

## 바닥판과 T형보가 건축구조물의 지진거동에 미치는 영향

안 상 경\*

### 1. 서 론

최근의 건축 구조물은 사회적인 요구 및 설계·건설기술의 발달로 인하여 대형화 및 고층화되고 있으며, 고강도의 콘크리트 재료나 합성 강관 등 철골재의 사용 및 합성구조 시공기술의 향상으로 점차 장스팬화 되어 가고있는 추세에 있다. 이러한 추세에 의하여 보의 춤은 점차적으로 커지고 있다.

건축구조물의 설계를 위한 해석에서는 주로 바닥판의 휨 강성을 고려하지 않고 골조만을 해석한다. 다음 바닥판은 주로 연직하중만을 부담한다고 가정한다. 또한 실제 건축구조물에서 보는 일반직으로 바닥판의 아래에 놓여지지만 대부분의 해석에서는 보와 바닥판의 부재축이 일치하는 것으로 가정하여 해석한다. 이러한 방법으로 구조물을 모형화 하여 해석하면 T형보의 효과를 제대로 고려할 수 없게 되어, 구조물의 강성을 상대적으로 과소평가하게 된다. 이러한 T형보의 효과는 보의 춤이 커질수록 더욱 커지게 된다. 그러므로 정적해석을 통한 구조물의 설계에서는 좀 더 안전한 설계가 가능하다. 그러나 지진해석과 같은 동적해석에서는 바닥판의 휨 강성 및 보의 편심효과가 구조물

의 고유진동수를 변화시키며, 이로 인하여 구조물의 동적거동에 영향을 미치게 된다. 그러므로 동적하중에 따라서는 큰 해석오차가 발생할 수도 있다.

본 연구에서는 이러한 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과가 건축구조물의 지진거동에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 또한 기존의 해석방법들에 대한 해석오차를 비교하여 보았다.

### 2. 보와 바닥판의 영향을 고려하기 위한 요소분할

보부재의 편심효과를 가장 간단하게 고려하는 방법은 rigid link를 사용하는 것이다. Gupta와 Ma<sup>1)</sup>는 rigid link를 사용하여 보의 편심효과를 고려할 때 발생하는 오차의 원인을 분석하였으며, 오차를 줄이기 위해서는 보부재를 여러 개의 요소로 분할하여야 한다고 하였다. 이러한 연구결과를 이용하여 Miller<sup>2)</sup>는 보요소의 두 절점 사이에 축방향에 대한 하나의 이봉자유도를 추가함으로써 rigid link를 사용할 때 발생하는 오차를 줄이는 방법을 도입하였다. Chan<sup>3)</sup>은 8-node shell element(5 DOF per node)와 3-node parabolic isoparametric beam

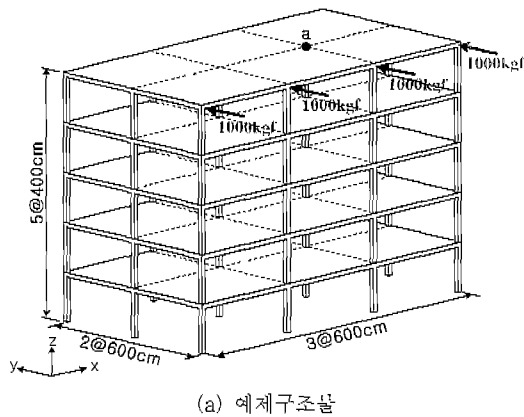
\* 성균관대학교 건축공학과

element를 사용하여 보의 편심효과를 고려하였다. 이러한 연구들에서는 주로 구조물의 바닥판과 보의 모형화 방법에 대하여 주로 다루고 있으므로 본 연구에서는 위의 선행연구들을 바탕으로 하여 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과가 구조물의 지진 거동에 미치는 영향에 대하여 비교 분석하였다.

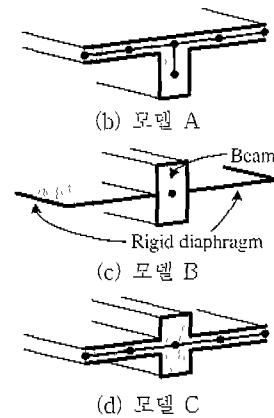
본 연구에서는 바닥판의 모형화를 위하여 Lee<sup>4)</sup>의 평면요소와 MZC 사각형 요소<sup>5)</sup>를 사용하였으며, 편심보의 모형화를 위하여 Petyt<sup>6)</sup>의 요소를 사용하였다. 먼저 편심효과를 고려하는데 있어서 최소 요소분할 수에 대하여 알아보기 위하여 그림 1(a)와 같은 5층의 바닥판을 가진 예제구조물을 이용하여 정적해석을 수행하였다. 그림 1(a)나타낸 하중 P는 각각 1,000kgf를 최상층에서 y방향으로 가하였다. 예제구조물에서 보와 바닥판이 접하는 부분의 모형화방법에 따라서 그림 1(b)~(d)와 같이 모델 A, 모델 B 및 모델 C로 하였다. 모델 A는 바닥판과 보의 편심효과를 고려하기 위한 해석모델로써 실제구조물과 가장 유사하게 보와 바닥판을 모형화한 해석모델이다. 모델 B는 고층구조물의

