

뒹과 회전관성을 고려한 수평 곡선보의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams considering Warping and Rotatory Inertia

이 병 구* 박 광 규** 오 상 진*** 진 태 기****
Lee, Byoung-Koo Park, Kwang-Kyou Oh, Sang-Jin Jin, Tae-Ki
(논문접수일 : 2000년 3월 11일 ; 심사종료일 : 2001년 2월 28일)

요 지

본 연구는 변화곡률 수평 곡선보의 면의 자유진동에 관한 연구이다. 뒹과 회전관성을 고려한 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이 유도되었고, 이 지배미분방정식을 수치해석하여 곡선보의 고유진동수를 산출하였다. 지배미분방정식을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta method를 이용하였고, 고유진동수를 산출하기 위하여 Regula-Falsi method와 결합한 행렬값 탐사법을 이용하였다. 본 연구의 이론적 타당성을 검증하기 위하여 타문헌의 고유진동수와 비교하였고, 실험실 규모의 모형실험을 실시하여 이론값과 실험값의 고유진동수를 비교하였다. 수치해석의 결과로 무차원 제변수들의 변화에 따른 무차원 고유진동수를 제 3모드까지 산출하였고, 그 결과들을 고찰하였다. 본 연구의 결과는 곡선형 교량 등과 같이 곡선부재로 이루어진 구조물의 설계시에 유용하게 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

핵심용어 : 고유진동수, 뒹, 변화곡률 곡선보, 수평 곡선보, 자유진동, 회전관성

Abstract

This study explores the free, out-of-plane vibrations of horizontally non-circular curved beams. The differential equations governing the free vibrations of such beams, including the effects of warping and rotatory inertia, are derived and solved numerically. The Runge-Kutta method and Regula-Falsi method are used to integrate the differential equations and to obtain the natural frequencies, respectively. Experimental measurements of frequencies for the laboratory-scale models are conducted to validate the theoretical results. The lowest three non-dimensional natural frequencies are calculated over a range of non-dimensional system parameters: the horizontal rise to span length ratio, the parameters related with slenderness ratios, the stiffness parameter, and the warping parameter. It is expected that the results obtained herein can be used practically for the design of curved member system including the curved girder bridges.

Keywords : free vibration, horizontally curved beam, natural frequency, rotatory inertia, variable curvature, warping

1. 서 론

현대사회는 산업발전 등으로 인하여 교통량이 급증하고 있어 교통수단의 원활한 흐름을 위하여 유기적인

교통시설을 필요로 하고 있다. 특히 지역이 매우 협소한 도심지역이나 고속도로 등에서는 고가도로교를 이용한 입체교차로의 축조가 요구되고 있다. 이러한 구조물의 축조시에 곡률반경이 큰 경우에는 직선부재를

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과, 교수
** 대전대학교 토목공학과, 교수
*** 담양대학 토목과, 전임강사
**** 원광대학교 대학원, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2001년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

사용하기도 하지만, 곡률반경이 작은 경우 혹은 구조물의 경제성 및 미적 요인 등을 고려하면 곡선교의 축조가 필수적인 경우가 있다. 곡선부재의 진동문제에 대한 연구는 많은 문헌들에 발표되고 있으며 최근에도 이 분야에 대한 활발한 연구가 진행되고 있다. 1962년 Yonezawa¹⁾는 판 이론을 적용하여 곡선교의 자유진동을 해석하였으며, Ojalvo²⁾는 뒹과 비틀림이 연계된 원환의 면의 자유진동에 대한 연구를 하였다. 1967년 Culver³⁾는 단기간 곡선보의 고유진동수를 산출하기 위하여 운동방정식에 대한 정확해를 구하였으며, 1968년 Tan과 Shore⁴⁾는 이동하중을 받는 단순지지 곡선교의 동적 응답을 산출하였다. 1974년 Petyt와 Fleischer⁵⁾는 유한요소법을 이용하여 다경간 곡선보의 자유진동을 해석하였으며, 이 논문에서는 다경간 연속보와 단경간 곡선보 사이의 자유진동 특성을 비교·고찰하였다. 1979년 Heins와 Sahin⁶⁾은 유한차분법과 분리된 집중질량 보모형을 이용하여 다경간 연속보의 고유진동수를 산출하였다. 1984년 Dey와 Balasubramanian⁷⁾은 이동하중을 받는 곡선교의 동적 응답에 관한 연구에서 극좌표 위에 있는 판의 지배미분방정식을 이용하여 강성행렬과 질량행렬을 유도하였다. 1988년 Issa⁸⁾는 Winkler형 지반 위에 놓인 다경간 연속 곡선보의 자유진동에 관한 연구에서 동적 강성행렬을 유도하였으며, 뒹강성과 비틀림강성, 곡선보 중심각 및 접촉면적 등이 고유진동수에 미치는 영향에 대하여 고찰하였다. 1995년 강과 최⁹⁾는 박판 수평 곡선보의 자유진동에 대한 지배방정식을 유도하고, 양단힌지 곡선보의 해석해를 산출하였으며, Howson 등¹⁰⁾은 근접한 고유진동수를 갖는 원호형 연속 곡선보의 고유진동수를 산출하기 위하여 Wittrick-Williams법을 이용하였다. 최근에 모¹¹⁾는 회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko 보 이론을 적용하여 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 여러 가지 선형을 갖는 곡선보의 고유진동수 및 진동형을 제시하였다.

