분중에서 가장 큰값이 수렴허용치보다 작으면 다음 하중단계로 넘어가고, 그렇지 않으면 이 조건을 만족시킬 때까지 단계 1)부터 단계 6)까지 과정을 반복계산한다.

4.4 탄소성 영역에서 공간뼈대요소의 접선강도행렬과 불평형하중 산정⁽²⁸⁾

탄소성영역에서 대변형효과를 고려한 공간뼈대 요소의 증분방정식은 다음과 같은 형태로 표시할 수 있다.

$$dS = (k_{ep} + k_g) \cdot dV \quad (46)$$

여기서, k_{ep} 는 재료비선형만이 탄·소성 강도행렬의 구성에 영향을 준다는 가정 (4)하에 탄성강도행렬만을 탄·소성 구성식에 대입하여 계산한 부재좌표계에서의 (6×6)탄소성 강도행렬을 나타낸다. k_g 는 기하적인 강도행렬이다.

위의 탄·소성 강도행렬을 구성하는 과정에서 중요한 부분중의 하나가 항복함수로서, 부재단면 또는 소성영역을 결정하는 변수의 선택에 따라 다르게 유도된다. 공간뼈대 구조물의 항복함수는 다음과 같다.

$$\Phi = (F_1/F_U)^2 + (M_1/M_{U1})^2 + (M_2/M_{U2})^2 + (M_3/M_{U3})^2 - 1 = 0 \quad (47)$$

여기서, F_1, M_1, M_2, M_3 는 각각 축방향력, 비틀모멘트, 휨모멘트, x_2 및 x_3 축방향의 휨모멘트를 나타내고, $F_U, M_{U1}, M_{U2}, M_{U3}$ 는 각각 소성축방향력, 소성비틀모멘트, x_2 및 x_3 축방향의 소성휨모멘트를 의미한다.

탄·소성 강도행렬을 유도하기 위한 기본과정은 다음과 같다.

- (1) 총부재 변형증분벡터(dV)는 탄성변형 증분벡터(dV_e)와 소성변형 증분벡터(dV_p)로 구성된다.

$$dV = dV_e + dV_p \quad (48)$$

- (2) 부재력 증분벡터와 탄성변형증분벡터의 관계는 다음과 같다.

$$dS = k_e \cdot dV_e \quad (49)$$

- (3) 소성 변형증분벡터의 방향은 한계함수면(limit function surface)에 수직하다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$dV_p = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial V} \quad \text{그리고} \quad \lambda \cdot \left[\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right]^T \cdot dS = 0 \quad (50)$$

여기서, $\frac{\partial \Phi}{\partial V}$ 는 한계함수의 gradient 벡터를 나타내며 각 성분들은 한계함수를 부재력 벡터성분들로 편미분하여 얻는다. λ 는 소성 변형벡터성분들의 크기를 결정하는 비례상수를 나타낸다.

- (4) 완전소성(perfectly plastic)거동을 보이는 것으로 가정하여 소성변형에 의한 항복함수의 형상변화는 없다.

위의 네가지 가정을 이용하여 p 단과 q 단이 소성형지인 경우에 대응하는 항복함수 Φ^p 와 Φ^q 는 아래와 같이 표시된다.

$$\Phi^p = (F_1/F_U)^2 + (M_1^p/M_{U1})^2 + (M_2^p/M_{U2})^2 + (M_3^p/M_{U3})^2 - 1 = 0 \quad (51a)$$

$$\Phi^q = (F_1/F_U)^2 + (M_1^q/M_{U1})^2 + (M_2^q/M_{U2})^2 + (M_3^q/M_{U3})^2 - 1 = 0 \quad (51b)$$

