

C⁰-계층적 평판요소에 의한 경사평판의 비선형 해석

Nonlinear Analysis of Skew Plates by C⁰-Hierarchical Plate Element

우 광 성* 허 철 구** 박 진 환***

Woo, Kwang-Sung Hur, Chul-Ku Park, Jin-Hwan

(논문접수일 : 2000년 7월 28일 ; 심사종료일 : 2001년 1월 22일)

요 지

본 연구의 목적은 평판의 모서리 둔각이 135도까지를 갖는 재료적 비선형 경사평판을 해석하기 위해 C⁰-계층적 평판 요소를 개발하는 것이다. 기하학적 변환을 통해 경사진 경계조건은 직각좌표계와 경사좌표계의 좌표변환을 이용하여 해결할 수 있다. 여기서, 경사경계는 경사진 변 전체 또는 경사교량의 교좌위치와 관련된 몇 개의 선택지점만을 고려할 수 있게 하였다. 이 목적을 위해 경사교량의 교좌장치의 이동방향을 설명할 수 있도록 1차 전단변형을 갖는 Reissner/Mindlin 평판이론에 기초를 둔 5-자유도 경사평판요소가 정식화되었다. 한편, 평판의 극한내하력을 추정하기 위해 von-Mises 항복기준에 기초를 둔 소성유동법칙을 갖는 증분소성이론이 채택되었다. 또한, ADINA 소프트웨어에 의한 h-version 모델과 제안된 p-version 모델을 사용하여 경사각, 경계조건과 하중의 변화에 따른 영향을 조사하였다. 해석 결과는 이론값과 문헌에 보고된 수치해석값과 비교되었다. 자유도 수에 따른 정확도를 비교기준으로 한다면, 본 연구에서 제안된 해석모델은 지금까지 개발된 가장 효율적 도구의 하나라고 할 수 있다.

핵심용어 : C⁰-계층적 경사평판요소, 재료비선형, 경사교좌장치, p-version 유한요소모델

Abstract

The objective of this paper is to develop the C⁰-hierarchical plate element to analyze the materially nonlinear skew plates with obtuse angle up to 135°. Using the geometric transformation, the oblique boundary condition is transformed using rectangular and skew coordinate system that can be considered along the oblique edges or at the selective points associated with the position of skew bridge bearings. For this purpose, 5-DOF skew plate element is formulated to account for the moving direction of skew bridge bearings that is based on the first-order shear deformation Reissner/Mindlin theory. To predict the ultimate load-carrying capacity, the incremental theory of plasticity is adopted in collaboration with the associated flow rule based on von-Mises yield criterion. The effect of skew angles, boundary conditions, and loadings is examined using the h-version model by ADINA software and p-version model. Also, numerical results are compared with the theoretical predictions and with the computational value reported in the literatures. If accuracy in terms of number of degrees-of-freedom is used as a criterion, the proposed model may be one of the most efficient tools that have been published to date.

Keywords : C⁰-hierarchical skew plate element, materially nonlinear, skew bridge bearings, p-version model

* 정회원 · 영남대학교 토목공학과, 교수
** 영남대학교 공업기술연구소, 연구원
*** 영남대학교 토목공학과, 박사과정

· 이 논문에 대한 토론을 2001년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

임의의 경계조건을 갖는 경사평판(skew plate)은 해석상의 어려움에도 불구하고 경사교량의 상판 슬래브나 지하 박스구조 또는 라멘구조물 등 토목, 건축구조물과 선체(ship hull) 및 항공기 날개 등에 다양하게 사용되고 있다. 실무에서의 중요성과 모서리 둔각부에서 발생하는 모멘트 특이(moment singularity)를 표현하기 위한 수학적 복잡성, 그리고 지배 미분방정식이 경사각과 연계된 비선형방정식이 됨에 따른 엄밀해의 난해성 등으로 많은 연구자들의 관심을 받아 왔다. 특히, 임의의 경계조건 및 하중에 대한 이론해를 구하기가 쉽지 않은 까닭에 수치해석적인 근사법이 많이 제안되어 왔고, 평판요소의 정확도와 효율성을 평가하는데 중요한 검증문제(benchmark problem)로 인식되고 있다.

Williams¹⁾는 임의의 경계조건에 따른 평판 모서리점의 모멘트 특이현상을, Morley²⁾는 등분포하중을 받는 경사평판의 휨거동과 자유진동을, Tene 등³⁾은 직교좌표계를 이용한 경사평판의 전단변형효과에 대해 연구하였다. 그리고, Wang 등⁴⁾은 *h*-version과 *p*-version 유한요소법을 이용하여 마름모꼴평판의 해석한 후 상대적 비교를 시도하였고, Butalia 등⁵⁾은 9절점 이형요소(heterosis element)를 이용하여 마름모꼴평판을 해석하였다. 또한, 최근에는 Kankam 등⁶⁾에 의해 철근콘크리트 경사슬래브해석을 위한 비선형 평판요소가 제안되었다. 그리고, Sengupta⁷⁾는 3절점 삼각형 단순요소(simple element)를 제안하여 explicit stiffness matrix를 유도하였다. Liew 등⁸⁾은 전단변형효과를 고려한 단순지지 경사평판을 DQM(differential quadrature method) 방법에 의해 해석하였다. Liew⁹⁾는 Ritz method를 사용하여 전단변형을 고려한 경사평판의 자유진동문제에 까지 연구를 진척하였다.