이상에서 고찰한 바와 같이 이제까지 대부분의 연구 주제들은 비교적 이론전개가 용이한 원호형 곡선보에 국한되어 있다. 이는 시공시에 원호형 곡선보의 제작이 용이하다는 측면도 있지만, 부재의 곡률이 변화하는 경우 이론전개가 용이하지 않은 이유도 있다. 그러나 모¹¹⁾는 곡선보의 수평높이가 높은 경우에는 선형에 따른 자유진동 특성의 변화가 비교적 큰 것으로 고찰한 바 있다.

따라서 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동 특성을 규명하는 것은 매우 중요한 연구과제라 사료된다.

이러한 연구배경으로 본 연구는 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동 특성을 규명하는 데 연구목적이 있다. 이를 위하여 곡선보가 진동할 때 보의 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여 뒹(warping)과 회전관성을 고려한 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 유도된 지배미분방정식으로부터 곡선보의 고유진동수를 산출할 수 있는 해석기법을 개발하고, 이를 컴퓨터 프로그램화하였다. 본 연구의 이론적 전개과정을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실시하여 고유진동수의 이론값과 실험값을 비교하였다. 실제 수치해석 예는 포물선 곡선보에 적용하였고, 수치해석 예를 통한 제변수의 변화에 따른 결과를 제시하여 곡선보 설계시에 유용한 자료로 이용될 수 있도록 하였다.

2. 수학적 모형

그림 1은 공간 좌표계 (x, y, z) 에서 (x, y) 평면상에 정의된 변화곡률 수평 곡선보의 기하학적 형상과 자유진동의 동적 변위를 나타낸 것이다. 이 그림에서 ρ 는 곡선보축상 임의점 (x, y) 에서 곡률반경을 나타내며, α 는 곡선보의 중심각이다. θ 와 θ_L 은 각각 곡선보 축상의 임의점 및 좌측단부에서 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도이며, v 는 수직변위, ϕ 는 뒹에 의한 단면회전각, ψ 는 비틀림각을 나타낸다.

곡선보가 면의 자유진동할 때 부재단면에는 뒹모멘트 M , 전단력 Q 및 비틀림모멘트 T 가 발생하며, 질량을 갖는 부재요소에는 수직관성력 F_v , 회전관성우력 C_ϕ 및 비틀림관성우력 C_ψ 가 발생한다. 부재요소에 발생하는 합응력 및 관성력의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

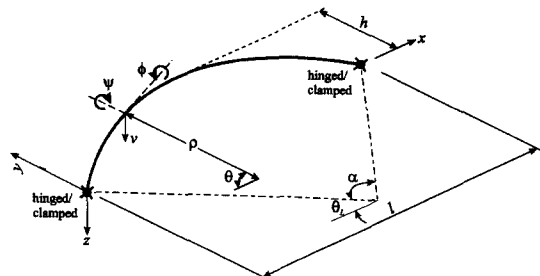


그림 1 변화곡률 수평 곡선보의 기하학적 형상 및 동적 변위

$$Q' - \rho F_v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\phi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \quad (3)$$

