

가중함수에 따른 능동제어 알고리즘의 비교 연구

Comparative Study on Active Control Algorithms through Weighting Functions

민 경 원* 김 진 구** 김 성 춘*** 정 란****
Min, Kyung-Won Kim, Jin-Koo Kim, Sung-Choon Chung, Lan

(논문접수일 : 2000년 10월 4일 ; 심사종료일 : 2001년 6월 11일)

요 지

성능지수는 제어 대상이 되는 구조물의 응답과 제어기의 성능에 관한 가중함수로 구성되어 있다. 따라서 가중함수의 설계에 따라 성능지수가 변화되며 제어 효율이 달라진다. 본 논문에서는 최적 능동제어 알고리즘의 일종인 시간 영역에서의 성능지수를 고려한 LQR기법과 LQG기법 및 주파수 영역에서의 성능지수를 고려한 H_2 기법에 대하여 동일한 가중함수를 적용하여 제어 성능인 제어율과 제어력을 비교하는데 목적을 두고 있다. 분석 결과 LQR 기법이 제어율이 가장 좋으나 제어력이 크게 나와 제어 효과가 다른 기법에 비하여 반감되는 것을 알 수 있었다. 그러나, LQG기법은 모든 상태 변수를 알아야 하는 LQR기법의 한계를 극복할 수 있으며 LQR기법과 동일 수준의 제어율과 제어력을 보이고 있고 출력 제어라는 장점을 고려하면 현실적인 기법이라고 말할 수 있다. 마지막으로 구조물 응답과 제어기의 주파수 특성을 고려하여 주파수 필터의 가중함수를 설계하는 H_2 기법을 분석하였다. H_2 기법은 제어력을 저주파수 영역에 집중시킬 수 있기 때문에 구조물 응답을 효과적으로 제어할 수 있는 방법으로 분석되었다.

핵심용어 : 가중 함수, 주파수 영역, 제어 기법, 능동 제어, H_2 알고리즘

Abstract

The cost function consists of the weighting functions concerning the structural responses to be controlled and the controller capability. Therefore, the control efficiency depends on the characteristics of the weighting functions. The objective of this paper is the comparative study of the time domain control strategies of LQR and LQG and the frequency domain strategy of H_2 by setting the equivalent weighting functions to the all control strategies. As a result of analysis, LQR strategy is found to be more efficient than other strategies in terms of the response reduction, but the control force is found to be a little higher. As LQG can compensate the limitation of LQR that all state variables should be identified, LQG is more acceptable algorithm than LQR. Furthermore LQG shows a good performance both in the response reduction and the control force. Finally H_2 algorithm is employed to illustrate the importance of weighting filters considering the frequency characteristics of the response and the controller. It is shown that the H_2 algorithm is found to be the most effective one for the response control with a little control force having a low frequency band.

Keywords : weighting function, frequency domain, control strategy, active control, H_2 algorithm

* 정회원 · 인천대학교 건축공학과, 교수
** 정회원 · 성균관대학교 건축공학과, 교수
*** 엔에스브이(주) 기술연구소, 연구원
**** 정회원 · 단국대학교 건축공학과, 교수

· 이 논문에 대한 토론을 2001년 9월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

능동제어의 대부분은 성능지수 또는 가격함수의 최적화를 통한 제어기 설계이므로 성능지수를 무엇으로 설정하느냐에 따라 제어의 목표가 변화하게 된다. 일반적으로 구조물 응답의 특정한 부분과 제어를 구현하는 구동기의 능력을 의미하는 제어력을 성능지수의 기본 변수로 설정하여 제어를 설계하고 응답을 제어하게 된다.¹⁾ 이때 제어대상이 되는 응답과 제어력 양의 상대적인 비고를 나타내는 가중치 또는 가중함수를 조절하여 현실적인 구동기를 택하고 제어를 하게 된다. 성능이 좋은 구동기는 원하는 제어력을 발휘할 수 있기 때문에 구조물의 응답을 매우 감소시킬 수 있으나, 비경제적인 또는 비현실적인 구동기가 필요하게 되므로 제어기 설계가 가능하지 않게 되는 경우가 있다. 따라서 제어 설계자는 가중함수의 적절한 선택을 하여 항상 제어기와 응답제어를 살펴보아야 한다.