효율적인 해석을 위하여 많이 사용하는 방법인 바닥판과 보를 강막가정을 사용하여 모형화한 것으로써 바닥판의 휨 강성을 무시한 해석모델이다. 모델 C는 보의 중립축과 바닥판의 중립면이 일치하는 것으로 가정한 해석모델이며 바닥판에 대하여 강막가정을 사용하지 않는 경우에 흔히 사용되는 해석모델이다. 각 층에서 바닥판의 요소분할 형태는 그림 2에 나타내었다.

해석결과는 그림 3에 나타내었으며 그림 1(a)에 나타난 점 a에서의 수평변위를 비교하였다. 변위를 비교해 보면 요소분할이 많아질수록 일정한 값에 수렴함을 알 수 있다. 모델 A는 보의 편심효과를 고려하였기 때문에 상대적으로 작은 변위가 발생하였다. 그러나 모델 B는 보의 편심효과와 바닥판의 휨 강성을 고려하지 않아 가장 많은 변위가 발생하고 있다. 모델 C는 보의 편심효과를 고려하지 않아 모델 A에 비하여 변위가 크게 발생하였다. 또한 모델 A와 모델 B는 보로 둘러싸인 바닥판을 4×4로 요소를 분할하게 되면 해의 수렴도가 매우 향상됨을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서는 바닥

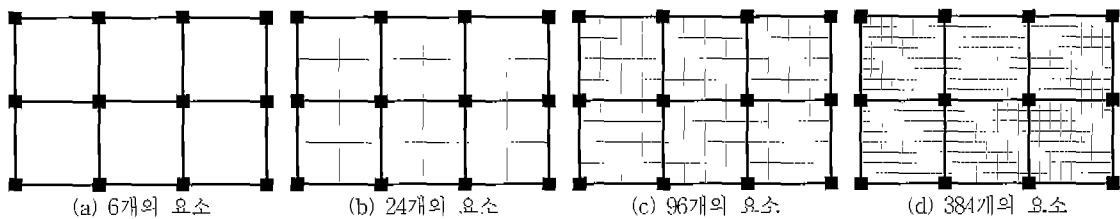


(a) 예제구조물



(d) 모델 C

그림 1 예제구조물과 해석모델의 종류



(a) 6개의 요소

(b) 24개의 요소

(c) 96개의 요소

(d) 384개의 요소

그림 2 각 층에서 바닥판의 요소분할 형태

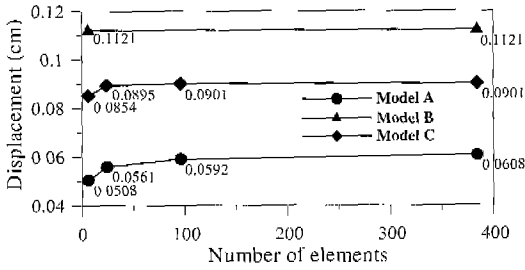


그림 3 점 a에서의 수평변위의 비교

판의 휨 강성과 보의 편심효과를 좀 더 정확하게 고려하기 위하여 편의상 바닥판을 4×4로 요소분할 하였다.

### 3. 구조물의 형상에 따른 보와 바닥판의 영향

#### 3.1 정형구조물

보와 바닥판의 모형화에 따른 지진거동 분석을 위하여 그림 4에 나타낸 예제구조물을 이용하여 보와 바닥판의 모형화방법을 달리한 해석모델에 대하여 해석시간과 고유진동수를 비교하였다. 부재의 단면크기는 기둥 부재의 경우에는 1~3층은 60cm×60cm, 4~5층은 45cm×45cm로 하였으며, 보와 바닥판은 전 층에서 동일하게 60cm×40cm 및 20cm로 하였다. 모델 B와 모델 C는 가장 일반적으로

해석에 사용되는 기존의 해석모델들이다. 여기서 모델 A와 모델 C는 바닥판과 보의 영향을 좀 더 정확하게 고려하기 위하여 2장의 결과를 이용하여 보로 둘러 쌓인 바닥판을 모두 4×4로 요소분할 하였다.

