

주파수역 설계를 통한 안정한 일반형 예측제어

윤강섭*, 이만형**

Stable Generalized Predictive Control Using Frequency Domain Design

Kang Sup Yoon*, Man Hyung Lee**

ABSTRACT

GPC has been reported as a useful self-tuning control algorithm for systems with unknown time-delay and parameters. GPC is easy to understand and implement, and thus has won popularity among many practicing engineers. Despite its success, GPC does not guarantee its nominal stability. So, in this paper, GPC is rederived in frequency domain instead of in the time domain to guarantee its nominal stability. Derivation of GPC in frequency domain involves spectral factorization and Diophantine equation. Frequency domain GPC control law is stable because the zeros of characteristic polynomial are strictly Schur. Recursive least square algorithm is used to identify unknown parameters. To see the effectiveness of the proposed controller, the controller is simulated for a numerical problem that changes in dead-time, in order and in parameters.

Key Words : Generalized predictive control(일반형예측제어), Frequency domain design(주파수역 설계), Self-tuning control(자기동조제어), Spectral factorization(주파수분해)

1. 서론

일반형예측제어(Generalized Predictive Control)는 미지의 시간지연과 미지의 파라미터를 가진 시스템에 대해서 유용한 알고리즘으로 알려져 왔다^[1,2]. 이러한 일반형예측제어는 이해와 구현이 쉽다는 장점이 있으나, 안정성이 보장되지 않는 단점이 있다. 물론 안정성에 관한 많은 연구가 있었으나, mean level 이나 dead beat 제어와 같은 특별한 경우에만 한정되었고, 또한 거의 관측 불가능한 시스템에 대해서는 안정한 응답을 얻기 위해서는 매우 큰 구간을 예측해야 하는 단점이 있었다^[3,4]. 일반적인 경우에 대한 안정성문제를 해결하기 위해서 제안된 방법으로는 Clarke 등이 제안한 Constrained

Receding Horizon Predictive Control(CRHPC)^[5]와 Kouvaritakis 등이 제안한 Stable Generalized Predictive Control(SGPC)^[6] 등이 있다. CRHPC 는 Lagrange 승수를 이용한 것으로 체계적인 안정성에 관한 연구라고 보기는 어렵다. SGPC 는 Bezout 항 등식을 이용하여 시스템을 먼저 안정화 시킨 후 일반형예측제어를 적용함으로써 안정성문제를 어느 정도 해결하였고, 강인성에 관한 연구^[4]가 pre-filter 를 이용하거나 두 가지의 특정한 경우(mean level 이나 dead beat 제어)에 한정된 것과는 달리 Bezout 항등식의 Q 를 써서 체계적인 연구가 가능하게 하였다.

본 연구에서는 기존의 방법들과는 다른 방법으로 일반형예측제어의 안정성을 항상 보장할 수

2001년 2월 26일 접수
* 대구대학교, 자동차산업기계공학부
** 부산대학교, 기계공학부

있는 방법을 제안하였다. 이 방법은 일반형예측제어를 시간역이 아닌 주파수역에서 설계하는 방법으로, 설계 파라미터에 관계없이 항상 페루프 시스템의 공칭안정도를 보장할 수 있는 방법이다.

일반형예측제어를 주파수역에서 설계하기위해서는 spectral factorization 과 Diophantine 방정식을 이용하였다. 그 설계절차는 우선 주파수역에서 j-step 예측기를 유도한 후, 이를 이용하여 시간역 일반형예측제어기와 동일하게 2 자유도를 가지는 주파수역 일반형예측제어기를 유도하였다.

그리고, 제안된 주파수역 일반형예측제어가 항상 공칭안정도를 보장함을 보이고, 또한, 시간역 일반형예측제어와 주파수역 일반형예측제어의 특징과 성능을 시뮬레이션을 통해서 비교하였다.

2. 플랜트 모델

제어대상 플랜트는 이산시간 단일 입출력 시스템으로, 다음과 같은 CARIMA(Controlled Auto-Regressive Moving Average)모델로 표현되는 것으로 가정하였다.

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta} \quad (1)$$

여기서, $y(k)$ 는 출력이고, $u(k)$ 는 제어 입력이고, $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ 는 다음과 같은 후향 천이 연산자(backward shift operator) z^{-1} 의 다항식이고,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \Lambda + a_{na}z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + \Lambda + b_{nb}z^{-nb}$$

$$C(z^{-1}) = c_0 + c_1z^{-1} + \Lambda + c_{nc}z^{-nc}$$

Δ 는 후향 차분 연산자(backward difference operator)로서 $\Delta = 1 - z^{-1}$ 이고, $\xi(k)$ 는 평균이 0 이고, 분산이 Q_d 인 가우시안 백색잡음이다.

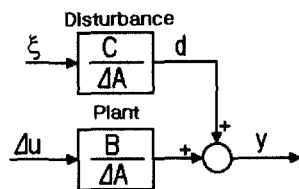


Fig. 1 Plant Model.

식(1)을 전달함수형태로 나타내면 다음과 같다.

$$y(k) = W(z^{-1})\Delta u(k) + W_d(z^{-1})\xi(k) \quad (2)$$

여기서, $W(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{\tilde{A}(z^{-1})}$, $W_d(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{\tilde{A}(z^{-1})}$,

$$\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$$

다항식 $A(z^{-1})$ 과 $B(z^{-1})$ 은, 플랜트가 어떤 불안정한 hidden mode 를 포함하지 않는 한, 반드시 서로 소(coprime)일 필요는 없다. 시스템의 극점(즉, $W(z^{-1})$ 의 극점)은 안정 혹은 불안정할 수 있다. 플랜트의 분자 다항식 $B(z^{-1})$ 는 영점이 Z-평면의 단위원내에 존재하는 Schur 다항식 또는 비최소위상 다항식일 수 있다. 그리고 잡음모델은 브라운 운동(Brownian motion)과 임의의 시간의 임의의 계단 파를 표현할 수 있도록 다항식 $C(z^{-1})$ 는 $|z|=1$ 인 단위원상에 영점을 가지지 않는 것으로 가정한다.