본 연구에서는 최적제어인 LQR(Linear Quadratic Regulator)¹⁾, LQG(Linear Quadratic Gaussian Regulator)²⁾와 H₂에 이용되는 알고리즘의 가중함수를 통하여 응답제어, 전달함수 그리고 제어력 등을 분석하고 성능을 비교하기로 한다. LQR과 LQG 같은 제어 알고리즘의 가중함수는 시간영역(time domain)의 제어력과 응답에 관한 것으로 주파수에 관한 특성이 고려되지 않고 모든 주파수에 대하여 일정한 가중치가 적용되는 것이다. 그러나 건축 및 토목 구조물과 같은 저주파수의 특성을 나타내는 응답, 고주파수의 제어력을 구현하기 힘든 구동기의 한계, 실제의 응답이 아닌 여러 고주파수의 잡음 등 일련의 신호는 시간영역 대신 주파수영역(frequency domain)으로 표현할 때 그 특성이 나타난다. H₂ 제어알고리즘은 응답과 제어력의 주파수 특성을 고려한 가중함수를 적용하여 제어 효율을 높인 방법이다. 따라서 본 연구에서는 각 알고리즘에 동일한 가중함수를 적용하여 제어성능을 분석하기로 한다.

2. 능동제어 알고리즘

2.1 LQR 알고리즘

시스템을 제어하는 최적제어 이론 중에 상태공간 모델(state-space model)을 이용한 LQR알고리즘은 다음과 같이 표현된다.¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, A, B, C 는 시스템 행렬, x 는 시스템의 상태 벡터, u 는 제어력 그리고 y 는 측정된 구조물의 측정 벡터이다. 식(1)과 같은 상태공간 모델에 대한 2차 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

여기서 양의 반한정 대칭행렬(positive semidefinite symmetric matrix)인 Q 는 상태가중행렬(weighting matrix)로 상태변수(변위, 속도)를 제어 대상으로 하여 Q 가 클수록 상태변수를 최적으로 조절하고, R 는 양의 한정 대칭행렬(positive definite symmetric matrix)인 제어가중행렬로 제어력을 제어대상으로 값이 클수록 제어력의 크기를 최적으로 한다. 최적제어 문제는 상태방정식하에 가격함수를 최소화하는 제어력을 찾는 문제로서, 최적제어가 유일하게 존재할 뿐 아니라 실시간에서 모든 상태변수를 측정할 수 있다면 최적제어력 $u(t)$ 를 다음과 같이 상태변수 x 의 피드백 형태로 나타낼 수 있다.

$$u = -Kx \quad (3)$$

여기서 최소화 이득행렬 K 는 $R^{-1}B^T P x$ 이고, p 는 양의 한정 대칭행렬인 리카치 방정식의 해이다.

2.2 LQG 알고리즘

그러나, 실제 구조물에선 상태변수를 모두 정확하게 파악하는 것은 상당히 힘든 일이며 비용이 많이 든다. 이와 같이 측정이 가능하지 않는 상태변수들을 시스템의 입출력값을 이용하여 추정해야 할 필요성이 야기된다. 이러한 추정 방법을 상태추정기 설계(estimator design) 또는 관측기(observer)라고 한다.