위의 식들에서 (')은 $d/d\theta$ 의 미분연산자이다. 부재단면에 발생하는 뒹 τ , bimoment B_i , 휨모멘트 M , 비틀림모멘트 T 및 단면회전각 ϕ 는 다음 식들과 같다.¹²⁾

$$\tau = -\rho^{-1}(\phi' + \rho^{-1}v') \quad (4)$$

$$B_i = -EI_w \rho^{-2}(\phi'' + \rho^{-1}v'' - \rho^{-2}\rho'v') \quad (5)$$

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \rho^{-1}v') \quad (6)$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\phi' + \rho^{-1}v') - EI_w \rho^{-3}(\phi''' + \rho^{-1}v''' - 2\rho^{-2}\rho'v'' - \rho^{-2}\rho''v' + 2\rho^{-3}\rho'^2v') \quad (7)$$

$$\phi = \rho^{-1}v' \quad (8)$$

위의 식들에서 E, G 는 탄성계수와 전단탄성계수, I 와 J 는 휨축에 대한 단면 2차모멘트와 비틀림상수, I_w 는 뒹상수이다.

곡선보가 조화진동을 하면 부재요소에 발생하는 단위길이당 관성력 F_v , 관성우력 C_ϕ 와 C_ϕ 는 다음 식들과 같이 표현된다.

$$F_v = -\gamma A \omega_i^2 v \quad (9)$$

$$C_\phi = -\gamma I \omega_i^2 \rho^{-1} v' \quad (10)$$

$$C_\phi = -\gamma I_p \omega_i^2 \phi \quad (11)$$

위의 식들에서 γ 는 단위체적당 질량, A 는 단면적, I_p 는 단면극관성모멘트, ω_i 는 고유각진동수, i 는 모드 번호이다.

식(2)를 전단력 Q 에 대하여 정리하고, 여기에 식(6),

(7), (10)을 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= \rho^{-1}M' + \rho^{-1}T + RC_\phi \\ &= EI\rho^{-2}(\phi' - \rho^{-1}\rho'\phi - \rho^{-1}v'' + 2\rho^{-2}\rho'v') \\ &\quad + GJ\rho^{-2}(\phi' + \rho^{-1}v') - EI_w \rho^{-4}(\phi''' + \rho^{-1}v''' \\ &\quad - 2\rho^{-2}\rho'v'' - \rho^{-2}\rho''v' + 2\rho^{-3}\rho'^2v') \\ &\quad - R\gamma I \omega_i^2 \rho^{-1}v' \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서 R 은 회전관성의 고려여부를 나타내는 지표로서 그 내용은 다음과 같다.

$$R=0. : \text{회전관성을 무시하는 경우} \quad (13a)$$

$$R=1. : \text{회전관성을 고려하는 경우} \quad (13b)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하고, 해석결과를 무차원양으로 표현하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \delta = y/l, \zeta = \rho/l, f = h/l \quad (14-17)$$

$$s = \sqrt{I/A} / l, s_p = \sqrt{I_p/A} / l \quad (18,19)$$

$$\epsilon = GJ/(EI), D = EI_w/(EI^2) \quad (20,21)$$

$$\eta = v/l, C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A/(EI)} \quad (22,23)$$

식(14), (15)의 (ξ, δ) 는 직교좌표계 (x, y) 를 지간길이 l 로 정규화한 무차원 직교좌표계이며, 식(16), (17)의 ζ, f 는 각각 ρ, h 를 l 로 정규화한 무차원 곡률반경 및 수평높이대 지간길이비이다. 식(18), (19)의 s 와 s_p 는 세장비 관련변수들이고, 식(20), (21)에서 ϵ 과 D 는 각각 강성계수와 뒹계수이다. 식(22)의 η 는 v 를 l 로 정규화한 무차원 수직변위이며, 식(23)의 C_i 는 무차원 고유진동수이다.