먼저 각 해석모델별 고유진동수 및 진동모드형상을 비교하여 보면 그림 5와 같다. 모델 B와 모델 C는 모델 A와 비교하여 고유진동수가 상대적으로 낮게 나타나고 있다. 이러한 결과가 발생하는 원인은 모델 B의 경우에는 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과를 고려하지 않아 상대적으로 구조물의 횡방향 강성이 과소평가 되었기 때문이다. 모델 C의 경우에는 보의 편심효과를 고려하지 않아 모델 B와 같이 구조물의 횡방향 강성이 과소평가 되었기 때문이다. 또한 모델 A와 모델 C의 진동수 차이와 모델 B와 모델 C의 진동수 차이를 비교하여 보면 2절의 예제해석에서와 같이 바닥판의 휨 강성에 의한 효과보다는 보의 편심효과가 건축구조물의 동적거동에 더 큰 영향을 주리라는 것을 예상할 수 있다.

진동모드형상을 비교하여 보면 전체적인 진동모드형상은 3개의 해석모델이 모두 유사하였지만, 특히 그림 6에 나타낸 모델 A와 모델 C의 10차 진동모드형상을 비교하여 보면 부분적으로 조금 다른 진동모드형상을 나타내고 있다. 모델 A는 보의 편심

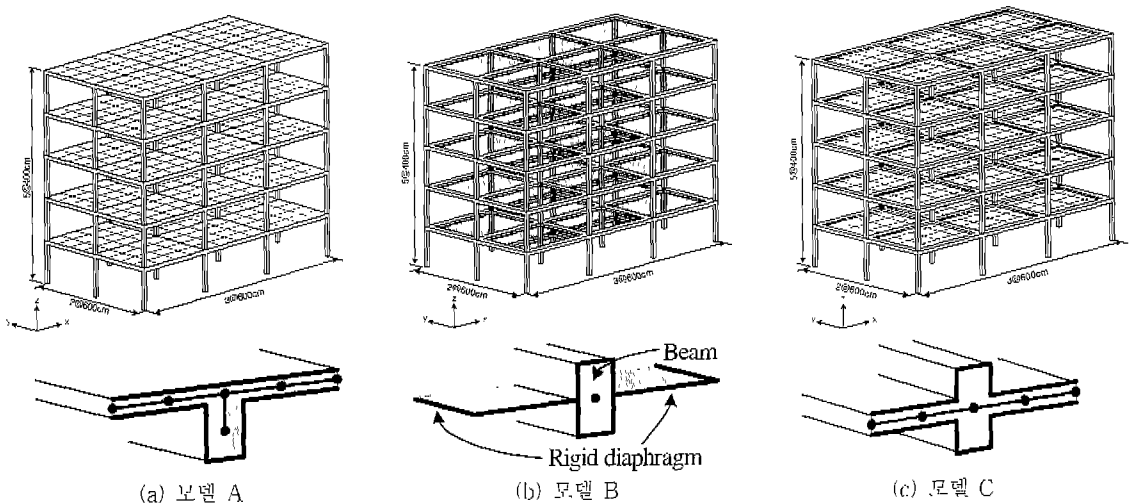


그림 4 예제구조물의 모형화

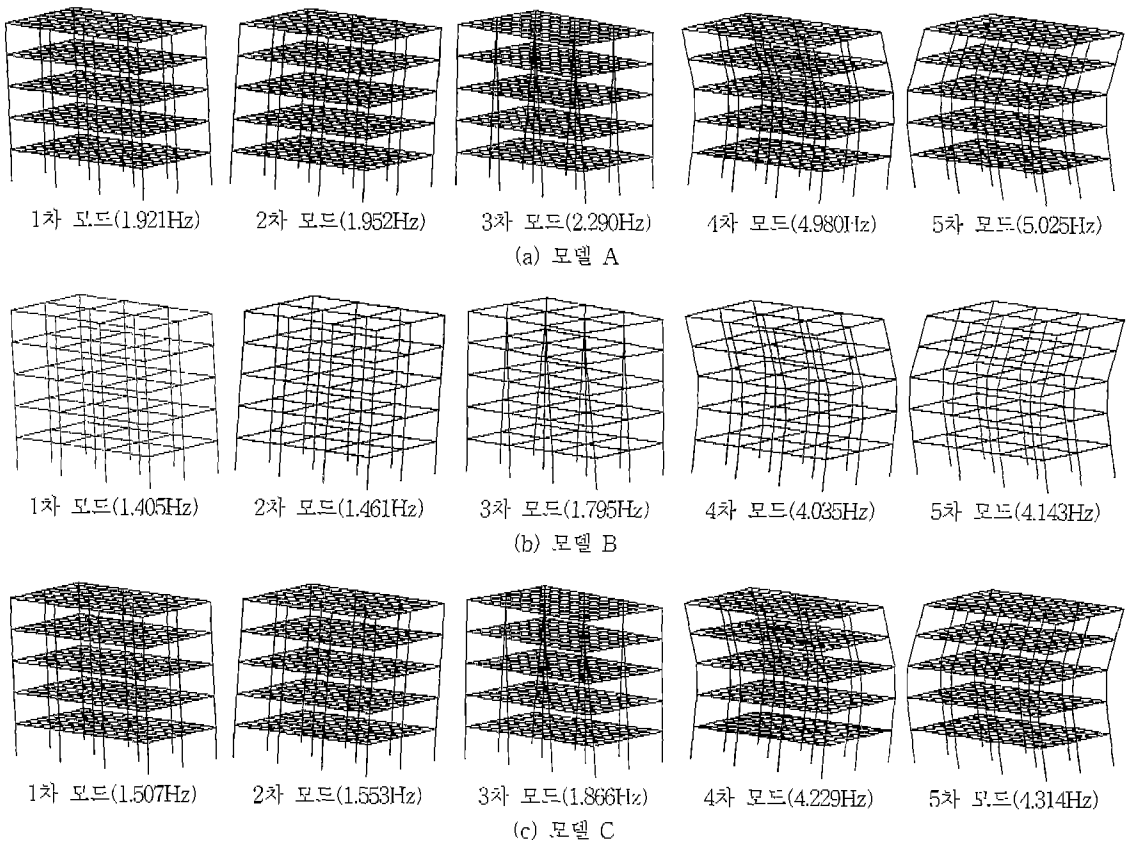


그림 5 고유진동수와 진동모드형상의 비교

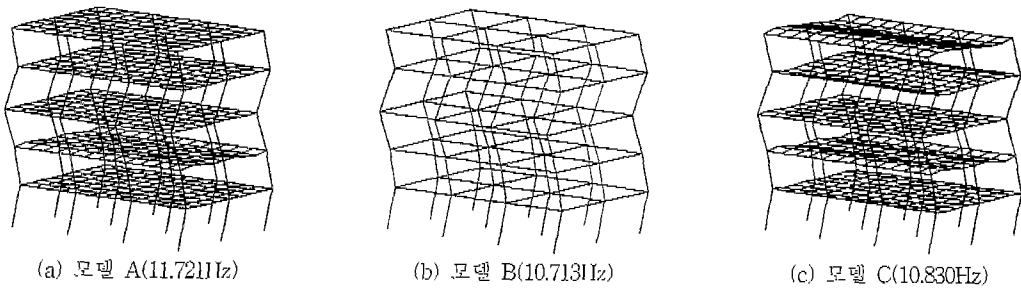


그림 6 10차 진동모드형상의 비교