시스템의 상태방정식이 다음과 같을 때

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4)$$

관측기를 다음과 같이 설계함으로써 상태변수를 추

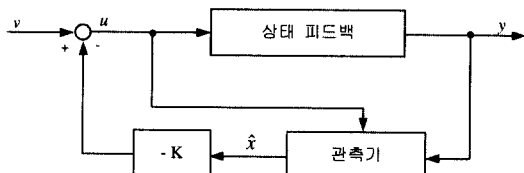


그림 1 상태방정식과 관측기가 결합된 보상기

정한 \hat{x} 를 구할 수 있다. 여기서 A, B, C, D 는 시스템 상태방정식이다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} + Du) \quad (5)$$

식(4)의 상태방정식에 제어력 u 를 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} \quad (6)$$

이러한 상태추정기인 관측기와 상태방정식이 결합된 블록선도는 그림 1과 같다.³⁾

관측기에는 측정값을 이용하게 되므로 실제 센서잡음을 무시할 수 없다.⁴⁾ 이 잡음을 확률변수로 취급해서 상태변수를 최적으로 추정하면 관측기와 비슷한 형태의 상태추정기를 얻게 된다. 이러한 추정기를 칼만필터(Kalman filter)라 한다.⁵⁾ 칼만필터는 관측기의 관측 이득행렬의 값을 외란과 센서의 분산으로 최적의 값을 구한다. 다음은 실제 구조물에서와 같은 시스템의 상태공간 모델이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 w 는 외란, v 는 센서(측정)잡음이며, G 는 외란에 대한 상태방정식이다. 상태변수와 추정치의 차인 추정오차 공분산을 성능지수 J 로 두면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} J &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[\{x - \hat{x}\}\{x - \hat{x}\}^T] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[e \cdot e^T] \end{aligned} \quad (8)$$

성능지수 J 를 최소화시키는 추정치 \hat{x} 를 유도해 낼 수 있으며 칼만필터의 동역학 식을 정리하면 다음과 같다.

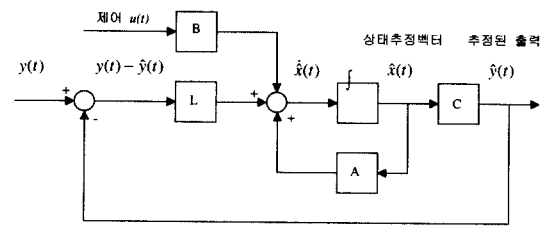


그림 2 칼만 필터의 구조

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \end{aligned} \quad (9)$$

칼만필터의 안정도는 $(A - LC)$ 의 고유값에 의해서 결정된다는 것을 알 수 있다. 위 식(9)을 정리하면 다음 그림 2와 같은 칼만필터의 구조를 알 수가 있다.⁵⁾

이러한 상태추정기인 칼만 필터와 LQR을 결합된 결합된 형태가 LQG이다.

LQG는 실제 구조물 제어에서 사용되는 방식으로써 시스템의 상태방정식과 출력방정식은 식(7)과 같을 때 칼만필터 식(9)와 LQR을 정리하여 식(10)이 되고, 그림 3은 LQG 제어시스템의 구조이다.⁶⁾

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} - BK\hat{x} + Ly \\ &= (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \\ u &= -K\hat{x} \end{aligned} \quad (10)$$

이상에서 서술한 LQR과 LQG알고리즘은 건물 상태방정식의 시간영역 응답을 통해 제어하는 방식이다. 시간영역에서의 응답으로 제어력을 산정하므로 건물과 제어기에 가해지는 주파수에 관한 특성을 고려하지 않고 모든 주파수 대역에 동일한 가중치를 적용하여 제어한다. 따라서, 건축 구조물이나 토목 구조물에서의 응