3. 주파수역 출력 예측기

기존의 일반형예측제어법칙 설계를 위해서 시간역에서 j-스텝 예측기를 구한 것처럼, 주파수역에서 일반형예측제어법칙을 설계하기 위하여, Wiener filter⁷⁾를 이용하여 다음과 같은 주파수역 출력예측기(j-스텝 출력 예측기)를 구한다.

[정리 1]

현재시간 k에서 지연시간이 k_d 인 경우에, $\Omega = \{y(k_1), u(k_2); k_1 \leq k, k_2 \leq k + j - k_d\}$ 와 같은 측정된 출력과 제어입력이 주어질 때, 다음의 가격함수를 최소로 하는 j-스텝 출력 예측기 $\hat{y}(k + j|k)$ 를 구하였다.

$$J^P = E[\tilde{y}^2(k + j|k) | \Omega] \quad (3)$$

여기서, $E[\bullet]$ 는 기대값(expectation)을 나타내고, $\tilde{y}(k + j|k)$ 는 추정오차로서 다음과 같다.

$$\tilde{y}(k + j|k) = y(k + j) - \hat{y}(k + j|k) \quad (4)$$

가격함수 식(3)을 최소화하는 선형 j-스텝 예측기 $\hat{y}(k + j|k)$ 은 다음의 형태로 주어진다.

$$\hat{y}(k + j|k) = H_{pj}(z^{-1})y(k) + H_0(z^{-1})z^j u(k) \quad (5)$$

여기서, $H_{pj}(z^{-1})$ 는 다음과 같고,

$$H_{pj}(z^{-1}) = \frac{H_{nj}(z^{-1})}{H_d(z^{-1})} \quad (6)$$

분모다항식 $H_d(z^{-1})$ 는 Schur spectral 다항식으로서 다음 식을 만족하고,

$$H_d H_d^* = C Q_d C^* \quad (7)$$

분자다항식 $H_{nj}(z^{-1})$ 는 다음과 같은 Diophantine 방정식을 만족하는 F_{pj} 에 대한 최소차수의 해 (H_{nj}, F_{pj})로부터 계산된다.

$$\tilde{A} F_{pj} + H_{nj} H_d^* z^{-s_p} = C Q_d C^* z^{-s_p+j} \quad (8)$$

여기서, g_p 는 위의 Diophantine 방정식이 z^{-1} 의 멱함수가 되도록 하는 최소의 양의 정수 ($g_p = nC + j$)이고, 상첨자 '*'는 다항식의 adjoint를 의미하고(즉 $A^*(z^{-1}) = A(z)$), nX 는 다항식 $X(z^{-1})$ 의 차수를 의미한다.

그리고, H_0 는 다음과 같다.

$$H_0 = (1 - z^{-j} H_p) \frac{B}{A} \quad (9)$$

정리 1의 증명은 부록에 첨부하였다.

[고찰 1]

위에서 구한 주파수역 선형 j-스텝 출력예측기의 성질을 살펴보면, $H_{pj}(z^{-1})$ 의 분모다항식인 $H_d(z^{-1})$ 가 Schur 다항식이므로, 최적 선형예측기 $H_{pj}(z^{-1})$ 는 점근적 안정이다.

그리고, 최소가격은 다음과 같다.

$$J_{\min}^p = \frac{1}{2m} \oint_{|z|=1} \frac{F_{pj} F_{pj}^*}{H_d H_d^*} \frac{dz}{z} \quad (10)$$

그리고, 최적 j-스텝 출력예측기는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{y}(k+j|k) = H_{pj} \frac{C}{\Delta A} \xi(k) + \frac{B}{A} u(k+j) = H_{pj} d(k) + W \Delta u(k+j) \quad (11)$$

여기서, $d(k) = \frac{C}{\Delta A} \xi(k)$ 는 외란이다.

4. 주파수역 일반형 예측제어법칙

본 장에서는 시간역에서 설계된 일반형 예측제어를 주파수역에서 구한다. 일반형 예측제어는 미래의 추적오차와 미래의 제어입력 증분으로 구성된 다음과 같은 다단계 가격함수를 최소화하는 현재 및 미래의 제어입력을 결정하는 문제이다^[1].

$$J^{GPC} = E \left[\sum_{j=N_1}^{N_2} \hat{e}^2(k+j|k) + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} \Delta u^2(k+j+1) \right] \quad (12)$$

여기서, $\hat{e}(k+j|k)$ 는 미래의 예측된 추적오차로서 미래의 기준입력 $r(k+j)$ 와 미래의 예측된 출력 $\hat{y}(k+j|k)$ 의 차로써 다음과 같고,

$$\hat{e}(k+j|k) = r(k+j) - \hat{y}(k+j|k) \quad (13)$$

N_1 는 최소가격구간(minimum costing horizon), N_2 는 최대가격구간(maximum costing horizon), N_u 는 제어구간(control horizon)이고, λ 는 (스칼라)제어가 중치(control weighting)이다.

시간역 일반형 예측제어기의 형태는 전처리 필터(prefilter)와 피드백루프제어기(feedback loop controller)로 구성된 2자유도 제어기로 볼 수 있으므로, 주파수역 일반형 예측제어기의 형태도 그림 2와 같이 2자유도 제어기로 구성하였다.

