

# 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동

## Free Vibrations of Tapered Beams with Static Deflection due to Dead Load

이 병 구\*      오 상 진\*\*      이 용\*\*\*      이 태 은\*\*\*\*  
Lee, Byoung-Koo      Oh, Sang-Jin      Lee, Yong      Lee, Tae-Eun  
(논문접수일 : 2000년 11월 28일 ; 심사종료일 : 2001년 2월 5일)

### 요 지

이 논문은 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동에 관한 연구이다. 사하중이 작용하는 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 최 저차 3개 모드의 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 수치해석 예제에서는 선형 변단면과 등분포 사하중을 채택하였다. 지점조건으로는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 보를 채택하였다. 수치해석의 결과로 하중강도, 세장비 및 단면비가 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다. 사하중의 영향을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 진동형을 서로 비교하였다.

**핵심용어** : 고유진동수, 사하중, 선형 변단면, 세장비, 보, 자유진동, 진동형, 정적 처짐

### Abstract

A numerical method is presented to obtain the natural frequencies and mode shapes of the tapered beams with the static deflection due to the distributed dead load. The ordinary differential equation governing the free vibrations of such beams is derived and solved numerically. In the numerical examples, the various geometric parameters of the beams are considered : (1) the linearly tapered beams as the variable cross-section, (2) the uniform loads as the distributed dead load, and (3) the hinged-hinged, clamped-clamped and hinged-clamped ends as the end constraint. The lowest three natural frequencies versus uniform load intensity, slenderness ratio and section ratio are represented by graphics. And the typical mode shapes excluding and including the effects of the static deflection are presented.

**Keywords** : beam, dead load, free vibration, linear taper, mode shape, natural frequency, slenderness ratio, static deflection

### 1. 서 론

구조물에 자중 또는 적재하중과 같이 사하중이 작용하는 경우에 정적 처짐이 발생하며 이러한 정적 처짐은 구조물의 동특성을 변화시킨다. 특히 세장비가 큰 철골

구조물에서는 설하중과 같은 사하중에 의해서도 큰 정적 처짐이 발생한다. 그러므로 이러한 구조물의 동적 해석을 위해서는 사하중에 의한 정적 처짐을 고려한 동특성 파악이 필요하다. 한편 부재의 단면을 변단면으로 하는 경우에 재료의 효율적 이용이 가능하며, 미적

\* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과  
\*\* 담양대학 토목과  
\*\*\* (유)신한기술개발단  
\*\*\*\* 원광대학교 대학원, 박사과정

· 이 논문에 대한 토론을 2001년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

요인 및 시공성 등의 이유로 변단면의 이용이 증가하는 추세이다.

구조진동에 관한 연구는 대상 구조물 및 연구 방법 등이 매우 다양하여 많은 문헌들에서 관련 논문들을 찾아 볼 수 있다. 보 요소의 경우에는 대부분의 구조물에서 단위 부재로 이용되고 있기 때문에 보의 동적 거동에 관한 연구<sup>1)~9)</sup>가 계속 이루어지고 있다. 이러한 문헌들 중 본 연구와 직접 관련이 있는 사하중의 영향을 고려한 연구는 다음의 논문들을 들 수 있다.

1988년 Kerr<sup>6)</sup>는 수조 탑의 안정성에 관한 연구에서 탑의 축을 따라 작용하는 자중(사하중)의 영향을 고려하였다. 1990년 Takabatake<sup>7)</sup>는 사하중의 영향을 고려한 등단면 보의 정적 거동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, Galerkin method를 이용하여 수치해석하고 사하중이 정적 거동에 미치는 영향을 고찰하였다. 1991년 Takabatake<sup>1)</sup>는 사하중의 영향을 고려한 등단면 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식을 유도하고, Galerkin method를 이용하여 사하중이 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다. 1995년 이 등<sup>8)</sup>은 불확실한 매체를 갖는 기둥 좌굴하중의 애매성에 관한 연구에서 기둥축을 따라 작용하는 사하중이 좌굴하중에 미치는 영향을 고찰하였다.