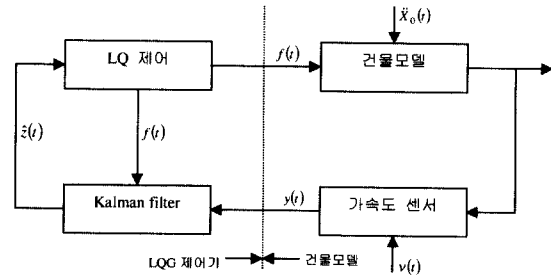


그림 3 LQG 구조 블록선도

답과 같이 저주파수의 특성을 가지고, 구동기가 고주파수의 제어력을 구현하기 힘든 조건에서는 시간영역 응답 제어 알고리즘은 설계된 제어력의 신뢰성에 문제점을 가지고 있다. 응답을 분석할 때 시간 이력 대신에 주파수영역으로 응답 신호를 분석하여 특성을 알 수 있다. 이에 안정성을 높이기 위해 주파수영역에서 가중함수를 적용한 H₂ 제어기법을 사용하고 있다.

2.3 H₂ 알고리즘

H₂ 제어기법은 LQG기법과 같이 전상태 피드백 제어와 칼만 필터의 결합으로 구성되어 있으나 주파수영역의 최적제어로서 주파수영역으로 표현된 구조물 및 외부 가진 모델을 직접적으로 다룰 수가 있으며 또한 가중함수를 사용하여 원하는 주파수대역에서의 외란의 영향을 감소시키고 측정잡음과 불확실성의 영향이 큰 주파수대역에서의 제어력을 제거 시킬 수 있기 때문에 효과적인 기법이다. H₂는 단위 크기의 공분산을 가진 외부 입력(외란과 측정 잡음)에 대한 출력의 제곱평균 제곱근(root-mean-square : RMS)값을 전달함수의 2-놈으로 정의하고 이를 최소화하고자 하는 제어기법이다. 이러한 H₂제어 블록선도는 다음 그림 4와 같다.⁷⁾

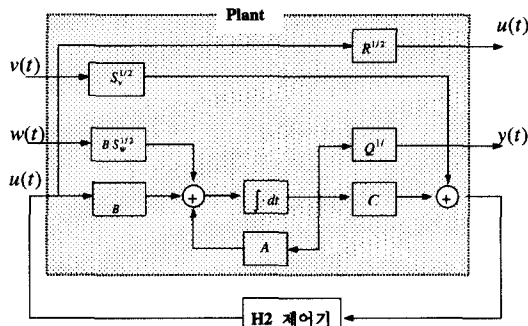


그림 4 LQG와 동일한 가중 함수를 적용시 H₂의 블록선도 구조

여기서, S_v , S_w 는 센서잡음과 외란에 대한 스펙트럴 밀도 함수이며 R 과 Q 는 제어력과 제어 대상 응답에 관한 주파수 영역의 가중함수이다.

3. 제어기 설계

본 수치해석에선 MATLAB에서 사용되는 동적 해석 프로그램인 SIMULINK을 이용하여 해석하였다. 각각의 제어알고리즘의 성능을 비교하기 위해서 다음과 같은 기준 모델을 정하였다. 첫째, AMD가 설치된 3층 건물에 3층 응답(변위, 속도, 가속도)을 제어대상으로 설정하여 각 알고리즘의 시간이력, 제어력 그리고, 전달함수를 비교하였다. 둘째, 가중치행렬을 동일한 행렬 값으로 설정하여 각 알고리즘을 적용하였다. Q 와 R 은 일반적으로 응답과 제어력의 제어 변수로 나타낼 수 있다. 식(2)과 같이 성능지수를 최소화하는 것으로써 Q 가 클수록 응답제어가 잘되어 건물의 응답이 적어지고, R 이 클수록 제어력이 적게 들어가게 되며, Q 와 R 를 제어응답의 한계 설정과 제어기의 성능을 고려하여 가장 적절한 값을 찾는 것이 중요하다. 본 수치해석에선 각 알고리즘에서 특성이 잘 나타난 동일한 Q 와 R 의 비율을 사용하였다. 셋째, 시간영역 제어기법에서는 Q 와 R 을 사용하여 제어하지만 주파수영역 제어기법에선 제어 대상에 주파수필터를 사용하여 원하는 제어성능을 발휘하게 한다. H₂에서는 시간영역 제어기법과 주파수영역 제어기법의 동일한 기준을 설정하기 위해서 그림 4의 블록선도와 같이 Q 와 R 을 비례적으로 적용하였다. 그리고 H₂의 가중함수를 주파수필터로 사용하여 특성을 비교하였다. 사용된 주파수필터는 건물의 주된 주파수영역이 저주파수이므로 저주파필터를 사용하여 응답을 감소시키고, 응답 측정시 발생하는 잡음이나 구동기의 특성상 발생하기 곤란한 고주파영역을 제거하기 위해 고주파필터를 사용하였다. 그림 5는 사용된