본 연구에서는 경사경계(oblique boundary)에서의 경계조건을 적합하게 줄 수 있도록 5자유도를 갖고 1차 전단변형을 갖는 C°-계층적 비선형 평판요소(hierarchical nonlinear plate element)를 개발하여 모서리 둔각부에서의 모멘트 특이정도를 분석할 수 있게 하고, 평판이 항복이후 극한내하력(ultimate load-carrying capacity) 및 소성역의 형상을 예측할 수 있도록 하였다. 이를 위해, von-Mises 항복기준에 기초를 둔 소성유동법칙에 의한 증분소성이론(incre-

mental theory of plasticity)을 사용한 소성이론을 채택하였으며, 하중증분법에 의해 극한내하력을 추정할 수 있도록 하였다. 한편, 평판요소의 형상함수로는 적분형 르장드르 다항식(integrals of Legendre polynomials)을 사용하였으며, 경사경계를 표현하기 위해 직각좌표계와 경사좌표계사이의 기하학적 좌표변환 매트릭스를 유도하였다. 여기서, 교량과 같이 교각장치에 의해 지지된 경사슬래브를 해석할 수 있도록 경사경계상의 교각장치위치와 대응된 몇 개의 특정점에 대해서만 경계조건을 줄 수 있을 뿐만 아니라, 경사경계 전체에 대해서도 경계조건을 줄 수 있도록 프로그램하였다.

해석결과의 정확도, 신뢰성, 수렴성 등의 검증을 위해 상용유한요소프로그램인 ADINA(Version 7.0)와 Morley, Butalia, Sengupta에 의해 해석된 결과치와 비교 검증하였다

2. 경사좌표계 변환

Fig. 1과 같이 직각좌표계 (*x, y*)에 대한 Mindlin 평판의 자유도는 *u, v, w, ψ_x, ψ_y*의 향으로 정의된다. 반면에, 경사좌표계 (*x̄, ȳ*)에 대한 자유도는 *ū, v̄, w̄, ψ̄_{x̄}, ψ̄_ȳ*으로 표시되는데, 여기서 *ψ̄_{x̄}*와 *ψ̄_ȳ*는 각각 변환된 경사면의 법선과 접선방향에 대한 회전각을 나타낸다. 따라서, 두 좌표계사이의 변위에 대한 변환식은 식(1)과 같이 유도할 수 있다.

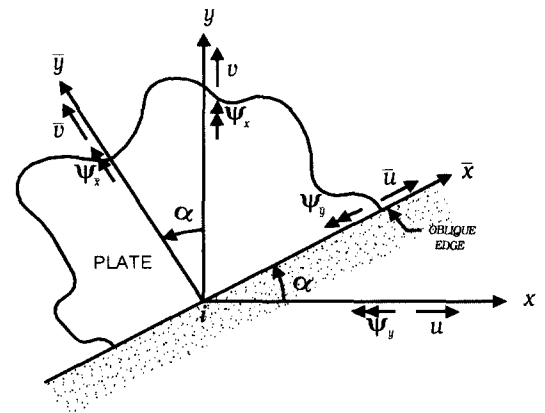


Fig. 1 Rectangular and skew coordinate system for oblique boundary transformation

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\omega} \\ \bar{\psi}_x \\ \bar{\psi}_y \end{Bmatrix} \quad (1)$$

경사경계면에서 임의의 절점 i 에 대한 좌표변환을 텐서 형으로 나타내면 다음과 같다

$$\delta_i = \mathbf{T}_{ij} \cdot \bar{\delta}_i \quad (2)$$

여기서 δ_i 와 $\bar{\delta}_i$ 는 각각 직각 및 경사좌표계에서의 일반화된 변위벡터이다. 또한, \mathbf{T}_{ij} 는 각 절점당 5자유도를 갖는 i 절점에서의 좌표변환 매트릭스이다. 그러므로, 경사경계에 n 개의 절점이 놓인 경우의 좌표변환 매트릭스는 식(3)과 같은 대각선 매트릭스를 구성한다.

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & & & \\ & \mathbf{T}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{T}_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{T}_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

따라서, 좌표변환된 요소 강성도매트릭스와 하중벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_e &= \mathbf{T}_e^t \cdot \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{T}_e \\ \bar{\mathbf{F}}_e &= \mathbf{T}_e^t \cdot \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, \mathbf{K}_e 와 \mathbf{F}_e 는 직각좌표계에서의 강성도 매트릭스와 하중 벡터를 나타낸다.

3. C°-계층적 탄소섬 평판요소

3.1 C°-계층적 형상함수

본 연구에서 사용한 평판요소는 사변형요소로 Reissner-Mindlin평판이론에 근거를 두고 있다. 전단변형은 1차

선형으로 가정하였다. 이 경우 요소간의 경계에서 C°-연속조건을 만족하면 해의 수렴성이 보장된다. 한편, 형상함수는 적분형 르장드르 다항식(integrals of Legendre polynomial)에 의해 구성된다. 이 다항식은 직교성(orthogonality)을 갖기 때문에 수치오차가 감소될 뿐만아니라 계층적 성질(hierarchical nature), 즉 p 차의 강성도 매트릭스는 $(p+1)$ 차 강성도 매트릭스의 부매트릭스(sub-matrix)가 되는 특성에 의해 형상함수의 데이터베이스화가 용이하다. (Zienkiewicz¹⁰⁾, Beslin¹¹⁾)

정규좌표계(standard quadrilateral domain)에서 정의되는 계층적 형상함수는 절점모우드(nodal modes), 주변모우드(side modes), 그리고 내부모우드(internal modes)로 나뉘어 진다. 즉,

3.1.1 절점모우드

모서리 절점에서 정의되기 때문에 모서리 모우드(corner modes)라고도 한다. 이 형상함수는 종래의 h -version 방식의 4절점 요소에 해당되는 형상함수와 일치한다.

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (5)$$

3.1.2 주변모우드

형상함수의 차수가 $p \geq 2$ 인 경우에 발생되며 요소의 변에서 발생하는 모우드로 $4(p-1)$ 개의 형상함수를 갖는다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 4개의 변에 따라 정의되는 형상함수는 식(6)과 같고 윗 첨자는 변의 번호를 의미한다. 형상함수가 구성되는 개념은 Fig. 2와 같다.

$$\begin{aligned} N_i^{(1)} &= \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_i(\xi), \quad i=2, \dots, p \\ N_i^{(2)} &= \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_i(\eta), \quad i=2, \dots, p \\ N_i^{(3)} &= \frac{1}{2}(1+\eta)\phi_i(\xi), \quad i=2, \dots, p \\ N_i^{(4)} &= \frac{1}{2}(1-\xi)\phi_i(\eta), \quad i=2, \dots, p \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\phi_i(\xi)$ 와 $\phi_i(\eta)$ 는 식(7)과 같이 정의되며 적분형르장드르 다항식이라 한다. 즉,

$$\phi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2k-1}{2}} \int_{-1}^x P_{k-1}(t) dt, k=2,3,\dots \quad (7)$$

한편, P_{k-1} 은 르장드르 다항식(Legendre polynomial)으로 Rodrigues의 식에 의해 정의된다.