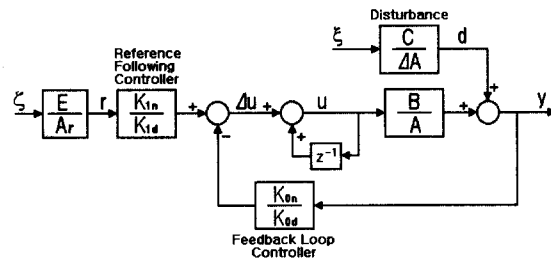


Fig. 2 Frequency Domain Generalized Predictive Control

그러므로, 유도하고자 하는 주파수역 일반형 예측제어에서 미래 제어증분 신호는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Delta u(k+j) = K_1 r(k+j) - K_0 \hat{y}(k+j|k) \quad (14)$$

여기서, $K_0(k+j)$ 는 피드백루프제어기(feedback loop controller)이고, $K_1(k+j)$ 는 기준입력추종제어기(reference following controller)이다.

$$K_0(k+j) = \frac{K_{0n}(z^{-1})}{K_{0d}(z^{-1})}, K_1(k+j) = \frac{K_{1n}(z^{-1})}{K_{1d}(z^{-1})} \quad (15)$$

기준입력 $r(k)$ 는 백색잡음 $\zeta(k)$ 에 의해서 생성되는 것으로 가정하여, 다음과 같이 표현하였다.

$$r(k) = W_r(z^{-1}) \zeta(k) \quad (16)$$

여기서, $W_r(z^{-1}) = E(z^{-1})/A_r(z^{-1})$ 으로 점근적 안정이고, causal 이라고 가정한다. 다항식 $E(z^{-1})$ 는 단위원 $|z|=1$ 상에 영점을 가지지 않는 것으로 가정한다. $\zeta(k)$ 는 평균이 0이고 분산이 Q_r 인 가우시안 백색잡음으로, 외란의 모델링 시에 사용된 백

색잡음 $\xi(k)$ 과 상호 독립이다.

[정리 2]

플랜트의 지연시간을 모른다는 가정 하에 $N_1=1$ 로 두고, $N_u=N_2$ 로 가정하고, 미래의 기준 입력신호 $r(k+j)$ 는 미리 알고있는 것으로 가정하면, 일반형예측제어 가격함수 식(12)를 최소화하는 최적피드백루프제어기와 최적입력추종제어기는 각각 다음과 같다^{7,8)}.

$$K_0^{opt} = \frac{G}{H} \quad (17)$$

$$K_1^{opt} = \frac{D_f M z^{N_2-1}}{D, H} \quad (18)$$

식(17)의 최적피드백제어기는 다음과 같은 연성된 두개의 Diophantine 방정식에서 F 에 대한 최소차수의 해(G, H, F)로부터 계산할 수 있다.

$$D_c^* G z^{-g_s} + \tilde{A} F = D_f B^* z^{-g_s} \quad (19)$$

$$D_c^* H z^{-g_s} + B F z^{-1} = \lambda \tilde{A}^* D_f z^{-g_s} \quad (20)$$

그리고, 식(18)의 최적입력추종제어기는 다음과 같은 Diophantine 방정식에서 N 에 대한 최소차수의 해(M, N)로부터 계산할 수 있다.

$$D_c^* M z^{-g_r} + A, N = B^* D_r z^{-g_r+N_2+2} \quad (21)$$

여기서, D_f, D_c, D_r 은 strictly Schur spectral 다항식으로 다음과 같다.

$$D_f D_f^* = \sum_{j=1}^{N_2} H_{pj} C C^* H_{pj}^* \quad (22)$$

$$D_c D_c^* = B B^* + \lambda \tilde{A} \tilde{A}^* \quad (23)$$

$$D_r D_r^* = \sum_{j=1}^{N_2} E Q_r E^* \quad (24)$$

그리고, g_g 와 g_r 는 위의 다항식이 z^{-1} 의 멱함수가 되도록 하는 최소의 양의 정수로서, $g_g = \max(nD_c, nB+1, nA)$, $g_r = \max(nD_c, nB - N_2 + 2)$ 이다.

정리 2 의 증명은 부록에 첨부하였다.

[고찰 2]

위의 최적제어기를 사용할 경우, 페루프 시스템의 특성방정식은 다음과 같다.

$$\tilde{A} K_{Od} + B K_{On} z^{-1} = 0 \text{ or } \tilde{A} H + B G z^{-1} = 0 \quad (25)$$

한편, 두개의 Diophantine 방정식 식(19), (20)으로부터 F 를 소거하면 다음과 같다.

$$\tilde{A} H + B G z^{-1} = D_c D_f \quad (26)$$

여기서, D_c 와 D_f 는 strictly Schur spectral 다항식이므로, 페루프 시스템은 항상 안정하다.

그리고 가격함수 식(A.39)에서 제어기와 독립적인 항들이 다음과 같으므로,

$$T_1^{-1} T_1^{-*} = \frac{F F^*}{D_c D_c^*}, \quad T_2^{-1} T_2^{-*} = \frac{N N^*}{D_c D_c^*},$$

$$T_1^0 = \frac{\lambda D_f D_f^*}{D_c D_c^*}, \quad T_2^0 = \frac{\lambda \tilde{A} D_r D_r^* \tilde{A}^*}{A_r D_c D_c^* A_r^*} \quad (27)$$

최소가격은 다음과 같다.

$$J_{\min}^G = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left\{ \frac{F F^*}{D_c D_c^*} + \frac{N N^*}{D_c D_c^*} + \frac{\lambda D_f D_f^*}{D_c D_c^*} + \frac{\lambda \tilde{A} D_r D_r^* \tilde{A}^*}{A_r D_c D_c^* A_r^*} \right\} \frac{dz}{z} \quad (28)$$

5. 자기동조 주파수역 일반형 예측제어법칙

이상에서 구한 주파수역 일반형예측제어기법을 미지의 시스템 파라미터인 경우로 확장하기 위해서, 그림 3 과 같은 시스템 파라미터를 추정된 후 추정된 파라미터로부터 제어법칙의 파라미터를 구하는 간접적응제어 방법인 자기동조제어기의 기본구조를 채택하였다. 파라미터 추정기로서는 exponential forgetting 을 가진 recursive least-squares estimation 알고리즘¹⁰⁾을 사용하였다.