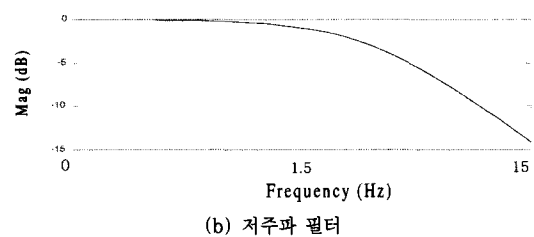
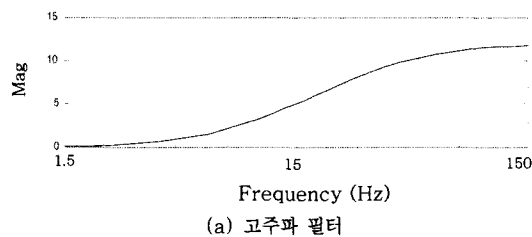


그림 5 적용된 고주파 필터와 저주파 필터

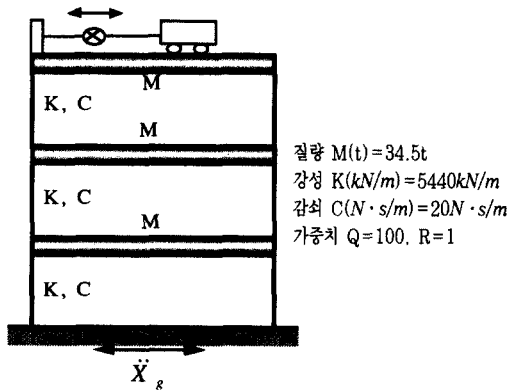


그림 6 3자유도 모델

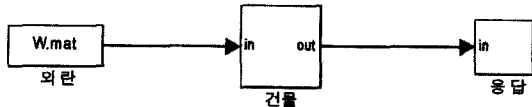


그림 7 비제어시 SIMULINK 모델

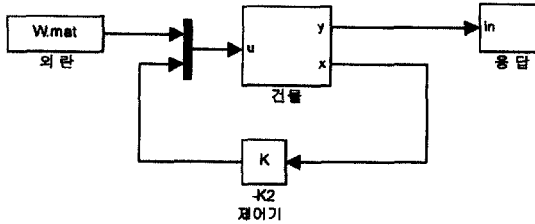


그림 8 LQR SIMULINK 모델

주파수 필터이다.⁸⁾

수치 해석 예는 그림 6과 같은 3자유도 모델이며 제어형식은 AMD(Active Mass Damper)를 가정하여 3층에 설치된 모델을 사용하여 각 알고리즘을 비교하였다. 구조물의 질량, 강성, 감쇠값은 다음과 같고 입력 지진가속도는 El centro 지진(1940, NS)를 사용하였다.

피드백 능동제어에 사용된 각 알고리즘의 MATLAB의 SIMULINK file은 다음 그림 7~10과 같다.⁹⁾

4. 실험 분석

SIMULINK를 통해 각 알고리즘의 3층의 가속도 응답과 제어력을 산출하여 전달함수와 RMS값을 통해 비교하였다. 그림 11, 12은 각 알고리즘의 3층의 가속도 응답과 제어력이다.