3.1.3 내부모우드

이 모우드는 요소의 안이 거품이 일어난 것처럼 볼록해진다고 하여 거품모우드(bubble modes)라고도 한다. $p \geq 4$ 에서 발생되며 $(p-2)(p-3)/2$ 개의 형상함수를 갖는다. 식(8)의 윗 첨자는 내부모우드를 나타낸다.

$$N_k^{(0)} = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta), i=2,3,\dots,p, j=2,3,\dots,q \quad (8)$$

3.2 탄소성 평판요소의 정식화

평판의 단면은 휨 모멘트가 소성모멘트 M_o 에 도달할 때를 기준으로 소성의 한계를 정의한다. 여기서, 항복함수 \hat{F} 는 면내력함수 $\hat{\sigma}_m = [N_x, N_y, N_{xy}]^T$ 와 휨모멘트함수 $\hat{\sigma}_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$ 그리고, 전단력함수 $\hat{\sigma}_s = [Q_x, Q_y]^T$ 의 합으로 표현되나 항복기준을 휨에 대해 고려하므로 면내력(membrane force)과 전

단력의 영향은 무시하였다. 또한, 항복함수 \hat{F} 는 일-경화재료(work-hardening material)를 고려할 경우 경화변수 \hat{H} 의 함수이기도 하다. 즉,

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = 0 \quad (9)$$

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = \int_{-h/2}^{h/2} F(\sigma_f, H) dz \quad (10)$$

여기서, 식(9)를 두께에 대해 식(10)과 같이 적분하게 되면 평면응력에서 $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ 로 표현되는 응력함수는 평판문제에서 휨응력과 대응되는 $\hat{\sigma}_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$ 와 같은 모멘트함수로 치환되고, 평판의 두께가 t 일 때 일축응력시의 항복응력인 σ_o 도 $M_o = \sigma_o t^2/4$ 로 바꿀 수 있다. 한편, 증분소성이론(incremental theory of plasticity)에 의한 증분응력-변형을 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} d\hat{\sigma}_m \\ d\hat{\sigma}_f \\ d\hat{\sigma}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{D}_{ep}]_m & 0 & 0 \\ 0 & [\hat{D}_{ep}]_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\hat{\epsilon}_m \\ d\hat{\epsilon}_f \\ d\hat{\epsilon}_s \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서, $[\hat{D}_{ep}]_m$ 과, $[\hat{D}_{ep}]_f$ 는 면내거동과 휨에 대한 탄소성상태의 재료상수이고, \hat{D}_s 는 전단에 대한 재료상수이다.

$$[\hat{D}_{ep}]_f = \hat{D}_f - \frac{\hat{a}_D \hat{a}_D^T}{\hat{A} + \hat{a}_D^T \hat{a}} \quad (12)$$

$$\hat{a} = \left[\frac{\partial \hat{F}}{\partial M_x}, \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_y}, \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_{xy}} \right]^T \quad (13)$$

여기서, \hat{a} 는 소성류벡터(plastic flow vector)를 나타낸다. 한편, 결합유동법칙(associated flow rule)에 의해

$$\hat{a}_D = \hat{D}_f \hat{a} \quad (14)$$

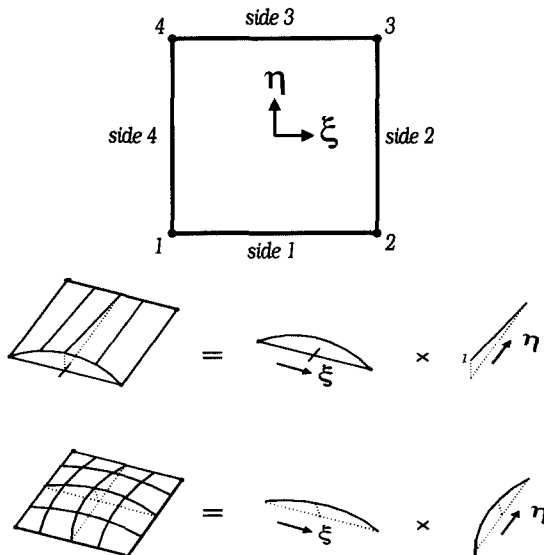


Fig. 2 Extending hierarchical edge functions to the interior

$$\hat{A} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{H}} d\hat{H} \quad (15)$$

여기서, λ 는 비례상수이다. 한편, 임의의 반복단계에서의 증분평형방정식은 식(16)과 같다.

$$\Phi(d^p) + K_T(d^p)\Delta d^p = 0 \quad (16)$$

여기서, Φ 는 이산화과정에서 얻어지며 잔류력 벡터(residual force vector)이고, $K_T(d^p)$ 는 접선강성도 매트릭스이며 아래 식으로 구할 수 있다.

$$K_T(d^p) = \int_A \{ \{ B_m \}^T [D_{ep}]_m B_m + [B_f]^T [D_{ep}]_f B_f + [B_s]^T D_s B_s \} dA \quad (17)$$

여기서, B_m, B_s, B_f 는 각각 면내거동, 전단, 휨에 대한 변형률 매트릭스를 나타낸다.

모멘트 M_x, M_y, M_{xy} 에 대한 항복조건은 평면응력상태에 의해 정의되는 von-Mises 항복조건을 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 = M_c^2 \quad (18)$$

4. 수치해석 예제

4.1 경사평판의 탄성해석

본 연구에서는 경사평판의 거동을 비교, 분석하기 위해 Fig. 3과 같이 4개로 요소분할된 p -version 유한요소모델을 사용하였다. 먼저, p -version 유한요소모델에 사용할 형상함수 차수 p 를 결정하기 위해 4변 단순지지된 경사평판의 최대처짐값에 대한 수렴성 조사를 수행하였다. 경사각도에 따라 조금씩 차이는 있으나 대체로 형상함수가 5차이상이면 수렴함을 알 수 있었다.