효과를 고려하였기 때문에 바닥판의 휨 강성이 증가되어 최상층에서의 진동모드형상이 모델 C와는 달리 바닥판이 기의 휘어지지 않는 평평한 모습을 하고 있다. 지진해석의 경우에는 구조물의 고유진동수가 해석결과에 많은 영향을 미치기 때문에 좀 더 정확한 지진해석을 위해서는 보의 편심

효과를 고려하는 것이 해석상의 오차를 줄일 수 있으리라 판단된다. 참고적으로 표 1에 나타난 해석시간을 비교하여 보면 모델 A와 모델 C의 경우에는 모델 B에 비하여 자유도수가 증가하여 해석에 많은 시간이 소요되는 단점이 발생함을 쉽게 알 수 있다.

표 1 해석시간의 비교(단위: 초)

해석과정	모델 A (3,510 자유도)	모델 B (15 자유도)	모델 C (3,510 자유도)
강성 및 질량행렬 구성	62.22	1.63	61.41
고유치해석	20038.69	0.02	20037.48
시간이력해석	77.09	0.12	77.24
합계	20,178.00	1.77	20,176.13

### 3.2 비정형구조물

비정형구조물에 대하여 해석모델의 모형화 방법에 따른 지진거동을 분석하기 위하여 그림 10과 같은 예제구조물에 대하여 그림 8에 나타낸 El Centro 지진(1940, NS)을 이용하여 지진해석을 수행하였다. 모든 해석모델은 그림 4에 나타낸 것과 같이 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과를 고려한 모델을 모델 A라 하였으며, 강막가정만을 적용한 모델을 모델 B라 하였고 바닥판의 휨 강성을 만들 고려한 모델을 모델 C라 하였다. 일반적으로 비정형 구조물의 경우에는 여러 가지 해석오차를 유발할 수 있기 때문에 여러 기준에서는 강막가정을 사용할 시에는 주의해야 한다고 되어있다.