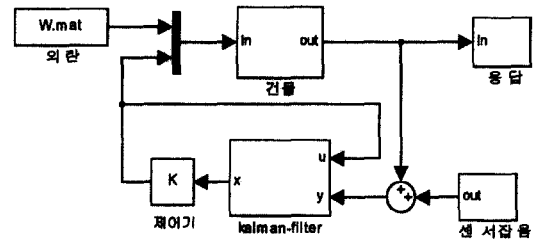


그림 9 LQG SIMULINK 모델

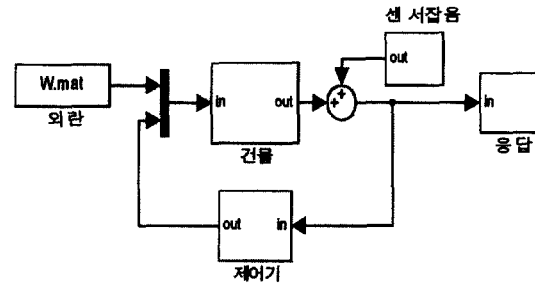


그림 10 H₂ SIMULINK 모델

그림 11과 같이 비제어시보다 각 알고리즘을 이용한 제어응답이 작아지며 LQR이 다른 알고리즘보다 응답이 작다는 것을 볼 수 있다. 제어력 또한 LQR이 상대적으로 큰 제어력을 발생하여 응답을 작게 한다. LQR는 추정하지 않은 정확한 상태변수를 피드백하는 제어기법으로 효과적인 제어제인을 산정하기 때문에 판단된다. 또, H₂에선 LQG와 동일한 가중치를 사용한 것보다 H₂주파수필터를 사용한 것이 제어응답과 제어력도 작아 나오는 것을 볼 수 있다. 건물의 고유주파수가 저주파수영역에 존재하기에 외란에 대한 건물의 주된 응답 또한 저주파이다. 이에 H₂의 저주파필터로 제어대상인 응답에 가중치를 주어 효과적으로 제어할 수 있다. 그리고, 그림 12처럼 고주파필터를 사용하여 시간영역 피드백인 LQR과 LQG보다 구동기에서 발생하는 제어력의 고주파부분을 감소시켜 현실적인 구동기의 안정성을 확보할 수 있다. 다음 그림은 각 알고리즘을 적용한 구조물의 전달함수이다.

그림 13은 가속도응답의 전달함수로서 건축구조물의 고유주파수에는 영향을 미치지 않고 전달함수의 크기를 작게 하여 응답을 적게 한다는 것을 알 수 있다. LQG보다 LQR이 크기가 더 작은 이유는 LQR는 상태 제어기법으로 LQG의 출력 기법보다 더 효율적인 제어가 가능하다는 의미를 한다.