본 연구는 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동 특성을 규명하는 데 연구 목적이 있다. 이를 위하여 사하중에 의한 정적 처짐을 고려한 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석할 수 있는 기법을 개발하였다. 수치해석 예제에서는 등분포 사하중을 받는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건을 갖는 보를 대상으로 하중 강도 및 보의 제원 변화에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

## 2. 수학적 모형

그림 1은 지간 길이가  $l$ 이고, 축방향 좌표  $x$ 에서 사하중  $Q=Q(x)$ 가 작용하는 보의 정적 변위와 자유진동하는 동적 변위를 나타내고 있다. 보의 축방향 좌표  $x$ 에서 단면적  $A=A(x)$  및 단면 2차모멘트  $I=I(x)$ 를 갖는 변단면 보이다. 보의 좌단에서 단면적 및 단면 2차모멘트는 각각  $A_a$  및  $I_a$ 이고, 단부는 회전지점 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 이 그림에서 점선으로 표시된  $u=u(x)$ 는 사하중  $Q$ 에 의한 정적 변위를 나

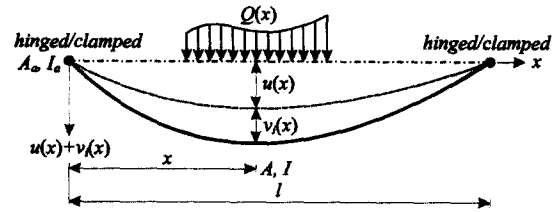


그림 1 정적 처짐을 갖는 보의 진동형

타내며  $x$ 만의 함수이다. 실선으로 표시된  $v=v(x, t)$ 는 정적 처짐  $u$ 로부터 측정된 자유진동에 의한 동적 변위를 나타낸다. 여기서  $t$ 는 시간이다. 변단면의 단면적  $A$  및 단면 2차모멘트  $I$ 는 일반적으로 다음과 같이 나타낸다.

$$A = A_a G \tag{1}$$

$$I = I_a H \tag{2}$$

위의 식들에서 단면형상함수로 정의되는  $G=G(x)$ ,  $H=H(x)$ 는  $x$ 만의 함수이다.

사하중  $Q$ 에 의하여 발생하는 정적 변위  $u$ 를 갖는 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식과 같다.<sup>1)</sup>

$$\rho A v_{tt} + (EI v_{xx})_{xx} - (1/2)(EA u_x^2 v_x)_x = 0 \tag{3}$$

위의 식에서 아래 첨자  $t, x$ 는 각각  $t, x$ 에 관한 편미분 연산자이고,  $\rho$ 는 보 재료의 밀도,  $E$ 는 탄성계수이다.

전술한 바와 같이  $u, A, I$ 는  $x$ 만의 함수이므로 식 (3)의 편미분방정식은 다음과 같이 전개된다.

$$\rho A v_{tt} + EI' v_{xx} + 2EI v_{xxx} + EI v_{xxxx} - (1/2)(EA' u'^2 v_x + 2EA u' u'' + EA u'^2 v_{xx}) = 0 \tag{4}$$

위의 식에서 위 첨자 ( $'$ )는  $x$ 에 관한 미분연산자이다.

식(4)에 포함되어 있는  $x$ 에 관한 미분항  $A', I'$  및  $I''$ 은 후술할  $G$  및  $H$ 의 함수가 정의되면 다음 식들로부터 구할 수 있다.

$$A' = A_a G' \tag{5}$$

$$I' = I_a H' \tag{6}$$

$$I' = I_a H'' \quad (7)$$

자유진동을 조화진동으로 가정하면 동적 변위  $v=v(x, t)$  는 다음과 같이 조화진동식으로 표시된다.

$$v = v_i \sin(\omega_i t), \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

위의 식에서 변위함수  $v_i=v_i(x)$  이며 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이다. 또한  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/sec)이고  $i$ 는 모드번호이다.

식(4)에 포함되어 있는 편미분항인  $v_{tt}, v_x, v_{xx}, v_{xxx}$  및  $v_{xxxx}$ 는 식(8)의 조화진동식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v_{tt} = -\omega_i^2 v_i \sin(\omega_i t) \quad (9)$$

$$v_x = v_i' \sin(\omega_i t) \quad (10)$$

$$v_{xx} = v_i'' \sin(\omega_i t) \quad (11)$$

$$v_{xxx} = v_i''' \sin(\omega_i t) \quad (12)$$

$$v_{xxxx} = v_i'''' \sin(\omega_i t) \quad (13)$$

단면항인 식(5)~(7) 및 조화진동항 식(9)~(13)을 식(4)에 대입한 후에 양변을  $\sin(\omega_i t)$ 로 나누고,  $v_i''''$  항에 대하여 정리하면 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} v_i'''' = & -2H^{-1}H'v_i'' + [(G/2)r^{-2}H^{-1}u'^2 \\ & - H^{-1}u'^2 - H^{-1}H'']v_i'' + [Gr^{-2}H^{-1}u'u'' \\ & + (1/2)r^{-2}H^{-1}G'u'^2]v_i' + 4\pi^2\rho E^{-1}r^{-2}f_i^2GH^{-1}v_i \end{aligned} \quad (14)$$