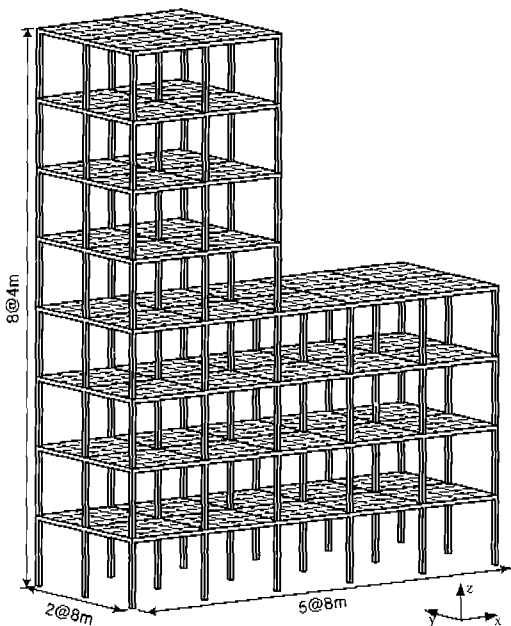


그림 7 비정형 예제구조물

모델별 고유진동수를 비교하여 보면 표 3과 같다. 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과를 고려하지 않은 모델 B의 경우에는 고유진동수가 상대적으로 낮게 나타나고 있으며 모델 A와 비교하여 고유진동수의 차이가 매우 크게 발생하고 있다. 또한 모델 B와 모델 C의 고유진동수의 차이는 상대적으로 모델 A와의 고유진동수의 차이보다 적게 발생한다. 여기서도 알 수 있듯이 보의 편심효과가 바닥판의 휨 강성에 의한 효과보다 구조물의 지진거동에 더 큰 영향을 준다는 것을 알 수 있었다.

그림 9에 나타낸 최상층에서의 가속도 및 변위 시간이력을 비교하여 보더라도 모형화 방법에 따라서 서로 상이한 시간이력을 보이고 있다. 특히

표 5 부재의 단면 크기(단위 : cm)

층	부재		
	기둥(b×h)	보(b×h)	바닥판두께
1~2	75×75	40×60	20
3~5	60×60	40×60	20
6~8	45×45	40×60	20

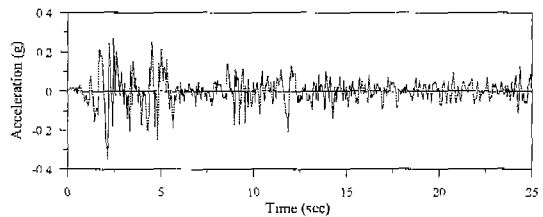
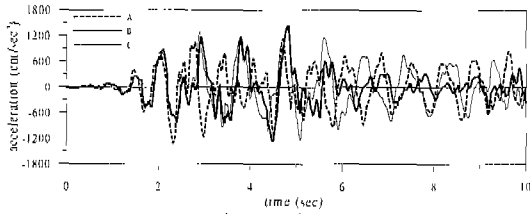


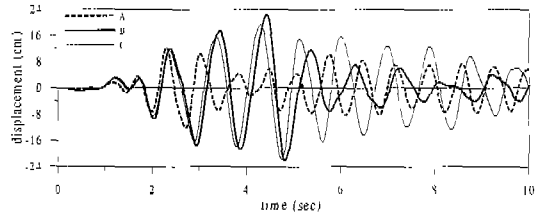
그림 8 El Centro 지진(NS, 1940) 데이터

표 3 고유진동수의 비교(단위 : Hz)

모드	모델 A	모델 B	모델 C
1	1.401	1.007	1.081
2	1.598	1.182	1.258
3	2.262	1.763	1.840
4	3.173	2.348	2.482
5	3.295	2.491	2.631
6	3.590	2.812	2.932
7	6.108	4.904	5.111
8	6.185	4.848	5.136
9	7.357	6.286	6.403
10	8.207	6.670	6.967



(a) 가속도 시간이력



(b) 변위 시간이력

그림 9 최상층에서의 가속도 및 변위 시간이력

모델 A와 비교하여 모델 B와 모델 C는 상대적으로 유사한 응답을 보이고 있다. 이것은 위의 고유진동수의 비교에서 얻은 결과에 의한 것이다. 그러므로 지진해석 시에는 어떠한 해석모델을 사용하느냐에 따라서 매우 다른 해석결과를 얻을 수 있으므로 이점에 대해서는 실험이나 추후의 연구 등을 통하여 추가적인 연구가 필요하리라 판단된다.