여기서 M_1^p, M_2^p, M_3^p 와 M_1^q, M_2^q, M_3^q 는 각각 p 단, q 단의 재단 모멘트를 나타낸다. 또한 소성해석에서 한계함수의 gradient 벡터($\partial \Phi / \partial V$)를 산정하여야 한다. 이 벡터와 각 성분들은 한계함수를 부재력벡터성분들로 편미분하여 얻는다. 공간뼈대부재의 p 단에서의 $\partial \Phi / \partial V$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial \Phi^p}{\partial V} = \left\langle \frac{2F_1}{F_U^2}, \frac{2M_3^p}{M_{U3}^2}, 0, \frac{2M_2^p}{M_{U2}^2}, 0, \frac{2M_1^p}{M_{U1}^2} \right\rangle \quad (52)$$

일반적으로 탄소성해석은 경로에 의존하는 비선형거동을 나타내기 때문에 반복계산에서 부재상태[4] (loading, neutral loading, 그리고 unloading)를 정확히 결정하고, 각 상태에 대응하는 불평형하중을 산정하여야 한다. 이에 대한 계산과정은 다음과 같다.

- 1) - 3) 탄성영역에서 불평형하중 산정 단계 1)에서 3)까지와 동일하다.

구조물 전체의 증분방정식을 풀어서 증분변위벡터를 구한다.

- 4) 단계 3)에서 계산된 강제회전증분변위를 전단계까지의 강제회전변위에 더하여 새로운 좌표변환행렬을 구성한다. 미소변형인 경우에는 초기의 좌표변환행렬을 변화시키지 않고 그대로 사용한다.

- 5) 단계 3)에서 계산된 순수변형성분들과 (6×6)접선강도행렬을 이용하여 각 부재의 부재력 증분과 부재력을 계산한다. 이때 양단 모두 탄성상태인 경우, 왼쪽단이 소성형

지인 경우, 오른쪽단이 소성힌지인 경우, 그리고 양단이 모두 소성힌지인 경우에 대응하여 적절한 강도행렬을 사용하여야 한다.

6) 단계 5)에서 구한 부재력을 부재양단의 항복함수식에 대입하여 부재의 상태를 결정한다. 만일 부재력 상태가 항복함수면 밖으로 나가는 경우, 공간뼈대구조에 대해서는 그림 7에서 보는바와 같이 축방향력과 비틀모멘트를 변화시키지 않고 두 개의 휨모멘트를 한계함수면으로 이동시킨다. 따라서 그림 7에 표시된 R 은 다음 식으로 산정한다.

$$R = \sqrt{1 - (F/F_U)^2 + (M_1/M_{U1})^2} \quad (53)$$

7) 하중보정이 이루어진 후에 다음식에 의하여 부재의 상태 즉, 부재양단의 소성힌지 발생 여부를 판단한다.

$$\text{loading: } \lambda \cdot \left[\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right]^T \cdot dS > 0 \quad (54a)$$

$$\text{neutral loading: } \lambda \cdot \left[\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right]^T \cdot dS = 0 \quad (54b)$$

$$\text{unloading: } \lambda \cdot \left[\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right]^T \cdot dS < 0 \quad (54c)$$

8) - 9) 탄성영역에서 불평형하중 산정 단계 6), 7)과 동일하다.

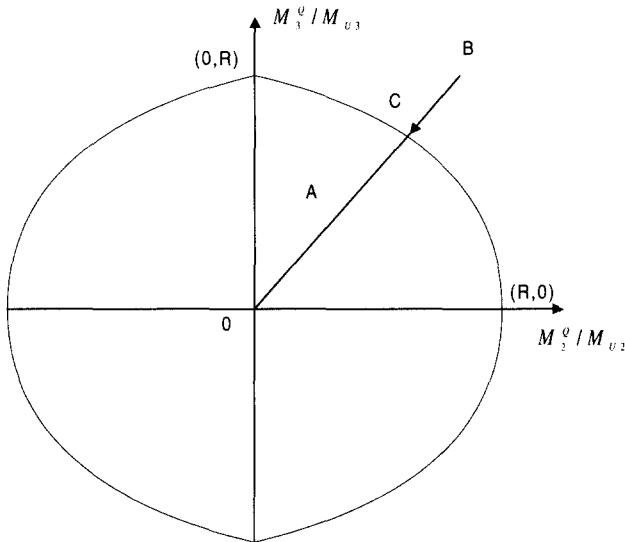


그림 7 하중 보정

5. 동적 선형 및 비선형해석

유체 동하중과 지진하중을 포함하는 구조물에 작용하는 외력들은 절점에 집중하중으로 근사화되어 해석된다. 결과적으로 스틸자켓의 선형 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M^t \ddot{U} + C^t \dot{U} + K^t U = F(t) \quad (55)$$