동적 평형방정식 식(1)에 식(9), (12)를 대입하고 식(14)~(23)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 식(24)를 얻을 수 있으며, 식(3)에 식(6), (7), (11)을 대입하고 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 식(25)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (1 + D\xi^{-2})\eta'''' &= (5\xi^{-1}\xi' + 7D\xi^{-3}\xi')\eta'''' + (\epsilon \\
 &+ 2\xi^{-1}\xi'' - 8\xi^{-2}\xi'^2 + 3D\xi^{-3}\xi'' - 14D\xi^{-4}\xi'^2 \\
 &- R s^2 C_i^2 \xi^2)\eta'' - (3\epsilon\xi^{-1}\xi' - D\xi^{-3}\xi'' \\
 &+ 10D\xi^{-4}\xi'\xi'' - 14D\xi^{-5}\xi'^3 - R s^2 C_i^2 \xi \xi')\eta' \\
 &+ C_i^2 \xi^4 \eta - D\xi^{-1}\phi'''' + 4D\xi^{-2}\xi'\phi'''' \\
 &+ (1 + \epsilon)\xi\phi'' - (3 + 2\epsilon)\xi'\phi' - (\xi'' - 3\xi^{-1}\xi'^2)\phi
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'''' &= 3\xi^{-1}\xi'\phi'''' + \epsilon D^{-1}\xi^2\phi'' - \epsilon D^{-1}\xi\xi'\phi' \\
 &- D^{-1}\xi^2(1 - s_i^2 C_i^2 \xi^2)\phi - \xi^{-1}\eta'''' + 6\xi^{-2}\xi'\eta'' \\
 &+ (D^{-1}\xi + \epsilon D^{-1}\xi + 2\xi^{-2}\xi'' - 12\xi^{-3}\xi'^2)\eta' \\
 &+ (2\epsilon D^{-1}\xi' - \xi^{-2}\xi'' + 9\xi^{-3}\xi'\xi'' - 12\xi^{-4}\xi'^3)\eta'
 \end{aligned} \tag{25}$$

이상에서 식(24)와 식(25)가 뒀과 회전관성을 고려한 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식이다. 이 지배미분방정식들에서 회전관성지표 R 을 갖고 있는 항이 자유진동에 대한 회전관성의 영향요소이며, 뒀계수 D 를 갖고 있는 항이 뒀의 영향요소이다. 따라서 $R=0$ 이면 회전관성을 무시하는 경우이며, $R=1$ 이면 회전관성을 고려하는 경우이다. 또한 $D=0$ 이면 뒀을 무시하는 경우이고, $D=$ '소요의 값'이면 뒀을 고려하는 경우가 된다.

본 연구에서 곡선보의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정을 채택하였으며, 이들 단부조건에 따른 경계조건은 다음과 같다. 먼저 회전단($\theta = \theta_L$ 또는 $\theta = \theta_L + \alpha$)에서 수직변위, 비틀림각, 식(6)의 휨모멘트와 식(5)의 bimoment가 발생하지 않으므로 무차원 변수들을 이용하면 식(26)~(29)의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\eta = 0, \phi = 0, \eta'' = 0 \tag{26-28}$$

$$\phi'' - \xi^{-2}\xi'\eta' = 0 \tag{29}$$

고정단($\theta = \theta_L$ 또는 $\theta = \theta_L + \alpha$)에서 수직변위, 비틀림각, 식(8)의 단면회전각과 식(4)의 뒀이 발생하지 않으므로 무차원 변수들을 이용하면 식(30)~(33)의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\eta = 0, \phi = 0 \tag{30,31}$$

$$\eta' = 0, \phi' = 0 \tag{32,33}$$

3. 형상함수

앞에서 유도한 미분방정식들은 극좌표계의 θ 에 관한 미분방정식으로 유도되어 있다. 그러나 곡선보의 선형은 직교좌표계 (x, y) 위에서 정의되어야 한다. 따라서 이 지배미분방정식에 포함되어 있는 형상함수들인 θ 및 ξ, ξ', ξ'', ξ''' 의 변수들을 x 에 관한 함수로 나타내어야 한다. 그림 1의 (x, y) 평면 위에 놓인 $y=y(x)$ 의 형상을 갖는 곡선보의 선형과 곡률반경을 무차원 변수들을 이용하면 각각 식(34), (35)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta = \delta(\xi), \xi = \delta^{i-1}(1 + \delta^{i2})^{3/2} \tag{34,35}$$

위의 식들에서 (i)은 $d/d\xi$ 의 미분연산자이다.