위의 식에서  $r$ 은 보의 좌단( $x=0$ )에서 회전반경으로 식(15)와 같고,  $f_i$ 는 고유진동수(Hz)이고 식(16)과 같다.

$$r = (I_a/A_a)^{1/2} \quad (15)$$

$$f_i = \omega_i/(2\pi) \quad (16)$$

상미분방정식 식(14)에서  $G, G', H, H'$  및  $H''$ 은 자유진동에 미치는 변단면의 영향요소이며,  $u'$  및  $u''$ 은 사하중에 의한 정적 변위의 영향요소이다.

회전지점( $x=0$  또는  $l$ )에서 변위  $v_i$ 와 휨 모멘트  $Elv_i''$ 는 0이므로 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$v_i = 0 \quad (17)$$

$$v_i'' = 0 \quad (18)$$

고정지점( $x=0$  또는  $l$ )에서 변위  $v_i$ 와 회전각  $v_i'$ 는 0이므로 그 경계조건은 다음과 같다.

$$v_i = 0 \quad (19)$$

$$v_i' = 0 \quad (20)$$

### 3. 하중과 변단면의 정의

상미분방정식 식(14)에는 사하중에 의한 정적 처짐의 영향요소인  $u'$  및  $u''$ 의 항이 포함되어 있다. 이 항들을 계산하기 위해서는 사하중이 정의되어야 한다. 구조물의 설계시에 자중을 포함하는 사하중에 의한 정적 처짐이 매우 작아지도록 설계한다. 수치해석 예제를 실행하기 전에 자중에 의한 정적 처짐이 고유진동수에 미치는 영향을 수치해석하여 고찰한 결과, 그 영향은 매우 작았다. 따라서 이 논문에서는 서론에서도 언급한 바와 같이 자중보다는 적재 정하중과 같은 사하중에 대한 영향에 주안점을 두었다. 이러한 관점에서 실구조물에서는 변화분포 사하중보다 등분포 사하중이 더 현실적이라 사료된다. 사하중  $Q$ 를 등분포 사하중으로 표시하면 다음과 같다.

$$Q = w \quad (21)$$

위의 식에서  $w$ 는 등분포 사하중의 하중강도이다.

상미분방정식 식(14)에는 변단면의 영향요소인  $G, G', H, H'$  및  $H''$ 의 항이 포함되어 있으므로 이들의 영향요소 값들을 계산하기 위하여 변단면이 정의되

어야 한다. 변단면을 함수식으로 표현하기 위하여 식(1), (2)에서 정의된  $G, H$ 의 함수를  $x$ 의 함수로 나타내어야 한다. 이 연구에서는 변단면을 단면의 제원 즉 단면 폭 또는 단면깊이가 일차식으로 변화하는 구형단면을 갖는 선형 변단면으로 채택하였다.

단면이 구형단면인 경우에 선형 변단면에는 단면폭이 변화하는 변화폭 변단면(breadth taper), 단면깊이가 변화하는 변화깊이 변단면(depth taper) 및 폭과 깊이가 동시에 변화하는 정방형 변단면(square taper)의 3가지가 있다. 이들 변단면에서  $d_a$ 와  $d_b$ 를 각각 보의 좌단( $x=0$ )과 우단( $x=l$ )의 단면 제원으로 정의한다. 즉, 변화폭 변단면에서 단면깊이는 일정하고 좌단에서 단면폭은  $d_a$ , 우단에서 단면폭은  $d_b$ 이다. 변화깊이 변단면에서 단면폭은 일정하고 좌단에서 단면깊이는  $d_a$ , 우단에서 단면깊이는  $d_b$ 이다. 정방형 변단면에서 단면폭과 단면깊이는 서로 같고 따라서  $d_a, d_b$ 는 각각 좌단과 우단에서 단면의 폭과 깊이를 동시에 나타낸다.