앞의 방정식의 시간에 따른 구조물의 응답해를 구하기 위하여, 선형해석⁽²⁹⁾에서는 모드중첩법과 직접적분법(Newmark method)을 적용한다. 또한, 고유진동수와 진동모우드를 구하기 위하여 본 연구에서 사용한 고유치 해석법은 subspace iteration method⁽²⁹⁾이다.

한편, 비선형 운동방정식은 다음과 같이 증분 운동방정식으로 표현할 수 있다.

$$M^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(i)} + C^{t+\Delta t} \dot{U}^{(i)} + {}^t K_i^{(i)} \Delta U^{(i)} = F(t+\Delta t) - {}^{t+\Delta t} R^{(i)} \quad (56)$$

여기서 Newton-Raphson 반복법이 채용되었으며, 오른쪽 두개의 항은 증분 또는 불평형하중을 나타낸다. 비선형 해석에서는 직접적분법이 사용된다.

6. 결 론

부재 직경이 비교적 작은 스틸자켓 해양 플랫폼에 대하여 파랑하중, 지진하중 등과 같은 외적 환경하중을 실제 상황과 유사하게 모형화하고 구조물을 해석하는데 주요 연구 목표를 두었다. 본 연구를 통하여 파랑하중과 지진하중을 받는 스틸자켓 구조물의 정적 및 동적해석을 수행하기 위하여 유한요소 정식화과정을 제시하고 『OSA 2000』의 주처리 프로그램을 개발하였다. 주요한 내용을 요약하면 다음과 같다.

1. 파랑하중은 직경이 비교적 작은 구조물에서 사용되는 Morison 방정식을 사용하여 계산하였고, JONSWAP 스펙트럼 또는 Pierson-Moskowitz 스펙트럼으로부터 인공적인 불규칙 파형을 모형화할 수 있었다. 그리고, 선형 Airy 이론과 Stoke 5차 파이론 등으로 파의 속도와 가속도를 계산하여, 깊은 수심에서 파고의 높고 낮음에 따라 적절한 파이론을 적용할 수 있도록 하였다.
2. 대변형 및 소성힌지 효과를 고려하여 극한하중하에서 스틸자켓 구조물의 비선형 정적해석 및 동적해석 기법을 개발하였다.
3. Subspace iteration method를 이용한 모드중첩법 및 Newmark법을 이용한 직접적분법을 적용하여 스틸자켓 구조물의 선형 정적해석, 동적해석 및 지진응답해석 기법을 개발하였다.

감사의 글

이 연구는 과학기술부에서 시행하는 중점국가 연구개발 사업의 하나인 자연재해방재기술개발 사업으로 수행된 것이다.