곡선보의 임의점에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도 θ 는 다음 식과 같다.

$$\theta = \pi/2 - \tan^{-1}(\delta^i) \tag{36}$$

식(34), (35) 및 다음의 식(37)~(39)를 이용하면 식(24), (25)의 지배미분방정식에 포함되어 있는 변화곡률계수 ξ, ξ', ξ'' 및 ξ''' 을 결정할 수 있다.

$$\xi' = \xi^i \xi', \xi'' = (\xi')^i \xi', \xi''' = (\xi'')^i \xi' \tag{37-39}$$

그림 1에서 좌측단을 원점으로 하는 (x, y) 평면 위에 놓인 지간길이 l , 수평높이 h 인 포물선형 곡선보의 무차원 선형식은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\delta = -4f\xi(\xi - 1) \tag{40}$$

식(35)~(39)와 식(40)을 이용하면 다음의 식(41)~(45)와 같이 포물선형 곡선보에 대한 형상함수 θ 및 변화곡률계수들을 구할 수 있다.

$$\theta = \pi/2 - \tan^{-1}(g), \xi = (0.125/f)(1 + g^2)^{3/2} \tag{41,42}$$

$$\xi' = 1.5(2\xi - 1)(1 + g^2)^{3/2} \tag{43}$$

$$\zeta'' = (0.375/f)(1+4g^2)(1+g^2)^{3/2} \quad (44)$$

$$\zeta''' = 1.5(2\xi-1)(11+20g^2)(1+g^2)^{3/2} \quad (45)$$

$$g = -4f(2\xi-1) \quad (46)$$

또한 식(41)을 이용하면 포물선형 곡선보의 중심각 α 를 구할 수 있다.

$$\alpha = 2 \tan^{-1}(4f) \quad (47)$$

4. 수치해석 방법 및 결과분석

앞장에서 유도한 지배미분방정식 식(24), (25)를 수치해석하는 문제는 곡선보의 기하학적 형상 즉 f , s , s_p , ϵ , D 및 단부조건에 대하여 지배미분방정식들의 고유치인 무차원 고유진동수 C_i 를 결정하는 문제이다. 이를 위하여 경계조건식인 식(26)~(29) 또는 식(30)~(33)을 초기조건으로 하여 지배미분방정식 식(24), (25)를 Runge-Kutta method¹³⁾로 수치적분하고 고유치 C_i 값은 Regula-Falsi method¹³⁾와 결합한 행렬값 탐사법¹⁴⁾으로 산출하였다. 이상과 같은 수치해석 방법은 Oh 등¹⁴⁾의 논문에서 이미 그 유용성이 입증된 바 있다.

본 연구의 결과를 검증하기 위하여 타문헌과의 고유진동수를 표 1, 2에서 비교하였다. 먼저 뒀을 고려하지 않은 포물선 곡선보에 대하여 본 연구와 구조해석용 범용 프로그램인 ADINA의 C_i ($i=1,2,3$)값을 표 1에서 비교하였다. 저자들의 문헌조사에 의하면 뒀을 고려한 포물선형 곡선보의 연구결과는 타문헌에 존재하지 않으므로 강과 최⁹⁾가 산출한 회전-회전 원호형 곡선보의 결과를 본 연구의 결과와 표 2에서 비교하였다. 이 문헌에서는 중심각 α 를 10°에서 90°까지 10°씩 증가시키면서 고유진동수(rad/sec)를 산출하였으므로 본 연구의 포물선형 곡선보에서도 이 문헌의 중심각 α 에 대응하는 고유진동수를 구하였다. 표 2에서 곡선보의 구조적 특성값은 $A=92.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $\gamma=7864 \text{ N-sec}^2/\text{m}^4$, $I_p=1.523 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $EI=2.269 \times 10^7 \text{ Nm}^2$, $GJ=1.137 \times 10^6 \text{ Nm}^2$, $EI_w=1.112 \times 10^5 \text{ Nm}^4$ 을 사용하였다. 표 1, 2에 보인 바와 같이 두 결과들은 매우 우수하게 접근하여 본 연구결과의 이론적 타당성을 검증할 수 있었다.