변단면의 단면적  $A$  및 단면 2차모멘트  $I$ 를 보의 축방향 좌표  $x$ 의 함수로 나타내기 위하여 다음과 같이 단면비  $\beta$ 를 정의한다.

$$\beta = d_b / d_a \quad (22)$$

이상에서 선형 변단면과 단면비  $\beta$ 가 정의되었으므로 식(1), (2)에 나타낸 단면형상함수  $G, H$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>3)</sup>

$$G = [(\beta - 1)x/l + 1]^m \quad (23)$$

$$H = [(\beta - 1)x/l + 1]^n \quad (24)$$

위의 두 식에서  $m$  및  $n$ 은 단면형상계수이며 그 값들은 다음과 같다.

$$\text{변화폭 변단면 : } m=1, n=1 \quad (25)$$

$$\text{변화깊이 변단면 : } m=1, n=3 \quad (26)$$

$$\text{정방형 변단면 : } m=2, n=4 \quad (27)$$

상미분방정식 식(14)에 포함되어 있는 변단면의 영

향요소인  $G', H'$  및  $H''$ 는 식(23) 및 식(24)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G' = m(\beta - 1)l^{-1}[(\beta - 1)x/l + 1]^{m-1} \quad (28)$$

$$H' = n(\beta - 1)l^{-1}[(\beta - 1)x/l + 1]^{n-1} \quad (29)$$

$$H'' = n(n-1)(\beta - 1)^2 l^{-2} \times [(\beta - 1)x/l + 1]^{n-2} \quad (30)$$

#### 4. 수치해석 방법 및 검증

전 절에서 상미분방정식 식(14)와 경계조건 식(17)~(20)이 유도되었으므로 보의 단부조건, 지간길이  $l$ , 좌단의 단면 2차모멘트  $I_a$  및 단면적  $A_a$ (또는  $r$ ), 단면비  $\beta$ , 탄성계수  $E$ , 재료의 밀도  $\rho$  및 하중강도  $w$ 가 결정되면 고유진동수  $f_i$ 와 진동형  $v_i$ 를 산출할 수 있다. 이 연구에서 개발한 수치해석 방법을 설명하면 다음과 같다.

- 1) 정적 처짐의 항  $u, u'$  및  $u''$ 을 구조해석법 중에 하나인 이중적분법<sup>9)</sup>을 이용하여 산출한다. 이중적분법에서 수치적분은 심프슨 법칙<sup>10)</sup>을 이용하였다.
- 2) 식(23), (24), (28)~(30)으로부터 단면형상함수  $G, H, G', H'$  및  $H''$ 을 산출한다.
- 3) 식(14)에서 고유치인 고유진동수  $f_i$ 값을 가정한다. 최초의 가정 값은 0이다.
- 4) 좌단의 경계조건을 초기치로 상미분방정식 식(14)를 수치해석하여 진동형  $v_i$ 를 산출한다. 상미분방정식의 해는 Runge-Kutta 법<sup>10)</sup>을 이용하였다.
- 5) 가정한  $f_i$ 값이 고유치인지의 여부는 우단의 경계조건들로부터 행렬값 탐사법<sup>11)</sup>을 이용하여 판단한다.
- 6) 가정한  $f_i$ 값이 고유치가 아니면 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi 법<sup>10)</sup>을 이용하여 고유치에 더 근접한  $f_i$ 값을 계산한 후에 위의 3) 단계로 환류한다.
- 7) 적당한 수렴의 한계를 주고 3)~5)의 과정을 반복 시행하여  $f_i$ 값을 찾는다.

이상의 수치해석법에서 3)~7)의 과정은 구조물의 자유진동 해석문제에서 그 유용성이 확인된 바 있다.<sup>11)</sup> 수치해석 예제에서 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정

표 1 사하중을 고려한 등단면 보\*의 고유진동수 비교

단부 조건	비교 문헌	고유진동수, $f_i$ (Hz)		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
회전 - 회전	본 연구	12.92	51.61	116.1
	문헌(1)	12.96	51.63	116.1
고정 - 고정	본 연구	29.24	80.59	158.0
	문헌(1)	29.39	80.65	158.0