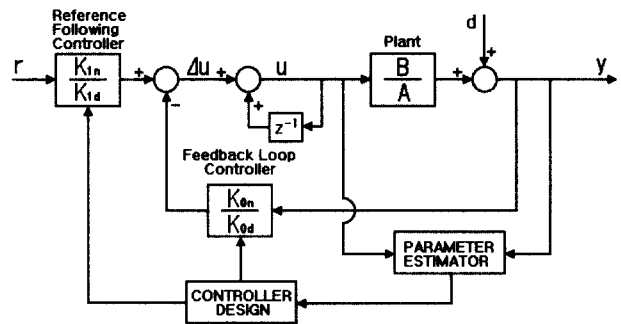


Fig. 3 Self-tuning Frequency Domain Generalized Predictive Control

이상과 같이 구성된 자기동조 주파수역 일반형 예측제어기법의 그 계산절차는 다음과 같다.

- ① 예측구간 및 제어가중치의 선택
- ② 파라미터 추정기를 사용하여, 시스템 파라미터 $A(z^{-1})$ 와 $B(z^{-1})$ 를 추정
- ③ 추정된 시스템 파라미터를 이용하여, j-step 출력 예측기 (식(7), (8))를 계산
- ④ Schur spectral 다항식 D_f, D_c, D_r (식(22), (23), (24))의 계산
- ⑤ Diophantine 방정식 식(19), (20), (21)로부터 G, H, F, M, N 의 계산
- ⑥ 식(17), 식(18)로부터 최적제어기를 결정
- ⑦ 식(14)로부터 처음단계의 제어증분을 계산하여, 이전단계의 제어값에 더하여 현재의 제어값을 결정하여, 플랜트에 인가
- ⑧ 각 스텝마다 ②-⑦단계를 반복

제안된 주파수역 일반형 예측제어의 특징을 시간역 일반형 예측제어와 비교하면 다음과 같다. 우선, 주파수역 일반형 예측제어는 제어구간을 고려하지 않는 경우의 시간역 일반형 예측제어와 동일한 설계변수($N_1=1, N_2, N_u=N_2, \lambda$)를 가진다. 또한 시간역 일반형 예측제어와 같은 2자유도 제어기 구조인 후퇴구간(receding horizon)제어이다.

플랜트의 모델을 알고 있는 경우에, 시간역 일반형 예측제어는 mean level 이나 dead beat 제어와 같은 경우 이외에는 안정성이 보장되지 않는 단점이 있지만, 주파수역 일반형 예측제어에서는 페루프 시스템의 특성방정식이 항상 strictly Schur 다항식이므로 안정성이 보장된다. 하지만 이것이 후퇴구간제어로 수행되는 자기동조 주파수역 일반형 예측제어가 안정하다는 것을 직접 의미하지는 않는다. 그러나, 만일 플랜트와 외란 전달함수가 시불변이고, 설계 파라미터가 고정된 경우에는 제어기는 고정되므로, 이 경우에 페루프 시스템의 특성 다항식은 strictly Schur 다항식이 되므로, 주파수역 일반형 예측제어법칙은 페루프 시스템을 안정화시킨다고 볼 수 있다.

6. 시뮬레이션

제안된 주파수역 일반형 예측제어의 성능을 조사하기 위해서, ① 불안정한 비최소위상 플랜트, ② 지연시간, 차수, 파라미터가 변하는 플랜트에 대해

서 시간역 일반형 예측제어와 비교하였다. 그리고 시뮬레이션은 상용 S/W 인 Matlab 을 사용하여 수행하였다.

1) 불안정한 비최소위상 플랜트

두 제어기의 안정도를 보기 위해서, 다음과 같은 불안정한 비최소위상 시스템을 고려하였다.

$$G(s) = \frac{-0.5(s-0.5)}{(s-1)(s-0.25)} \quad (29)$$

설계 파라미터인 예측구간, 제어구간, 제어입력가중요소의 변화에 대한 두 제어기의 시뮬레이션 결과는 그림 4, 5 에 나타내었다. 두 경우에 제어기의 샘플링시간은 1 초로 하였고, 기준입력은 10 초에 작용하는 단위스텝함수를 사용하였다.

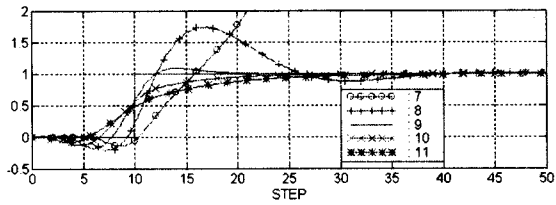
시뮬레이션 결과를 안정도 측면에서 보면, 그림 4 의 시간역 일반형 예측제어는 설계 파라미터의 선택에 따라 안정성이 좌우되므로 설계 파라미터의 적절한 선택이 필요함을 알 수 있다. 그러나 그림 5 의 제안된 주파수역 일반형 예측제어는 설계 파라미터에 관계없이 항상 안정함을 알 수 있다. 그리고 성능면에서 살펴보면, 시간역 일반형 예측제어에서 설계 파라미터를 적절히 선정한다면 두 제어기는 거의 동일한 제어성능을 나타냄을 알 수 있다.