한편, 경계조건의 변화를 분석하기 위해 Table 1과 같이 4가지 경우의 예제를 해석하였다.

즉, 4변 단순지지, 4변 고정지지, 2변 단순지지-2변 자유단, 2변 고정지지-2변 자유단의 4가지 경계조건을 갖는 경사평판에 $q = 1t/m^2$ 단위등분포 하중과 평판중

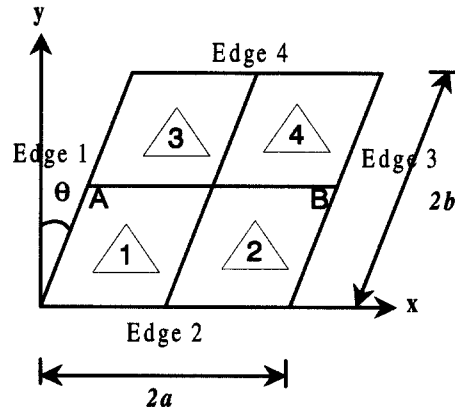


Fig. 3 p-Version finite element model

Table 1 Definition of examples with respect to the different boundary conditions.

Problem Type \ Edge	Edge 1	Edge 2	Edge 3	Edge 4
Example 1	S	F	S	F
Example 2	S	S	S	S
Example 3	C	F	C	F
Example 4	C	C	C	C

(주) S: Simply supported, F: Free, C: Clamped

양에 $Q = 1t$ 의 단위집중하중을 재하하여 중앙점의 최대처짐과 최대모멘트를 구하여 Fig. 4에서 Fig. 7까지 도시하였다. 그 결과 p -version 해석값이 다른 연구자들의 결과와 잘 일치함을 보여주고 있다. 그러나, 집중하중이 재하된 경우 최대모멘트에 대한 p -version 해석치가 20×20 개의 3절점 단순요소(simple element)를 사용한 Sengupta의 해석치와는 유사한 경향을 보이거나 8×8 개의 9절점 이형요소(heterosis element)를 사용한 Butalia에 의한 해석치와는 다소 편차를 보여주었다. 따라서, Sengupta의 결과와 비교하였다.

한편, 4변 단순지지와 4변 고정지지를 갖는 경사평판에서 Fig. 3과 같이 경사평판의 중앙선, 즉 A-B선을 따른 처짐값의 변화를 ADINA에 의한 유한요소 해석치와 Morley(1990)에 의한 이론치와 비교하여 Fig. 8과 Fig. 9에 나타내었다. ADINA의 경우 수렴성조사 후 256개의 3절점 삼각형요소를 사용하였다.

해석결과 모든 경계조건에서 경사각이 증가할수록 처짐값이 작아지는 경향을 보였다. 각각의 경계조건의

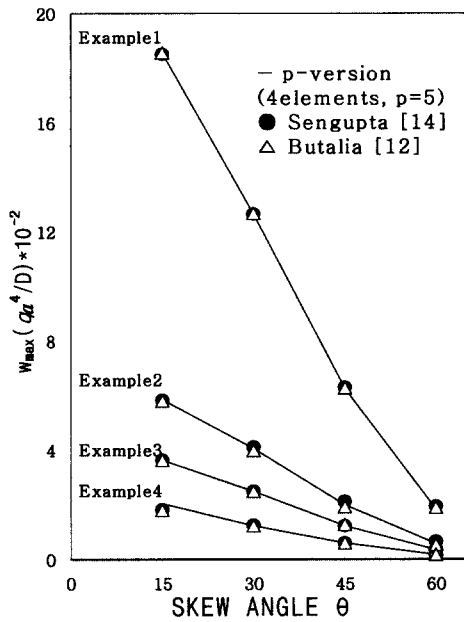


Fig. 4 Maximum deflection of skew plate under the uniform load ($a/b=1, q=1t/m^2$)

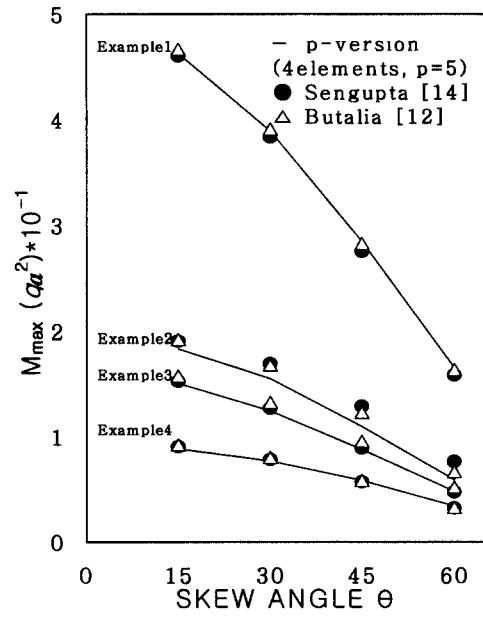


Fig. 5 Maximum moment of skew plate under the uniform load ($a/b=1, q=1t/m^2$)

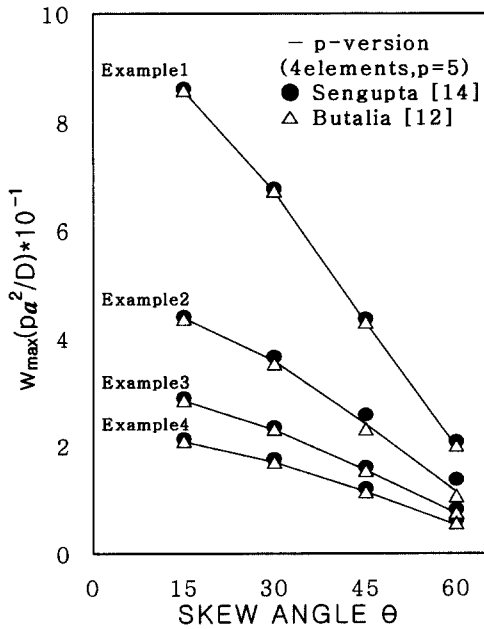


Fig. 6 Maximum deflection of skew plate under the point load ($a/b=1, Q=1t$)