#### 4. 구조형식에 따른 보와 바닥판의 영향

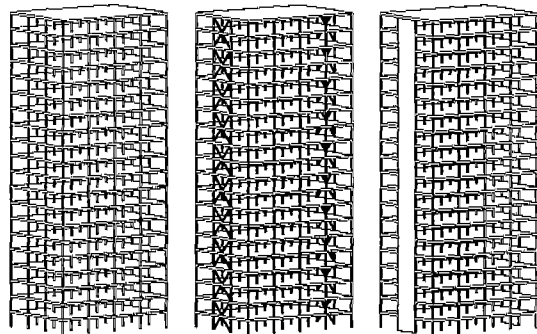
건축구조물의 횡력저항 구조형식에 따라서 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과가 건축구조물의 동적거동에 미치는 영향을 분석하기 위하여 그림 10에 나타난 20층의 건축구조물에 대하여 3가지 구조형식의 건축구조물을 사용하여 지진해석을 수행하였다. 층고는 모든 층을 동일하게 350cm로 하였으며, 기둥간격은 가로와 세로를 모두 동일하게 800cm로 하였다. 그림 10(a)는 모멘트골조방식(moment frame)의 건축구조물을 나타낸 것이다. 그림 10(b)와 그림 10(c)는 각각 횡력저항 구조로 가새골조구조(braced frame)와 전단벽보강구조를 나타낸다. 그리고 그림 11은 그림 10에 나타난 예제구조물에 대한 평면도이다.

각 부재의 단면 크기는 표 4에 나타내었으며, 입력하중으로는 그림 8에 나타내었던 El Centro(1940, NS) 지진을 사용하였다. 시간이력해석을 위한 예제구조물의 감쇠비는 모든 진동모드에 대하여 일정하게 5%로 하였다.

해석에 사용한 해석모델의 종류는 앞의 예제와 동일하게 하였다.

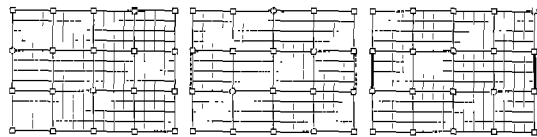
바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과가 구조물의 지진거동에 미치는 영향을 비교·분석하기 위하여

구조물의 고유진동수 및 최상층에서의 변위 시간이력을 검토하였다.



(a) 모멘트골조 (b) 가새골조 (c) 전단벽 보강구조

그림 10 지진해석을 위한 예제 건축구조물



(a) 모멘트골조 (b) 가새골조 (c) 전단벽보강구조

그림 11 지진해석에 사용된 예제구조물의 평면도

표 4 부재의 단면 크기(단위 : cm)

층	부재				
	기둥 (b×h)	보 (b×h)	바닥판 두께	가새 (b×h)	전단벽 두께
1~3	80×80	40×70	20	30×30	30
4~6	75×75	40×70	20	30×30	30
7~9	70×70	40×70	20	30×30	30
10~12	65×65	40×70	20	30×30	30
13~15	60×60	40×70	20	30×30	30
16~18	55×55	40×70	20	30×30	30
19~20	50×50	40×70	20	30×30	30

#### 4.1 모멘트골조 구조물

모멘트골조 구조물에 대하여 해석모델에 따른 고유진동수와 모델 A를 기준으로 하여 고유진동수의 차이를 비교하여 보면 표 5와 같다. 모델 B와 모델 C의 고유진동수 차이는 진동모드의 차수에 따라서 조금씩 변화는 있지만 대략적으로 약 30% 정도로 비교적 큰 차이가 발생했다. 이러한 오차의 원인은 보의 편심효과가 구조물의 고유진동수의 변화에 많은 영향을 준다는 것을 의미한다. 또한 모델 B와 모델 C의 경우에는 진동모드의 차수가 높아질수록 모델 A와의 고유진동수의 차이가 줄어들음을 확인할 수 있다.

이러한 현상은 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과가 고차 진동모드로 갈수록 줄어들어가는 것을 의미한다. 즉, 진동모드의 차수에 따라서 진동모드형상을 1차 함수, 2차 함수 및 3차 함수 등으로 가정한다면 각 차수에 해당하는 진동모드에서는 변곡점이 발생하게 되며 고차 진동모드일수록 변곡점을 많이 발생하게 된다. 이러한 변곡점에 보와 바닥판으로 구성된 각 층이 놓이게 되면 그 층에서의 바닥판과 보는 휘지 않게 되기 때문이다. 이러한 고유진동수의 차이는 시간이력해석에 많은 영향을 미치게 된다. 시간이력해석결과는 그림 12에 나타내었으며 고유치해석 결과로 추정할 수 있듯이 시간이력해석에서도 모델 B와 모델 C는 유사한 변위 시간이력을 보여주고 있다.