2) 지연시간, 차수, 파라미터가 변하는 플랜트

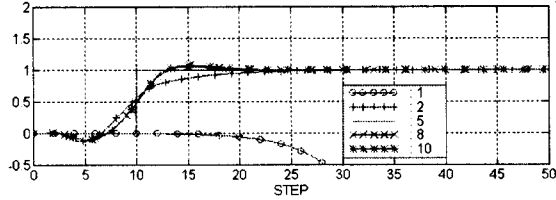
제안된 주파수역 일반형 예측제어의 성능을 시간역 일반형 예측제어와 비교하기 위해서, Table 1 과 같은 지연시간, 차수, 파라미터가 변하는 플랜트^[11]에 대해서 시뮬레이션을 수행하였다.

제어기의 샘플링시간은 1 초로 하였고, 처음 10 스텝동안은 파라미터의 추정을 위해서 제어입력을 10 으로 고정하였다. 시스템 파라미터의 추정을 위해서 $A(z^{-1})$ 와 $B(z^{-1})$ 를 각각 2 차와 6 차 다항식으로 가정하였고, 시간지연을 모른다는 가정 하에, 설계 파라미터는 $N_1=1, N_2=N_u=10, \lambda=0.01$ 로 선정하였다.

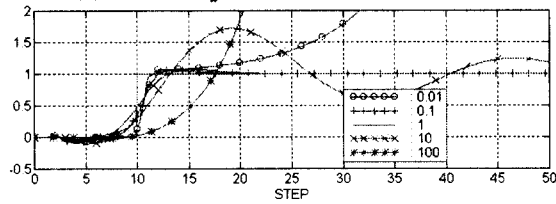
위와 같은 조건으로 시뮬레이션을 수행하여 그 결과를 그림 6, 7 에 나타내었고, 그림 6, 7 로부터 시간역 일반형 예측제어와 주파수역 일반형 예측제어 모두 양호한 응답특성을 나타냄을 알 수 있다.



(a) $N = 7/8/9/10/11$, $N_u = 2$, $\lambda = 1$

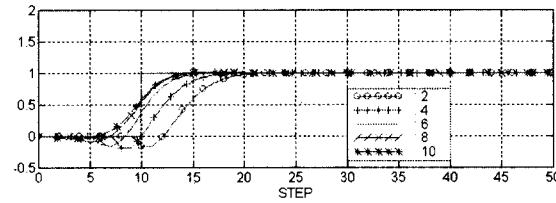


(b) $N = 10$, $N_u = 1/2/5/8/10$, $\lambda = 1$

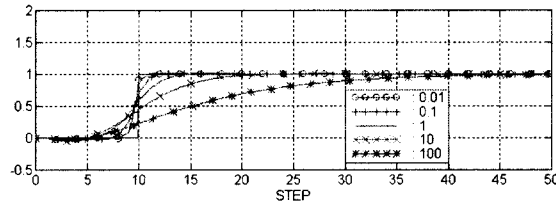


(c) $N = 10$, $N_u = 10$, $\lambda = 0.01/0.1/1/10/100$

Fig. 4 The output of time domain Generalized Predictive Control



(a) $N = N_u = 2/4/6/8/10$, $\lambda = 1$



(b) $N = N_u = 10$, $\lambda = 0.01/0.1/1/10/100$

Fig. 5 The output of frequency domain Generalized Predictive Control

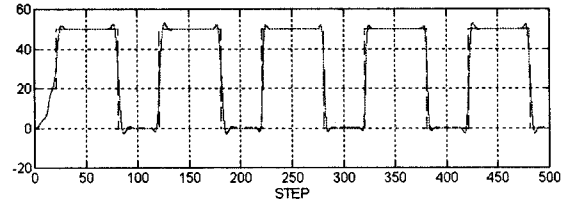


Fig. 6 The output of time domain Generalized Predictive Control

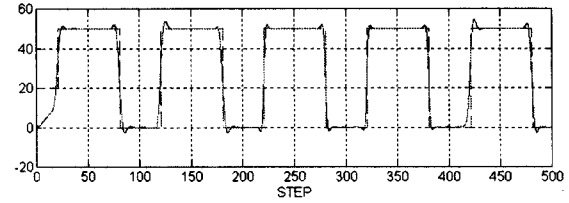


Fig. 7 The output of frequency domain Generalized Predictive Control

Table 1 Transfer functions of the simulated models

Number	Samples	Model
1	1-100	$\frac{1}{1+10s+40s^2}$
2	101-200	$\frac{e^{-1.5s}}{1+10s+40s^2}$
3	201-300	$\frac{e^{-1.5s}}{1+10s}$
4	301-400	$\frac{1}{1+10s}$
5	401-500	$\frac{1}{10s(1+2.5s)}$

7. 결론

본 연구에서는 일반형예측제어의 공칭안정도를 보장하기 위해서, 시간역 설계 대신에 주파수역 설계를 통한 안정한 주파수역 일반형예측제어를 제안하였다.

주파수역에서 일반형예측제어를 설계하기 위해서, 우선 주파수역에서 출력예측기를 구성하고, 기존의 일반형예측제어와 같은 2 자유도를 갖는 주파수역 일반형예측제어를 구성하였다. 그리고 미지의 파라미터와 지연시간을 가진 시스템에 적용

할 수 있도록, 자기동조제어 구조를 채택하여 자기동조 주파수역 일반형예측제어를 구성하였다.