\*  $l=6\text{ m}$ ,  $I_a=1.333 \times 10^{-4}\text{ m}^4$ ,  
 $r=5.773 \times 10^{-2}\text{ m}$ ,  $\rho=7.850\text{ kN sec}^2/\text{m}^4$ ,  
 $E=2.058 \times 10^8\text{ kN/m}^2$ ,  $w=10\text{ kN/m}$

보에 대하여 최저차 3개 모드의 고유진동수  $f_i$  및 진동형  $v_i$ 를 산출하였다. 사하중에 의한 정적 처짐  $u$ 가 매우 크면 작은 처짐이론(small deflection theory)에 의하여 유도된 식(3)의 편미분방정식을 적용할 수 없기 때문에 산출된  $u$ 값에 대한 제한 사항이 따라야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 정적 처짐  $u$ 값을 지간 길이  $l$ 의 1%이내로 제한하여 고유진동수를 계산하였다. 수치해석 결과를 검증하기 위하여 등단면의 고유진동수를 산출하고 그 결과를 문헌 값<sup>1)</sup>과 표 1에서 비교하였다. 이 표에서 두 결과들은 아주 우수하게 일치하여 본 연구의 상미분방정식 및 수치해석 방법의 타당성을 입증할 수 있었다. 문헌조사 결과 변단면에 대한 문헌은 발견할 수 없었으므로 그 결과들을 비교할 수 없었다.

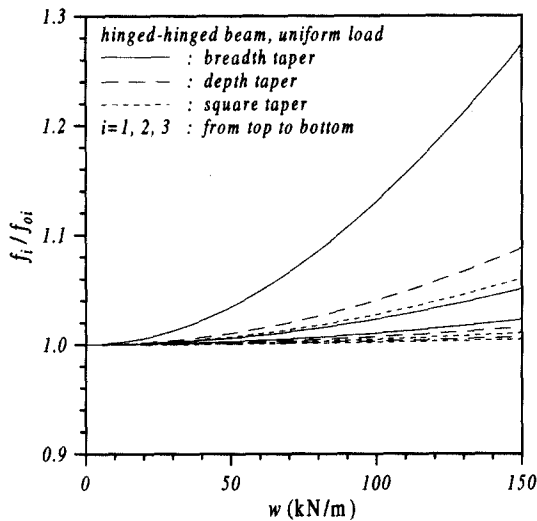


그림 2 고유진동수비와 분포하중의 관계

### 5. 수치해석 예제 및 토의

그림 2는 사하중의 하중강도  $w$ 와 고유진동수비 ( $f_i/f_{0i}$ )의 변화를 고찰하기 위하여 수치해석한 결과를 나타낸 그림이다. 적용 보의 지점조건은 회전-회전이고, 보의 제원 및 재료의 기계적 성질은  $l=6\text{ m}$ ,  $I_a=1.333 \times 10^{-4}\text{ m}^4$ ,  $r=5.773 \times 10^{-2}\text{ m}$ ,  $\beta=1.5$ ,  $E=2.058 \times 10^8\text{ kN/m}^2$ ,  $\rho=7.850\text{ kN} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4$ 를 적용하였다. 고유진동수비는 정적 처짐  $u$ 를 고려하지 않은 고유진동수  $f_{0i}$ 에 대한 정적 처짐을 고려한 고유진동수  $f_i$ 에 대한 비율  $f_i/f_{0i}$ 로 정의한다. 이 그림으로부터 하중강도가 증가함에 따라 고유진동수비는 현저히 증가함을 알 수 있으며, 특히 제 1모드가 제 2, 3모드보다 그 증가율이 상대적으로 큰 것을 알 수 있다. 변화폭 단면의 고유진동수비 증가율이 가장 크며 변화깊이, 정방형 단면의 순으로 증가율이 크다.