참 고 문 헌

1. 김문영, 이상호, 김동욱, "파랑 및 지진하중을 받는 스틸자켓의 동적해석 II : 전/후처리 및 수치해석에", 한국지

- 진공학회 논문집, 2001, 심사중.
2. Morison, J. R., O'Brien, M. P., Johnson, J. W., and Schaaf, S. A., "The force exerted by surface waves on piles," *Petrol. Trans., AIME* 189, 1950, pp. 149-154.
 3. MacCamy, R. C. and Fuchs, R. A., "Wave forces on piles : A diffraction theory," *Technical Memorandum No. 69*, Beach Erosion Boarc, Corps of Engineers, 1954.
 4. Chakrabarti, S. K., "Nonlinear wave forces on vertical cylinder," *J. Hydraulics Div., ASCE* 98, No. HY11, 1972, pp. 1895-1909.
 5. Chakrabarti, S. K., Tam, W. A., and Wolbert, A. L., "Wave forces on a randomly oriented tube," *Proceedings of the 7th Offshore Technology Conference*, OTC 2190, Houston, Texas, 1975, pp. 433-477.
 6. Lighthill, J., "Waves and hydrodynamic loading," *Proceedings of the 2nd International Conference on the Behaviour of Offshore Structures*, BOSS'79, London, 1979, pp. 1-40.
 7. Demirbilek, Z. and Gaston, J. D., "Nonlinear wave loads on a vertical cylinder," *Ocean Engng.*, Vol. 12, 1985, pp. 375-385.
 8. Lighthill, J., "Fundamentals concerning wave loading on offshore structures," *J. Fluid Mech.*, Vol. 173, 1986, pp. 667-681.
 9. Koterayama, W. and Nakamura, M., "Wave forces on a moving cylinder," *J. Offshore Mech, Arctic Engng.*, ASME Trans, Vol. 110, 1988, pp. 315-319.
 10. Wen, R. K. and Rahimzadeh, J., "Nonlinear elastic frame analysis by finite element," *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 109, 1983, pp. 1952-1972.
 11. Bathe, K. J. and Bolourchi, S., "Large displacement analysis three-dimensional beam structures," *Intermat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp. 961-986.
 12. Saafan, S. A., "Non-linear behavior of structural plane frames," *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 89, 1963, pp. 557-579.
 13. Oran, C., "Tangent stiffness in plane frames," *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 99, 1973, 973-985.
 14. Chen, H. and Blandford, G. E., "Thin-walled space frames I : Large deformation analysis theory," *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991, pp. 2499-2520.
 15. Chen, H. and Blandford, G. E., "Thin-walled space frames II: Algorithmic details and applications," *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991, pp. 2521-2539.
 16. Conci, A. and Gattas, M., "Natural approach for geometric non-linear analysis of thin-walled frames," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 30, 1990, pp. 207-231.
 17. Yang, Y. B. and McGuire, W., "Joint rotations and geometric nonlinear analysis," *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 112, 1986, pp. 879-905.
 18. Yang, Y. B. and Kuo, S. R., "Frame buckling analysis with full consideration of joint compatibilities," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 118, No. 5, 1992, pp. 871-889.
 19. 김문영, "전단변형을 고려한 공간 뼈대구조의 기하학적인 비선형 해석", 대한토목학회 논문집, 제13권, 제4호, 1993, pp. 39-49.
 20. Argyris, J. H., et al., "Finite element method-the natural approach," *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 17/18, 1979, pp. 1-106.
 21. Argyris, J. H., Hilpert, O., Malejannakis, G. A., and Scharpf, D. W., "On the geometrical stiffness of a beam in space - A consistent v. w. approach," *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol. 20, 1979, pp. 105-131.
 22. Kuo, S. R., Yang, Y. B., and Chou, J. H., "Nonlinear analysis of space frames with finite rotations," *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 119, No. 1, 1993, pp. 1-15.
 23. Kouhia, R. and Tuomala, M., "Static and dynamic analysis of space frames using simple Timoshenko type element," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 33, 1993, pp. 1189-1221.
 24. 김문영, 안성원, "공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한 요소해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제10권, 제1호, 1997, pp. 201-211.
 25. Chakrabarti, S. K., *Hydrodynamics of offshore structures*, Henry Ling Ltd, London, 1987.
 26. Dean, R. G. and Dalrymple, R. A., *Water wave mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall Inc, 1984, pp. 218-219.
 27. Dawson, T. H., *Offshore structural engineering*, Prentice-Hall, Inc., 1983, pp. 102-107.
 28. 김문영, "공간 강 뼈대 구조물의 대변형 및 탄소성 유한 요소해석", 한국강구조학회논문집, 제6권, 제4호, 1994, pp. 197-209.
 29. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.