제안된 주파수역 일반형예측제어는 설계 파라미터에 관계없이 항상 안정한 페루프 제어시스템의 설계가 가능하였다. 불안정한 비최소위상 시스템에 대한 시뮬레이션을 통해서 기존의 시간역에서 설계된 일반형예측제어는 설계 파라미터에 따라 안정도가 좌우되지만 제안된 주파수역 일반형예측제어는 항상 안정함을 확인하였다. 또한 지연 시간, 차수, 파라미터가 변하는 플랜트에 대한 시뮬레이션을 통해서 제안된 주파수역 일반형예측제어는 시간역에서 설계된 기존의 일반형예측제어와 거의 유사한 성능을 나타냄을 알 수 있었다.

그리고, 제안된 주파수역 일반형예측제어에서 측정잡음을 고려하는 방법과 강인성에 대한 연구가 계속되어야 할 것으로 생각된다.

후 기

이 논문은 2000 학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 논문입니다.

참고문헌

1. Clarke, D. W., Mohtadi, C., and Tuffs, P. S., "Generalized Predictive Control - Part I. The Basic Algorithm," *Automatica*, Vol. 23, pp. 137 - 148, 1987.
2. Clarke, D. W., Mohtadi, C., and Tuffs, P. S., "Generalized Predictive Control - Part II. Extensions and Interpretations," *Automatica*, Vol. 23, pp. 149 - 160, 1987.
3. Clarke, D. W., and Mohtadi, C., "Properties of Generalized Predictive Control," *Automatica*, Vol. 25, No. 6, pp. 859 - 875, 1989.
4. Clarke, D. W., and Robinson, B. D., "Robustness Effects of a Prefilter in Generalized Predictive Control," *IEE Proceedings, Part D*, Vol. 138, No. 1, pp. 2 - 8, 1991.
5. Clarke, D. W., and Scattolini, R., "Constrained Receding-Horizon Predictive Control," *IEE Proceedings, Part D*, Vol. 138, No. 4, pp. 347 - 354, 1991.
6. Kouvaritakis, B., Rossitar, J. A., and Chang, A. O. T., "Stable Generalized Predictive Control: an algorithm

with guaranteed stability," *IEE Proceedings, Part D*, Vol. 139, No. 4, pp. 349 - 362, 1992.

7. Grimble, M. J., "Polynomial Systems Approach to Optimal Linear Filtering and Prediction," *International Journal of Control*, Vol. 41, No. 6, pp. 1545 - 1564, 1985.
8. Grimble, M. J., *Robust Industrial Control - Optimal Design Approach for Polynomial Systems*, Prentice Hall, 1994.
9. Grimble, M. J., and John, A., *Optimal Control and Stochastic Estimation: Theory and Application, Volume I, II*, John Wiley & Sons, 1988.
10. Astrom, K. J., and Wittenmark, B., *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1989.
11. Mohtadi, C., and Clarke, D. W., and, "Generalized Predictive Control, LQ, or Pole-Placement: A unified approach," *Proceedings of the 25th Conference on Decision and Control*, pp. 1536 - 1541, 1986.
12. 윤강섭, 이만형, "GPC 기법을 이용한 자기동조 PID 제어기설계," *한국정밀공학회지*, 제 13 권, 제 5 호, pp. 139-147, 1996.

부 록

[정리 1의 증명]

우선 식(4)의 추정오차 $\tilde{y}(k+j|k)$ 에서, $y(k+j)$ 항은 식(1)로부터 다음과 같이 구해지고,

$$y(k+j) = \frac{z^j B}{A} u(k) + \frac{z^j C}{\Delta A} \xi(k) \quad (A.1)$$

$\hat{y}(k+j|k)$ 항은 식(5)에 식(2)를 대입하여 정리하면, 다음과 같이 구해지므로,

$$\hat{y}(k+j|k) = H_{pj} \left\{ \frac{B}{A} u(k) + \frac{C}{\Delta A} \xi(k) \right\} + H_0 z^j u(k) \quad (A.2)$$

추정오차 $\tilde{y}(k+j|k)$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{y}(k+j|k) = \left\{ \frac{B}{A} (1 - z^{-j} H_{pj}) - H_0 \right\} z^j u(k) + \frac{C}{\Delta A} (1 - z^{-j} H_{pj}) z^j \xi(k) \quad (A.3)$$

추정이 unbiased(즉, $E\{\tilde{y}(k+j|k)\} = 0$) 이어야 하므로, H_0 는 다음과 같다.

$$H_0 = (1 - z^{-j} H_{pj}) \frac{B}{A} \quad (A.4)$$

그러므로, 추정오차 $\tilde{y}(k+j|k)$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{y}(k+j|k) = \frac{C}{A}(1-z^{-j}H_{pj})z^j\xi(k) \quad (A.5)$$

가격함수 식(3)은 식(A.5)와 이산시간 Parseval 정리를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다⁹⁾.

$$J^P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \Phi_{\tilde{y}\tilde{y}} \frac{dz}{z} \quad (A.6)$$

$$\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = (1-z^{-j}H_{pj})z^j \frac{C}{A} \Phi_{\xi\xi} \frac{C^*}{A^*} z^{-j} (1-z^{-j}H_{pj})^*$$

여기서, $\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}}$, $\Phi_{\xi\xi}$ 는 각각 추정오차 $\tilde{y}(k+j|k)$, 백색잡음 $\xi(k)$ 의 power-density spectra 이다.