그러나 모델 A는 다른 해석모델들과 매우 상이한 거동을 보여주고 있다. 이러한 원인들은 건축구조물의 지진거동의 경우에는 주로 저차모드의 영향을 많이 받기 때문이다. 따라서 예제해석결과를

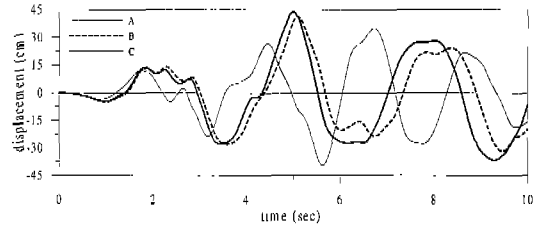


그림 12 최상층에서의 변위 시간이력 비교

통하여 얻은 결과를 정리하여 보면 바닥판과 보의 영향은 저차의 진동모드에 많은 영향을 주며 고차의 진동모드일수록 그 영향은 줄어들게 된다. 그러므로 지진해석과 같이 저차의 진동모드에 영향을 많이 주는 경우에는 바닥판의 휨 강성과 보의 편심효과를 고려하는나에 따라서 구조물의 동적거동은 많은 영향을 받게 된다.

#### 4.2 가새골조 구조물

가새골조 방식의 예제구조물에 대하여 각 해석모델의 고유진동수를 비교하여 보면 표 6과 같다. 각 해석모델에 따른 전체적인 고유진동수의 차이는 모멘트골조 구조물과 유사하게 나타내고 있다. 전체적인 고유진동수의 차이는 골조구조물에 비하여 줄어들었다는 것을 발견할 수 있는데, 이것은 가새에 의하여 횡방향의 강성이 증가되어 상대적으로 보와 바닥판의 영향이 줄어들었기 때문이다.

시간이력해석결과는 그림 13에 나타내었으며 예제구조물의 최상층에서 변위시간이력을 나타내었다. 모멘트골조 구조물과 유사한 결과를 보여주고 있다. 따라서 가새골조방식의 건축구조물에서도 모멘트골조구조물과 같이 보의 편심효과가 바닥판의

표 5 고유진동수의 비교(단위 : Hz)

모드	모델 A		모델 B		모델 C	
	고유진동수	고유진동수	차 (%)	고유진동수	차 (%)	
1	0.449	0.302	-32.74	0.327	27.17	
2	1.260	0.875	-30.56	0.939	-25.48	
3	2.165	1.503	-30.58	1.612	-25.54	
4	3.048	2.153	-29.36	2.301	-24.51	
5	3.942	2.844	-27.85	3.027	-23.21	

표 6 고유진동수의 비교(단위 : Hz)

모드	모델 A		모델 B		모델 C	
	고유진동수	고유진동수	오차 (%)	고유진동수	오차 (%)	
1	0.530	0.400	-24.53	0.421	-20.57	
2	1.564	1.240	-20.72	1.289	-17.58	
3	2.804	2.293	-18.22	2.362	-15.76	
4	4.004	3.363	-16.00	3.434	-14.24	
5	5.165	4.380	-15.20	4.416	-14.50	

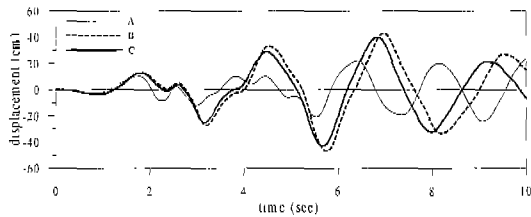


그림 13 최상층에서의 변위 시간이력 비교

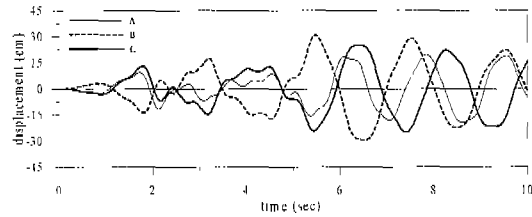


그림 14 최상층에서의 변위 시간이력 비교

휨 강성의 효과에 비하여 지진거동에 더 큰 영향을 준다는 것을 보여주고 있다.