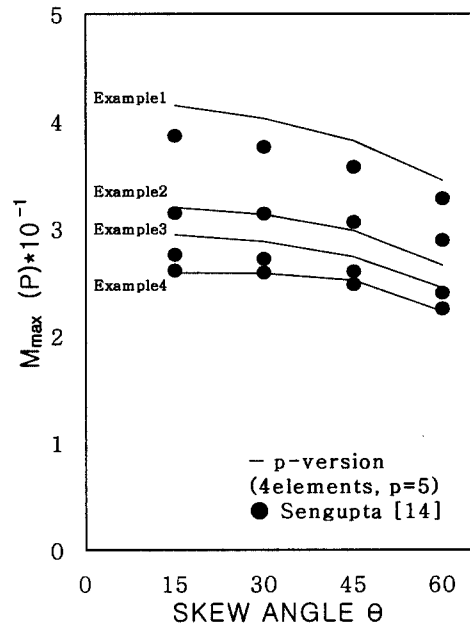


Fig. 7 Maximum moment of skew plate under the point load ($a/b=1, Q=1t$)

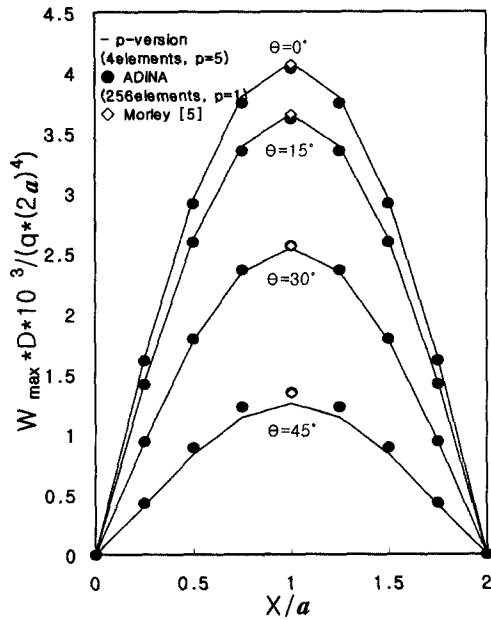


Fig. 8 Deflection profile of Example 2 under the uniform load

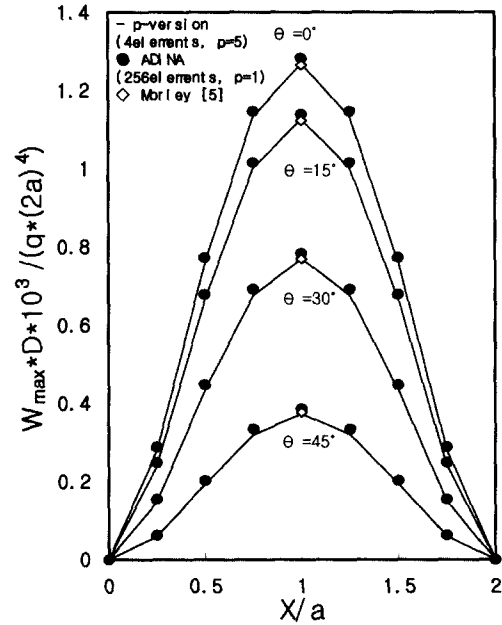


Fig. 9 Deflection profile of Example 4 under the uniform load

경우에 대해 사용된 경계조건을 제외한 순자유도수 (NDOF)는 Fig. 8의 경우 p -version은 305, h -version 유한요소 프로그램인 ADINA는 693가 사용된 반면, Fig. 9에서는 p -version은 225, ADINA는 629가 사용되었다. 그러므로, 동등한 정확도를 보이기 위해 필요한 순자유도수는 p -version 모델이 훨씬 적음을 알 수 있다. 또한, 두가지 해석모델 모두 이론치인 Morley의 값과 거의 일치하고 있다.

4.2 교좌받침부 이동방향에 대한 해석

교좌받침부의 해석에는 각각의 변에 4열로 교좌장치가 배치된 경우에 대해 해석을 수행하였다. Fig. 10에서 보는 바와 같이 교좌장치의 일방향 가동단의 이동 방향을 경사방향으로 배치한 경우와 교축직각방향으로 배치한 경우로 나누어 고려하였다. 여기서, 경사방향이란 교량의 사각방향을 말하며, 교축직각방향이란 차량 진행방향에 대해 직각방향을 가리킨다.

교좌받침부의 경계조건을 적용할 수 있도록 p -version 모델은 10개의 요소와 형상함수의 차수를 $p=3$ 으로 하였고, ADINA는 320개의 3절점 삼각형요소를 사용

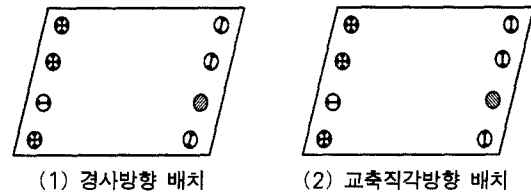


Fig. 10 Shoe setting model

하였다. 또한, p -version 모델에 대한 기하학적 형상과 하중재하는 Fig. 11과 같이 비틀림의 영향을 최대화하기 위해 슬래브 최외측 중앙부에 연직 단위하중($P=1t$)이 작용할 경우에 대해 해석을 수행하였다.

연직단위하중에 대한 반력분포를 경사각이 15°일 때를 예를들어 Table 2에 나타내었다. 반력의 영향은 일방향 가동단을 교축직각방향으로 설치한 경우가 경사방향으로 설치한 경우에 비해 p -version 해석결과는 24.1%, ADINA 해석결과는 28.5%의 높은 연직 반력을 보임을 알 수 있었다. 이 경향은 경사각이 30°, 45°인 경우에도 유사한 경향을 얻을 수 있었다. 한편, 경사각이 증가함에 따라 발생하는 모멘트, M_x , M_y , M_{xy} 를 경사방향과 교축직각방향에 대해 비교분석하였다.