$\xi(k)$ 의 분산이 Q_d 이므로, $\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}}$ 는 다음과 같다.

$$\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = \frac{CQ_dC^*}{AA^*} - \frac{CQ_dC^*}{AA^*} z^j H_{pj}^* - \frac{CQ_dC^*}{AA^*} z^{-j} H_{pj} + H_{pj} \frac{CQ_dC^*}{AA^*} H_{pj}^* \quad (A.7)$$

식(7)의 Schur spectral 다항식 H_d 를 이용하여 식(A.7)을 다음의 완전제곱형태로 표현할 수 있다.

$$\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = \{z^j \frac{CQ_dC^*}{AH_d^*} - H_{pj} \frac{H_d^*}{A}\} \{z^j \frac{CQ_dC^*}{AH_d} - H_{pj} \frac{H_d}{A}\}^* \quad (A.8)$$

한편, 식(A.8)의 제곱항은 Diophantine 방정식 식(8)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$z^j \frac{CQ_dC^*}{AH_d^*} - \frac{H_{pj}H_d^*}{A} = \frac{F_{pj}}{H_d^*} z^{s_p} \quad (A.9)$$

그러므로, 가격함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$J^P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{F_{pj}F_{pj}^*}{H_dH_d^*} \frac{dz}{z} \quad (A.10)$$

여기서, $F_{pj}F_{pj}^*/H_dH_d^*$ 항은 예측기와 무관한 항이므로, 위의 가격함수는 최소가격이 된다.

[정리 2의 증명]

가격함수 식(12)는 이산시간 Parseval 정리를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다⁹⁾.

$$J^G = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left\{ \sum_{j=1}^{N_2} \Phi_{e_j e_j} + \lambda \sum_{j=1}^{N_1} \Phi_{\Delta u_j \Delta u_j} \right\} \frac{dz}{z} \quad (A.11)$$

여기서, Φ_{e_e} 와 $\Phi_{\Delta u \Delta u}$ 는 $\hat{e}(k+j|k)$ 와 $\Delta u(k+j-1)$ 의 power-density spectra 이다.

미래의 제어입력증분 $\Delta u(k+j-1)$ 은 식(14)에 식(11)을 대입하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta u(k+j-1) = K_1 S r(k+j-1) - H_{pj} K_0 S d(k-1) \quad (A.12)$$

여기서, $S = 1/(1+K_0W)$ 는 감도함수이다.

예측된 추적오차 $\hat{e}(k+j|k)$ 는 식(13)에 식(11),

(A.12)를 대입하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{e}(k+j|k) = (1-K_1SW)r(k+j) - H_p(1-K_0SW)d(k) \quad (A.13)$$

그러므로, 가격함수 식(A.11)은 식(A.12), (A.13)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J^G = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \{T_1(z^{-1}) + T_2(z^{-1})\} \frac{dz}{z} \quad (A.14)$$

$$T_1(z^{-1}) = \sum_j (1-K_0SW)H_{pj}\Phi_{dd}H_{pj}^*(1-K_0SW)^* + \sum_j \lambda K_0SH_{pj}\Phi_{dd}H_{pj}^*S^*K_0^* \quad (A.15)$$

$$T_2(z^{-1}) = \sum_j (1-K_1SW)\Phi_{rr}(1-K_1SW)^* + \sum_j \lambda K_1S\Phi_{rr}S^*K_1^* \quad (A.16)$$

여기서, Φ_{dd} 와 Φ_{rr} 는 외란 $d(k)$ 와 기준입력 $r(k+j)$ 의 power-density spectra 이다.

일반화된 spectral factor 를 Y_f, Y_r, Y_c 를 다음과 같이 정의하면,

$$Y_f Y_f^* = \sum_j H_{pj} \Phi_{dd} H_{pj}^* \quad (A.17)$$

$$Y_r Y_r^* = \sum_j \Phi_{rr} \quad (A.18)$$

$$Y_c Y_c^* = WW^* + \lambda \quad (A.19)$$

가격함수에서 $T_1(z^{-1}), T_2(z^{-1})$ 는 다음과 같은 완전제곱형태로 표현할 수 있다.

$$T_1(z^{-1}) = (SK_0 Y_c Y_f - \frac{W^* Y_f}{Y_c^*}) (SK_0 Y_c Y_f - \frac{W^* Y_f}{Y_c^*})^* + Y_f Y_f^* - \frac{W Y_f Y_f^* W^*}{Y_c Y_c^*} \quad (A.20)$$

$$T_2(z^{-1}) = (SK_1 Y_c Y_r - \frac{W^* Y_r}{Y_c^*}) (SK_1 Y_c Y_r - \frac{W^* Y_r}{Y_c^*})^* + Y_r Y_r^* - \frac{W Y_r Y_r^* W^*}{Y_c Y_c^*} \quad (A.21)$$

한편, 식(A.17)-(A.19)를 식(11), 식(16), 식(2)를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$Y_f Y_f^* = \sum_j H_{pj} \Phi_{dd} H_{pj}^* = \sum_j \frac{H_{pj} C Q_d C^* H_{pj}^*}{\tilde{A} \tilde{A}^*} \quad (A.22)$$

$$Y_r Y_r^* = \sum_j \Phi_{rr} = \sum_j \frac{E Q_r E^*}{A_r A_r^*} \quad (A.23)$$

$$Y_c Y_c^* = \frac{\lambda \tilde{A} \tilde{A}^* + B B^*}{\tilde{A} \tilde{A}^*} \quad (A.24)$$

그러므로, 일반화된 spectral factor Y_f, Y_r, Y_c 는

식(22)-(24)의 strictly Schur spectral 다항식 D_f , D_c , D_r 을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_f = \frac{D_f}{A} \quad (A.25)$$

$$Y_r = \frac{D_r}{A_r} \quad (A.26)$$

$$Y_c = \frac{D_c}{A} \quad (A.27)$$

식(A.20)에서 $SK_0 Y_f Y_c$ 항과 $W^* Y_f / Y_c^*$ 항은 식(19)를 이용하여 다음과 같이 표현되므로,

$$SK_0 Y_c Y_f = \frac{D_f D_c K_{0n}}{\tilde{A}(\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})} \quad (A.28)$$

$$\frac{W^* Y_f}{Y_c^*} = \frac{B^* D_f z}{\tilde{A} D_c^*} = \frac{G}{A} + \frac{F}{D_c^* z^{-g_s}} \quad (A.29)$$