### 4.3 전단벽보강 구조물

전단벽보강 구조물의 경우에는 가새골조 구조물과 비교하여 일반적으로 비슷한 거동을 나타낸다. 본 예제에서 사용한 전단벽보강 구조물의 경우에는 가새구조물에 비하여 전단벽의 영향으로 횡방향의 강성이 훨씬 크게 되어 있다. 고유진동수에서도 알 수 있듯이 전단벽보강 구조물이 좀 더 큰 값을 나타내고 있다. 따라서 이러한 예제를 통하여 횡방향의 강성이 더욱 증가되었을 때 보의 편심효과와 바닥판의 휨 강성의 영향이 구조물의 동적거동에 어느 정도의 영향을 미치는지를 파악할 수 있다. 먼저 표 7에 나타낸 각 해석모델의 고유진동수를 비교하였다.

모델 A에 대한 모델 B와 모델 C의 고유진동수의 차이는 비교적 크게 발생하고 있으며, 1차 진동모드의 차이는 가새골조 구조와 큰 차이가 없었다. 또한 고유진동수의 차이는 진동모드의 차수가 높아질수록 줄어들음을 확인할 수 있으며, 특히 모델 B의 경우에는 5차 진동모드의 고유진동수가 오히려 모델 A에 비하여 더욱 크게 나타나고 있다. 이것

은 모델 B가 강막가정을 사용하였기 때문 가새골조 방식의 예제구조물에서도 확인하였듯이 구조물의 측면에 배치된 전단벽에 의한 바닥판의 면내변형이 고차의 진동모드에 많은 영향을 미친다는 것을 의미한다. 변위 시간이력에 대한 해석결과는 그림 14에 나타내었다.

고유치해석 결과에서 예상할 수 있듯이 시간이력해석에서도 모델 B와 모델 C는 비슷한 해석결과를 보여주고 있지만 모델 B와 모델 C는 모델 A와 비교하여 많은 차이가 발생함을 알 수 있다. 특히 이러한 원인은 건축구조물의 지진거동에 저차의 진동모드가 많은 영향을 주기 때문에 저차의 진동모드에서 고유진동수의 차이가 적은 모델 B와 모델 C가 유사하게 나타나는 것이다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 바닥판과 T형보가 건축구조물의 지진거동에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 여러 가지 구조물에 대하여 바닥판의 영향과 T형보의 영향이 건축구조물의 지진거동에 미치는 영향에 대하여 비교 분석하였으며 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

표 7 고유진동수의 비교(단위 : Hz)

모드	모델 A		모델 B		모델 C	
	고유진동수	오차 (%)	고유진동수	오차 (%)	고유진동수	오차 (%)
1	0.617	0.481	22.04	0.503	-18.48	
2	2.189	1.891	-13.61	1.931	-11.79	
3	4.636	4.290	-7.46	4.287	7.53	
4	7.452	7.295	2.11	7.110	-4.59	
5	10.191	10.669	4.69	9.756	-4.27	

- (1) 건축구조물의 진동해석에서 보의 편심효과와 바닥판의 휨 강성에 의한 영향은 상대적으로 저차 진동모드에 많은 영향을 준다.
- (2) 횡력저항구조가 있는 경우에 강막가정을 적용하여 해석하면 고차 진동모드의 고유진동수에 많은 영향을 준다.
- (3) 건축구조물의 지진해석시에는 바닥판의 휨 강성에 의한 효과보다 보의 편심에 의한 효과가 크기 때문에 좀 더 정확한 지진거동을 파악하



기 위해서는 보의 편심효과를 고려해야 할 것으로 판단된다. 지금 현재 강막가정을 적용하는데 있어서 바닥판의 휨 강성도 고려할 수 있는 해석프로그램도 있다. 그러나 바닥판의 휨 강성만을 고려하는 것만으로는 큰 의미가 없는 것으로 판단된다. 또한 이 문제에 관해서는 좀 더 추가적인 연구가 필요하리라 판단되며, 실험 등을 통하여 기존의 모형화 방법의 문제점과 보다 진보된 모형화 방법에 대한 연구가 필요하리라 판단된다.

### 참 고 문 헌

1. Gupta, A. K. and Ma, P. S., "Short Communications Error in Eccentric Beam Formulation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 11, 1977, pp.1473~1483
2. Miller, R. E., "Reduction of the Error in Eccentric Beam Modeling," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 15, 1980, pp.575~582
3. Chan, T. H. T. and Chan, J. H. F., "The Use of Eccentric Beam Elements in the Analysis of Slab-on-Girder Bridges," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 8, No. 1, 1999, pp.85~102
4. Lee, D. G., "An Efficient Element for Analysis of Frames with Shear Walls," *ICES88*, Atlanta, 1988
5. Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., "The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs," *Proc. Inst. Civ. Eng.*, Vol. 28, 1964, pp.471~488
6. Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, 1990, pp.294~314
7. Weaver, W. and Johnston, P. R., *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, 1987, pp.444~463
8. Weaver, W., Timoshenko, S. P. and Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, Wiley, 1990, pp.534~542 