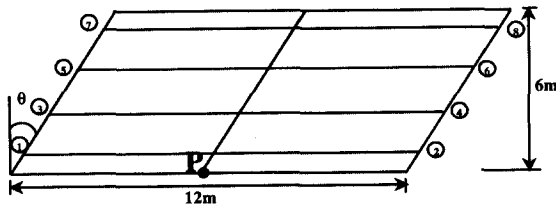


Fig. 11 Mesh design for p -version finite element model

Table 2 Comparison of reactive force under the point load ($\theta = 15^\circ$)

연직반력(t)	유한요소모델		ADINA	
	p-Version (10elements, NDOF=346)		(320elements, NDOF=873)	
교좌장치 위치	경사방향 배치	교축직각 방향배치	경사방향 배치	교축직각 방향배치
1	0.3802	0.1920	0.4514	0.2753
2				
3	0.1512	0.2396	0.1558	0.2567
4	0.0140	-0.1399	0.0093	-0.1057
5	0.1580	0.1746	0.2120	0.2342
6	-0.0133	0.0197	0.0538	0.0257
7	-0.2742	-0.2111	-0.2598	-0.2057
8	-0.1506	-0.2162	-0.1391	-0.1442

Table 3 Comparison of maximum moment under the point load

경사각	최대 모멘트			경사방향			교축직각방향		
	$(M_x)_{max}$	$(M_y)_{max}$	$(M_{xy})_{max}$	$(M_x)_{max}$	$(M_y)_{max}$	$(M_{xy})_{max}$	$(M_x)_{max}$	$(M_y)_{max}$	$(M_{xy})_{max}$
15°	0.8096	-0.4932	0.2102	0.8138	-0.4803	0.3331			
30°	0.7810	-0.5110	0.2766	0.7970	-0.4939	0.3842			
45°	0.6827	-0.6342	0.3087	0.7295	-0.5719	0.5073			

여기서, 비틀림모멘트 M_{xy} 는 교축직각방향이 경사방향에 비해 2배 가량 크게 발생됨을 알 수 있다. 따라서, 교좌받침부는 일방향 가동단을 경사방향으로 배치하는 것이 유리한 것으로 평가된다.

4.3 경사평판의 비선형해석

본 연구에서는 재료비선형만을 고려하였으며, 해석 시 사용된 평판의 제원과 유한요소모델은 선형탄성해석시와 동일하다. 경계조건은 단순지지와 고정단으로

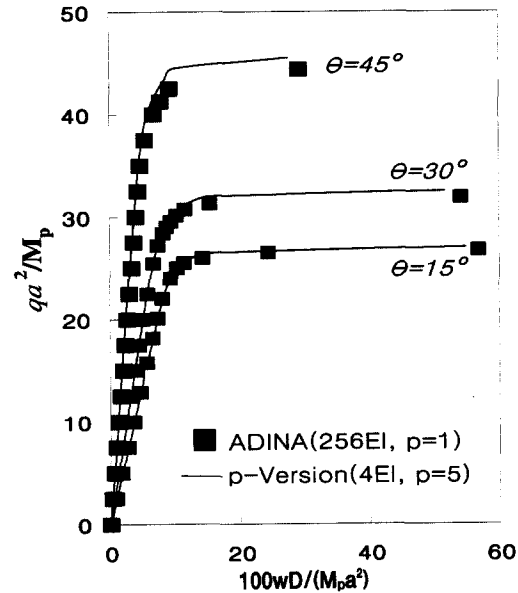


Fig. 12 Deflection profile of simply supported skew plate under the uniform load

분류하였으며, 하중상태는 등분포하중을 고려하였다. Fig. 12에는 4변 단순지지 경사평판의 경사각의 변화에 따른 하중-변위 선도를 도시하였다. 경사평판의 극한하중(ultimate load)은 경사각이 증가함에 따라 커지는 것을 알 수 있으며, 이론해가 없는 관계로 3절점 요소를 사용한 ADINA의 결과를 참고값으로 비교하였다. 사변고정의 경우 경사평판에서 최초의 항복이 발생하는 초기항복(initial yielding)에서 붕괴기구(collapse mechanism)를 형성할 때인 최종항복(final yielding)까지의 여유력인 연성(ductility)은 Table 4와 같이 매우 큰 것으로 분석되었다.

한편, 소성역(plastic zone)의 형상은 4변 단순지지의 경우 둔각부에서 시작하여 X자 형태로 발전되는 것을 알 수 있다. ADINA의 결과와 p -version의 해석결과의 비교를 Fig. 13에 나타내었다.

Table 4 Comparison of limit load for uniformly loaded clamped skew plates

skew angle	limit load(t/m^2)	
	initial yield	final yield
15°	1.057	2.30
30°	1.330	2.60
45°	2.018	3.76

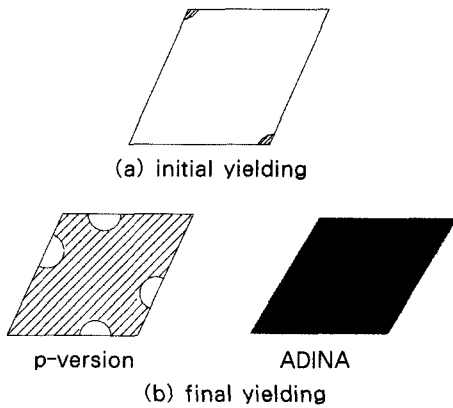


Fig. 13 Plastic zone of simply supported skew plate under the uniform load

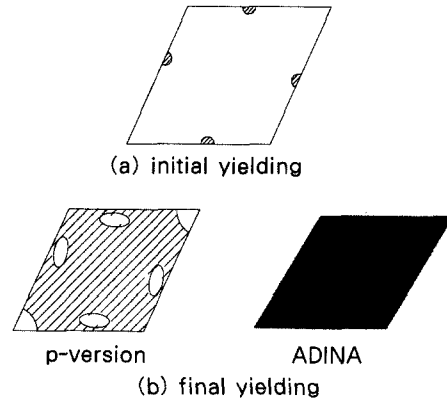


Fig. 15 Plastic zone of clamped skew plate under the uniform load.