그림 3은 세장비  $s$  변화에 따른 고유진동수비 ( $f_i/f_{0i}$ )의 변화를 고찰하기 위하여 수치해석한 결과이다. 적용 보의 지점조건은 회전-고정이고, 보의 제원은  $l=6\text{ m}$ ,  $I_a=1.333 \times 10^{-4}\text{ m}^4$ ,  $\beta=1.5$ ,  $E=2.058 \times 10^8\text{ kN/m}^2$ ,  $\rho=7.850\text{ kN} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4$ ,  $w=100\text{ kN/m}$ 이다. 여기서, 세장비  $s$ 는 다음 식과 같이 정의된다.

$$s = l/r \tag{31}$$

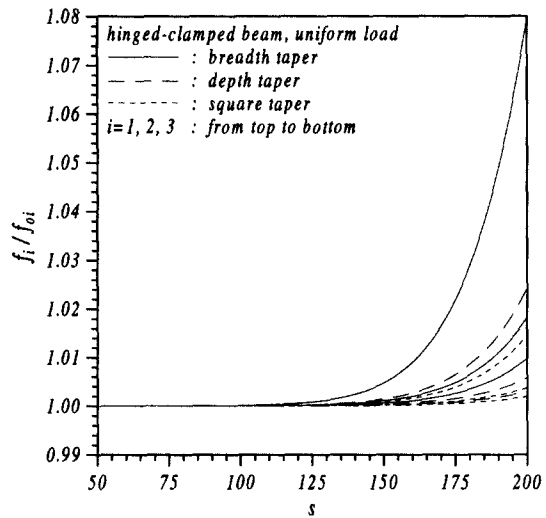


그림 3 고유진동수비와 세장비의 관계

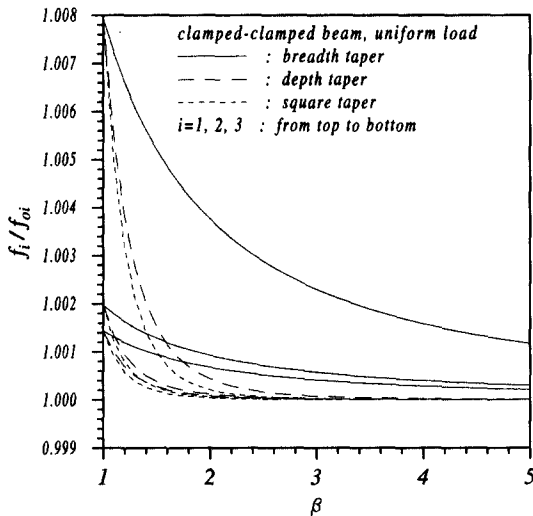


그림 4 고유진동수비와 단면비의 관계

이 그림에서 알 수 있듯이 세장비가 증가함에 따라 고유진동수비도 증가함을 알 수 있으며 세장비가 120 이상인 경우에 고유진동수비의 증가율이 현저히 큰 것을 알 수 있다. 모드별 고유진동수비의 변화는 고차 모드에서 보다 저차 모드에서 그 증가율이 더 크다. 제 1 모드의 경우 고유진동수의 증가율이 다른 모드보다 상대적으로 매우 큰 것을 알 수 있다.

그림 4는 단면비  $\beta$ 의 증가에 따른 고유진동수비 ( $f_i/f_{oi}$ )와의 관계를 나타낸 것이다. 적용 보의 지지조건은 고정-고정이고, 보의 제원은  $l=6\text{m}$ ,  $I_a=1.333 \times 10^{-4}\text{m}^4$ ,  $r=5.773 \times 10^{-2}\text{m}$ ,  $E=2.058 \times 10^8\text{kN/m}^2$ ,  $\rho=7.850\text{kN} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4$ ,  $w=100\text{kN/m}$ 이다. 단면비  $\beta$ 를 1~5사이에서 변화시키면서 단면비 증가에 따른 고유진동수비의 변화를 고찰하였다. 이 그림에 나타난 바와 같이 단면비가 증가함에 따라 고유진동수비는 감소한다. 작은 단면비에서 그 감소율이 더욱 커서 작은 단면비에서 정적 처짐의 영향이 더 큰 것을 알 수 있다.

이상의 그림 2, 3, 4로부터 회전지점을 갖는 회전-회전보, 회전-고정보는 고정-고정보에 비하여 정적 처짐의 영향이 더 큰 것을 알 수 있다. 예로서 제 1모드인 경우에 회전-회전보는 약 25%, 회전-고정보는 약 8%, 고정-고정보는 약 0.8%의 고유진동수 증가율을 보이고 있어서 회전지점을 갖는 보의 경우에는 정적 처짐의 영향을 고려하여 고유진동수를 산정하여야 한다.