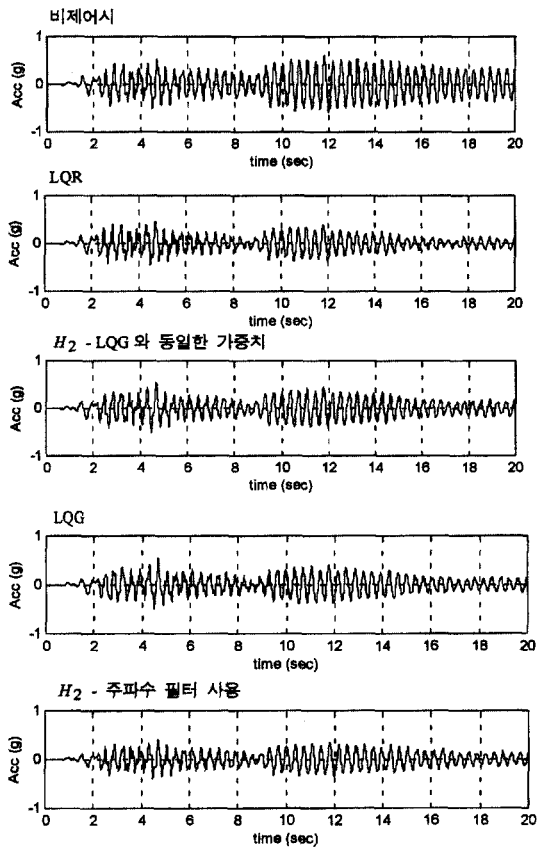


그림 11 3층 응답 가속도

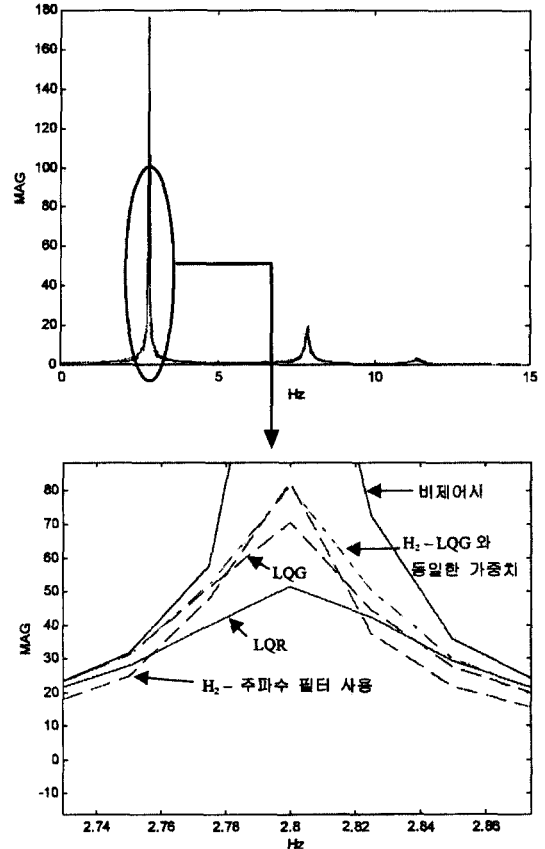
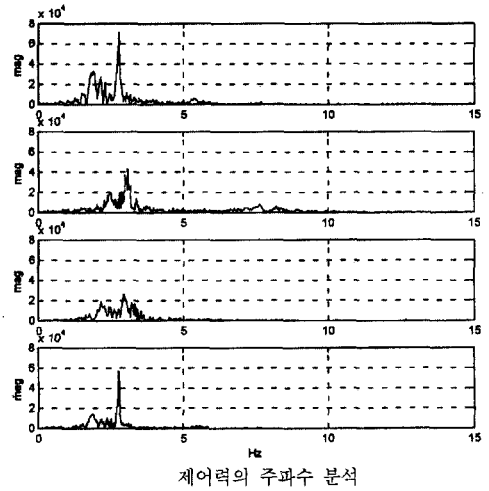
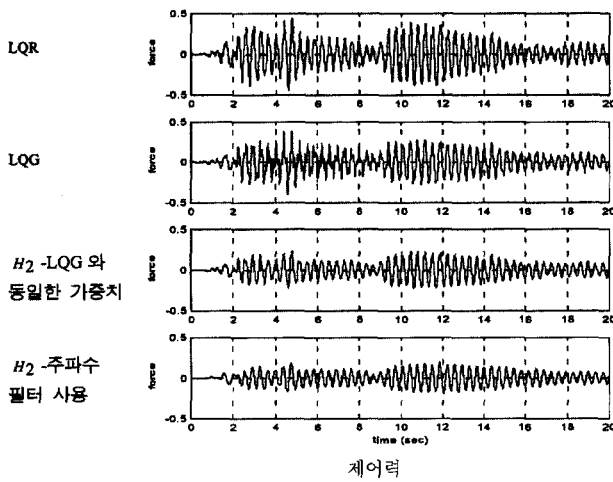