식(A.20)의 제곱항은 식(A.28), (A.29)와 식(26)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$SK_0 Y_c Y_f - \frac{W^* Y_f}{Y_c^*} = \frac{HK_{0n} - GK_{0d}}{\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1}} - \frac{F}{D_c^* z^{-g_s}} \quad (A.30)$$

식(A.30)에서 $(HK_{0n} - GK_{0d})/(\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})$ 항은 식(25), (26)으로부터 점근적 안정함을 알 수 있고, $F/D_c^* z^{-g_s}$ 항은 D_c 가 Schur 다항식이므로 불안정하다. 그러므로, 식(A.20)의 제곱항은 다음과 같이 안정된 항과 불안정한 항으로 분리할 수 있다.

$$SK_0 Y_c Y_f - \frac{W^* Y_f}{Y_c^*} = T_1^+ - T_1^- \quad (A.31)$$

여기서, $T_1^+ = \frac{HK_{0n} - GK_{0d}}{\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1}}$, $T_1^- = \frac{F}{D_c^* z^{-g_s}}$

다음으로, 식(A.21)에서 $SK_1 Y_c Y_r$ 항과 $W^* Y_r / Y_c^*$ 항은 식(21)을 이용하여 다음과 같이 표현되므로,

$$SK_1 Y_c Y_r = \frac{D_r D_r K_{0d} K_{1n}}{A_r K_{1d} (\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})} \quad (A.32)$$

$$\frac{W^* Y_r}{Y_c^*} = \frac{B^* D_r z}{A_r D_c^*} = \frac{Mz^{N_2-1}}{A_r} + \frac{Nz^{g_r+N_2-1}}{D_c^*} \quad (A.33)$$

식(A.21)의 제곱항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & SK_1 Y_c Y_r - \frac{W^* Y_r}{Y_c^*} \\ &= \frac{D_c D_r K_{0d} K_{1n} - MK_{1d} z^{N_2-1} (\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})}{A_r K_{1d} (\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})} \\ & \quad - \frac{Nz^{g_r+N_2-1}}{D_c^*} \end{aligned} \quad (A.34)$$

식(A.34)에서 우변 첫번째 항은 식(25), (26)으로부터 점근적 안정함을 알 수 있고, $Nz^{g_r+N_2-1}/D_c^*$

항은 D_c 가 Schur 다항식이므로 불안정하다. 그러므로, 식(A.21)의 제곱항을 다음과 같이 안정한 항과 불안정한 항으로 분리할 수 있다.

$$SK_1 Y_c Y_r - \frac{W^* Y_r}{Y_c^*} = T_2^+ - T_2^- \quad (A.35)$$

여기서, $T_2^- = \frac{Nz^{g_r+N_2-1}}{D_c^*}$,

$$T_2^+ = \frac{D_c D_r K_{0d} K_{1n} - MK_{1d} z^{N_2-1} (\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})}{A_r K_{1d} (\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})}$$

가격함수 식(A.14)를 식(A.20), (A.21), (A.31), (A.35)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} J^G &= \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \{ (T_1^+ - T_1^-)(T_1^+ - T_1^-)^* + T_1^0 \\ & \quad + (T_2^+ - T_2^-)(T_2^+ - T_2^-)^* + T_2^0 \} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (A.36)$$

여기서, $T_1^0 = Y_f Y_f^* - \frac{W Y_f Y_f^* W^*}{Y_c Y_c^*}$, $T_2^0 = Y_r Y_r^* - \frac{W Y_r Y_r^* W^*}{Y_c Y_c^*}$

가격함수 식(A.36)에서, $T_i^- T_i^{*+}$ ($i=1,2$) 항은 $|z| \leq 1$ 에서 해석적이므로, 유수정리(residue theorem)에 의해 다음과 같으므로,

$$\oint T_i^- T_i^{*+} \frac{dz}{z} = 0 \quad (i=1,2) \quad (A.37)$$

$$\oint T_i^{*-} T_i^+ \frac{dz}{z} = - \oint T_i^- T_i^{*+} \frac{dz}{z} = 0 \quad (i=1,2) \quad (A.38)$$

가격함수 식(A.36)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J^G &= \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \{ T_1^+ T_1^{*+} + T_1^- T_1^{*-} + T_2^+ T_2^{*+} \\ & \quad + T_2^- T_2^{*-} + T_1^0 + T_2^0 \} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (A.39)$$

가격함수 내의 $T_1^- T_1^{*-}$, $T_2^- T_2^{*-}$, T_1^0 , T_2^0 항들은 제어기와 독립적이므로, $T_1^+ T_1^{*+}$ 와 $T_2^+ T_2^{*+}$ 가 0 일 때, 즉 T_1^+ 와 T_2^+ 가 0 일 때 가격함수는 최소가 된다.

$T_1^+ = 0$ 과 $T_2^+ = 0$ 으로부터 최적피드백제어기와 최적기준입력추종제어기를 구할 수 있다.

$$K_0^{opt} = \frac{K_{0n}^{opt}}{K_{0d}^{opt}} = \frac{G}{H} \quad (A.40)$$

$$\begin{aligned} K_1^{opt} &= \frac{K_{1n}^{opt}}{K_{1d}^{opt}} = \frac{Mz^{N_2-1} (\tilde{A}K_{0d} + BK_{0n}z^{-1})}{D_c D_r K_{0d}} \\ &= \frac{D_f Mz^{N_2-1}}{D_r H} \end{aligned} \quad (A.41)$$