그림 5는 사하중의 영향을 고려하지 않은 보와 고려한 보( $w=100\text{kN/m}$ )의 모드별 고유진동수와 진동형을

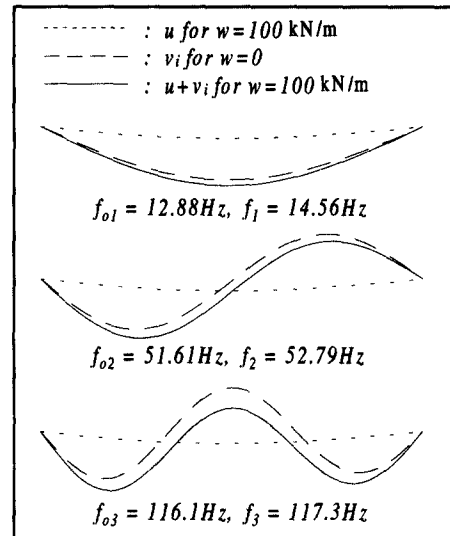


그림 5 진동형의 예 (회전-회전)

비교한 것이다. 적용 보의 단부조건은 회전-회전이고, 보는  $l=6\text{m}$ ,  $I_a=1.333 \times 10^{-4}\text{m}^4$ ,  $r=5.773 \times 10^{-2}\text{m}$ ,  $\beta=1.5$ ,  $E=2.058 \times 10^8\text{kN/m}^2$ ,  $\rho=7.850\text{kN} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4$ 의 변화폭 변단면(breadth taper) 보이다. 이 그림들에서 가는 점선은  $w=100\text{kN/m}$ 의 사하중에 의한 보의 정적 처짐  $u$ 를 나타낸다. 넓은 점선은 사하중의 영향을 고려하지 않은 모드별 진동형  $v_i$ 를 나타내고, 실선은 사하중의 영향을 고려한 정적 처짐  $u$ 로부터 측정된 모드별 진동형  $v_i$ 를 나타낸다. 이 그림들에서 보는 바와 같이 사하중의 영향을 고려하는 경우에 자유진동의 최대 진폭의 크기, 위치 및 (+) 진폭에서 (-) 진폭으로 바뀌는 nodal point의 위치 등이 고려하지 않은 보와 비교하여 크게 변함을 알 수 있다.

## 6. 결 론

이 연구는 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동에 관한 연구이다. Takabadake<sup>1)</sup>가 유도한 편미분방정식을 이용하여 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 보의 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 수치해석 예제에서는 등분포 사하중을 받는 선형 변단면 보를 채택하였다. 사하중에 의한 보의 정적 처짐은 고유진동수를 증가시키는 요인이며, 고차 모드에서 보다 저차 모드에

서 그 영향이 더 크다. 특히 회전지점을 갖는 회전-회전 및 회전-고정 보는 정적 처짐의 영향이 매우 커서 사하중에 의한 정적 처짐의 영향을 반드시 고려해야 할 것으로 사료된다.

### 참 고 문 헌

1. H. Takabadake, "Effect of Dead Loads on Natural Frequencies of Beams," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 4, 1991, pp.1039~1052
2. B.A.H Abbas and J. Thomas, "Dynamic Stability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, No.1, 1978, pp.33~44
3. A.K. Gupta, "Vibration of Tapered Beams," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 11, No. 1, 1985, pp.1~15
4. M. Eisenberger and Y. Reich, "Static, Vibration and Stability Analysis of Non-Uniform Beams," *Computer & Structures*, Vol. 31, No. 4, 1989, pp. 567~573
5. 이병구, 오상진, 최규도, "변단면 보의 자유진동 해석," 대한토목학회 논문집, 제 11권, 제 3호, 1991, pp.211~215
6. A.D. Kerr, "Stability of a Water Tower," *Ingenieur-Archiv*, Vol. 58, 1988, pp.428~436
7. H. Takabadake, "Effects of Dead Loads in Static Beams," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 4, 1990, pp.1102~1120
8. 이병구, 오상진, "불확실한 매체를 갖는 기둥 좌굴 하중의 애매성," 한국퍼지 및 지능 시스템학회 논문집, 제 5권, 제 2호, 1995, pp.86~96
9. R.C. Hibbeler, *Structural Analysis*, Prentice Hall, 1999
10. A.W. Al-Khafaji, J.R. Tooley, *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1986
11. Sang Jin Oh, Byoung Koo Lee, In Won Lee, "Free vibrations of non-circular arches with non-uniform cross-section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 36, 2000, pp. 4871~4891