그림 13 3층 응답에 대한 전달함수



제어력

제어력의 주파수 분석

그림 12 제어력과 주파수 분석

표 1 각 알고리즘의 응답 비교

	비제어시	LQR	LQG	H ₂ - LQG와 동일한 가중치	H ₂ - 주파수 필터 사용
3층 응답 (g-RMS)	0.226	0.124	0.125	0.138	0.125
제 어 력 (RMS)	-	0.128	0.092	0.076	0.069
전달 함수의 최대값	46.07	26.40	28.74	30.08	27.35

표 1은 응답, 제어력 그리고 전달함수 값으로 비교 하기 위해 나타낸 것이다. 비제어시보다 각 알고리즘에 의한 제어가 잘 되는 면을 볼 수 있으며 H₂의 가중함수인 주파수필터로 인하여 제어응답은 LQR과 비슷하지만 적은 제어력을 요구하기 때문에 보다 효과적인 알고리즘으로 판단된다.

5. 결 론

최적 능동제어는 설정한 성능지수에 따라 제어기의 설계가 이루어진다. 성능지수는 구조물의 응답과 제어기의 성능에 관한 가중함수가 적용되어 응답 제어와 이에 따른 제어기가 결정이 된다. 따라서 가중함수의 설정에 따라 응답의 제어효과와 제어기의 성능이 달리 결정이 된다. 본 논문에서는 최적 능동제어 알고리즘의 일종인 시간영역에서의 성능지수를 고려한 LQR기법과 LQG기법 및 주파수영역에서의 성능지수를 고려한 H₂기법에 대하여 동일한 가중함수를 적용하여 제어 성능인 제어율과 제어력을 비교하는데 목적을 두고 있다. 분석 결과 LQR기법이 제어율이 가장 좋으나 제어력이 크게 나와 제어 효과가 다른 기법에 비하여 반감되는 것을 알 수 있었다.

그러나 LQR기법은 모든 상태 변수를 알아야 한다는 전제 조건이 있으므로 현실상 제약이 많은 기법이다. 이의 보완으로 유한 개수의 센서 출력인 응답을 이용, 상태변수를 추정하여 제어기 설계를 하는 LQG기법에서는 LQR과 동일 수준의 제어율과 제어력을 보이고 있으며 출력 제어라는 장점을 고려하면 LQR기법보다 현실적이라고 할 수 있다. 마지막으로 H₂기법을 이용한 해석에서는 건물의 주된 응답 주파수인 저주파수와 이에 대한 응답을 효과적으로 제어하기 위하여 주파수 영역의 가중함수인 필터를 적용한 결과 제어율과 제어력이 향상되는 것을 알 수 있었다. 또한 제어력의 주

파수 분포에서도 고주파수 부분이 다른 제어 기법과는 달리 감소되는 것을 알 수 있어 효과적으로 제어력이 설계된 것을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호 : 1999-1-310-001-3)지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

1. Frank L. Lewis, Vassilis L. Syrmos, *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc., 1995
2. 민경원, 이성경, "건물의 진동제어를 위한 LQG 제어기", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권 2호, 1999, pp.243~249
3. 신춘식, 안영주, 변기식, "MATLAB과 함께한 제어 시스템 해석 및 설계", 동일 출판사, 1999
4. 김종식, 선형 제어시스템 공학, 청문각, 1998
5. John Doyle, Bruce Francis, Allen Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co., 1990
6. 민경원, 이성경, 김성춘, "LQG 보상기를 이용한 건물의 진동제어 실험", 한국지진공학회 춘계 학술발표회 논문집, 제3권 1호, 1999, pp.202~214
7. 주석준, "건축구조물의 지진응답의 강인제어에 대한 실험적 연구", 서울대학교 건축학과 박사학위논문, 2000
8. Burl, J. B., *Linear Optimal Control - H₂ and H_∞ Methods*, Addison-Wesley, 1999
9. Simulink Toolbox User's Guide, The Math-Works, Inc., 1999