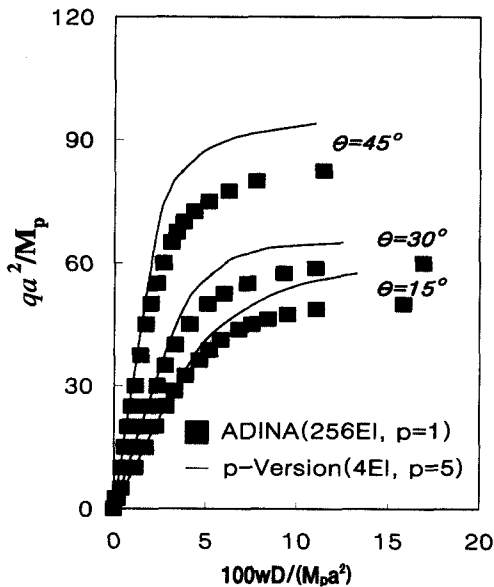


Fig. 14 Deflection profile of clamped skew plate under the uniform load

4변 고정지지 경사평판의 경사각의 변화에 따른 하중-변위 선도를 Fig. 14에 나타내었으며, ADINA의 해석치와 비교하였다. 단순지지 결과와 같이 경사각의 각도가 커짐에 따라 극한하중도 역시 커짐을 알 수 있다. 그리고, 소성역의 형상은 4변에서 먼저 소성이 되어서 최종적으로 X자 형태로 발전하는 것을 알 수 있으며, 정사각형 평판의 경우에는 모든 모서리에서 모서리효과(corner effect)로 인하여 소성이 발생하지

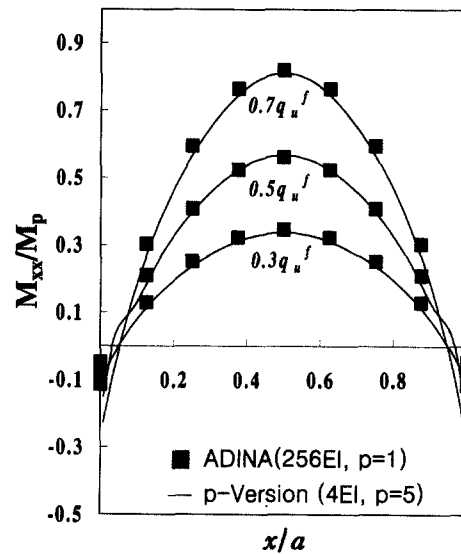


Fig. 16 Moment M_{xx} profile of simply supported skew plate under the uniform load along the line A-B($\theta = 30^\circ$).

않았으나, 경사평판의 경우에는 둔각부에서 응력특이 현상으로 인해 소성이 발생하였다. 소성역의 형상을 Fig. 15에 나타내었으며, ADINA의 해석결과와 비교하였다.

한편, Fig. 16, 17과 18에는 4변 단순지지 경사평판의 모멘트 M_{xx} , M_{yy} 와 M_{xy} 의 해석결과를 ADINA의 해석결과와 비교하여 나타내었다. 하중을 탄성하중에서 시작하여 최종항복이 발생하는 극한하중(q_u^f)의 30%, 50%와 70%까지 즉, 탄소성이 발생하는 하중

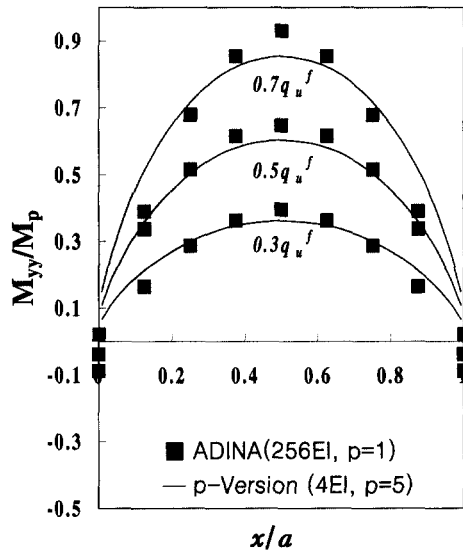


Fig. 17 Moment M_{yy} profile of simply supported skew plate under the uniform load along the line A-B ($\theta = 30^\circ$)

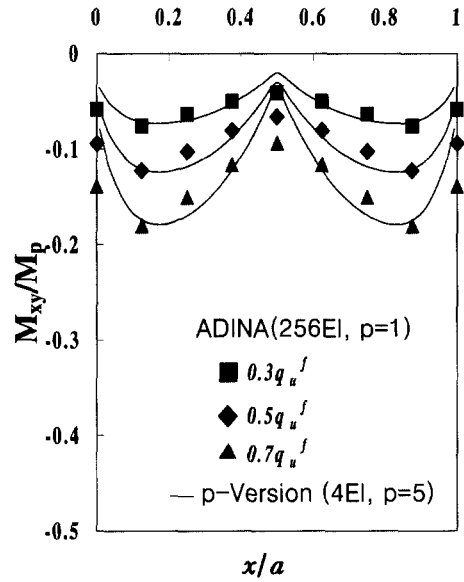


Fig. 18 Moment M_{xy} profile of simply supported skew plate under the uniform load along the line A-B ($\theta = 30^\circ$)

까지 증가시키면서 분석하였다.

초기항복 이후의 탄소성 상태에서 하중이 증가됨에 따라 p -version 결과는 ADINA의 해석치와 약간의 차이를 보임을 알 수 있다. 특히, 비틀모멘트 M_{xy} 는 평판의 중앙부에서 두 해석간에 차이를 보이고 있다.

5. 결 론

본 연구를 통해 경사평판을 해석할 수 있는 효율적인 유한요소 프로그램을 개발하였다. 경사경계의 전부 또는 교좌장치 설치점만을 고려할 수 있도록 경사경계상의 몇 개의 특징점을 경계조건으로 줄 수 있도록 하였다. 또한, 탄소성해석도 가능케하여 경사평판의 극한 내하력을 산정할 수 있도록 하였다. 여러 수치예제를 통해 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

5.1 경사평판의 탄성해석

본문에 제시된 4가지 경계조건에 대한 등분포 하중 및 집중하중의 재하시 p -version 해석치가 범용유한요소 프로그램인 ADINA의 해석치 및 기존에 발표된 경사평판에 관한 여러 가지 이론값과 아주 근접한 결과

를 보여주었고, 특히 형상함수의 차수가 5차 이상일 경우 수렴되는 경향을 보이며 경계조건 변화에 관계없이 Sengupta, Butalia Morley 등의 연구결과와 비교하여 처짐 및 모멘트 값이 Sengupta와 $\pm 5\%$ 이내의 상대오차를 보여주고 있다.

5.2 교좌받침부 이동방향에 대한 해석

경사교량에서 일방향 가동단의 교좌이동방향이 교축 직각방향인가 또는, 경사방향인가에 따라 반력의 분포나 모멘트의 분포가 크게 차이가 나는 것을 보여주고 있다. 따라서, 이는 경사교량내 고정단의 일방향 가동단의 이동방향이 경사방향으로 설치할 경우가 보다 효율적임을 알 수 있었다. 또한, 부분력의 영향이 경사각 증가에 따라 매우 크므로 반드시 검토해야 될 항목이라 판단된다.

5.3 경사평판의 비선형해석

경사평판의 비선형해석의 경우에는 경사각과 경계조건을 변화시키면서 등분포 하중재하시 p -version 해석치가 범용유한요소 프로그램인 ADINA의 해석치와

근접한 결과를 보여주었으며, 소성역의 확산 형상에 있어서도 매우 비슷한 결과를 보여주었다. 또한, ADINA와의 비교·분석에서 p -version은 적은 요소수와 자유도를 갖고도 비교적 정확한 결과를 예측할 수 있는 것으로 나타났다.

감사의 글

이 논문은 1999년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음 (KRF-99-041-E00567)

참고 문헌

- Williams, M. L., "Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates under Bending", *Proc. of the First National Congress of Applied Mechanics*, Chicago, IL, 1951
- Tene, Y. and Sheinman, I., "Analysis of Skew Plates with Shear Deformation Using Natural Coordinates", *ASCE, Engng. Mech.*, Vol. 100, No. EM2, 1974, pp.235~249
- Wang, D. W., Katz, I. N. and Szabo, B. A., " h - and p -Version Finite Element Analysis of a Rhombic Plate", *Numer. Meth. Engng.*, Vol. 20, 1984, pp. 1399~1405
- Bakht, B., "Analysis of Some Skew Bridges as Right Bridges", *ASCE, Struct. Engng.*, Vol. 114, No. 10, 1988, pp.2307~2322
- Morley, L. S. D., "Bending of a Simply Supported Rhombic Plate under Uniform Normal Loading", *Quart. J. Mech. Applied Math.*, Vol. XV, Pt. 4, 1962
- Kankam, J. A. and Dagher, H. J., "Nonlinear FE Analyses of RC Skewed Slab Bridges", *ASCE, Struct. Engng.*, Vol. 121, No. 9, 1995, pp.1338~1345
- McGee, O. G., Leissa, A. W. and Huang, C. S., "Vibrations of Cantilevered Skewed Plates with Corner Stress Singularities", *Numer. Meth. Engng.* Vol. 35, 1992, pp.409~424
- Liew, K. M. and Han, J. B., "Bending Analysis of Simply Supported Shear Deformable Skew Plates", *ASCE, Engng. Mech.*, Vol. 123, No. 3, 1995, pp.214~221
- Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., and Wang, C. M., "Vibration of Thick Skew Plates Based on Mindlin Shear Deformation Plate Theory", *Sound & Vibration*, Vol. 168, 1993, pp.39~69
- Zienkiewicz, O. C., Gago, J. P. De S. R. and Kelly, D. W., "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis", *Comput. & Struct.*, Vol. 16, No. 1-4, 1983, pp.53~65
- Beslin, O. and Nicolas, J., "A Hierarchical Functions Set for Predicting Very High Order Plate Bending Modes with Any Boundary Condition", *Sound & Vibration*, Vol. 202(5), 1997, pp.633~655
- Butalia T. S., Kant, T. and Dixit, V. D., "Performance of Heterosis Element for Bending of Skew Rhombic Plates", *Comput. & Struct.*, Vol. 34, No. 1, 1990, pp.23~49
- Gangarao, H. V. S. and Chaudhary, V. K., "Analysis of Skew and Triangular Plates in Bending", *Comput. & Struct.*, Vol. 28, No. 2, 1988, pp.223~235
- Sengupta, D., "Performance Study of a Simple Finite Element in the Analysis of Skew Rhombic Plates", *Comput. & Struct.*, Vol. 54, No. 6, 1995, pp.1173~1182
- Monforton, G. R. and ASCE, A. M., "Some Orthotropic Skew Plate Finite Element Results", *ASCE, Struct. Engng.*, Vol 98, 1972, pp.955~960
- Szabo, B. A. and Sharmann, G. J., "Hierarchic Plate and Shell Models Based on p -Extension", *Numer. Meth. Engng.* Vol. 26, 1988, pp.1855~1888
- Hinton, E. and Owen, D. R. J. *Finite Element Program*, Academic Press, 1977
- Szilar, R., *Theory and Analysis of Plates*, Prentice Hal, INC., Englewood Cliffs, N. J, 1974
- Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shell*, 2nd Ed, McGraw-Hill, 1959
- 박진환, 정우성, 우광성, "탄소-완전소성모델에 의한 평판의 극한내하력 산정", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권, 제1호, 1999, pp.1~14
- 우광성, "특이성을 갖는 비정형 평판의 p -Version 유한

요소해석”, 한국 전산구조공학회 논문집, 제3권, 제3호, 1990, pp.101~111
22. 우광성, 이기덕, 고만기, “Reissner-Mindlin 평판의

hp-Version 유한요소해석”, 대한토목학회 논문집, 제13권, 제2호, 1993, pp.151~160
23. 한국도로공사, 교좌장치에 관한 연구, 1993