표 1 타문헌과의 C_i 값 비교 ($D=0, R=1.$)

제 원	i	무차원 고유진동수, C_i		
		본 연구	ADINA	
$f=0.2$ $s=0.013$ $s_p=0.015$ $\epsilon=0.26$	회전-회전	1	4.800	4.794
		2	28.38	28.38
		3	67.27	67.25
	회전-고정	1	10.18	10.14
		2	37.18	36.96
		3	79.76	79.00
고정-고정	1	16.33	16.20	
	2	46.86	46.23	
	3	93.17	91.37	

표 2 타문헌과의 제 1고유각진동수(rad/sec) 비교 ($R=0.$)

α (deg.)	l (m)	h (m)	제 1 고유각진동수, ω_1	
			본 연구	문헌 ⁹⁾
10	5.11	0.112	202.4	201.3
20	5.10	0.223	184.3	183.2
30	5.06	0.333	162.2	160.9
40	5.02	0.442	140.5	139.5
50	4.96	0.550	120.9	120.1
60	4.89	0.655	103.8	103.0
70	4.81	0.758	88.94	88.3
80	4.71	0.858	76.01	75.4
90	4.61	0.955	64.67	64.1

* 문헌⁹⁾의 호장은 5.12m이며, l, h 는 포물선 곡선보의 기하학적 형상임.

표 3~5는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 포물선형 곡선보에 대한 최저차 3개의 무차원 고유진동수 C_i 를 수록한 것이다. 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향은 이미 여러 문헌들에 발표되어 있으므로 이 논문에서는 특별히 회전관성의 영향에 대하여 논의하지 않았고, 이 후의 모든 수치해석 결과는 $R=1$ 즉, 회전관성을 고려한 결과들이다. 이 표들에서 강성계수 ϵ 은 개략적으로 강재 박판 I형 단면에 해당하는 0.05를 택하였다. 수평높이대 시간길이비 f 의 범위는 0.1~0.4, 세장비 관련변수 s_p 는 0.02와 0.005, 뒀 계수 D 는 0.0, 0.05, 0.50을 택하였으며, 세장비 관련변수 $s=0.8s_p$ 의 값으로 일정하게 하고 C_i 를 산출하였다. 앞에서 설명한 바와 같이 $D=0$ 이면 뒀을 무시하는 경우가 된다.

표 3~5에서 수평높이대 시간길이비 f 가 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 일반적으로 감소함을 알 수 있다. 그러나 일부 모드에서는 f 가 증가함에 따라 C_i 도 증가함을 알 수 있는데, 이는 비틀림진동이 지배적인

표 3 회전-회전 보의 무차원 고유진동수
($\epsilon=0.05, s=0.8s_p, R=1.$)

f	s _p	D	무차원 고유진동수, C _i		
			i=1	i=2	i=3
0.1	0.02	0	5.774	31.06	52.01
		0.05	8.279	36.72	83.63
		0.50	8.716	36.86	83.70
	0.005	0	5.829	32.09	78.19
		0.05	8.285	36.73	83.65
		0.50	8.718	36.86	83.71
0.2	0.02	0	2.586	19.97	52.98
		0.05	5.030	29.97	70.75
		0.50	6.030	30.45	70.99
	0.005	0	2.599	20.66	57.33
		0.05	5.038	30.00	70.80
		0.50	6.033	30.46	71.02
0.3	0.02	0	1.068	12.34	36.62
		0.05	2.305	22.22	55.54
		0.50	3.239	23.08	56.00
	0.005	0	1.070	12.62	38.99
		0.05	2.309	22.25	55.60
		0.50	3.241	23.09	56.03
0.4	0.02	0	0.3399	7.653	25.00
		0.05	0.7322	15.52	41.84
		0.50	1.193	16.66	42.51
	0.005	0	0.3403	7.762	26.15
		0.05	0.7331	15.55	41.90
		0.50	1.194	16.68	42.54

표 5 고정-고정 보의 무차원 고유진동수
($\epsilon=0.05, s=0.8s_p, R=1.$)

f	s _p	D	무차원 고유진동수, C _i		
			i=1	i=2	i=3
0.1	0.02	0	18.94	51.84	82.34
		0.05	20.83	58.03	114.2
		0.50	20.90	58.08	114.2
	0.005	0	19.17	54.43	109.6
		0.05	20.84	58.04	114.2
		0.50	20.91	58.09	114.3
0.2	0.02	0	14.33	39.72	76.01
		0.05	17.18	49.02	97.53
		0.50	17.37	49.20	97.69
	0.005	0	14.44	41.44	86.19
		0.05	17.20	49.05	97.58
		0.50	17.37	49.22	97.72
0.3	0.02	0	10.14	29.01	58.76
		0.05	13.20	38.43	77.67
		0.50	13.40	38.76	77.97
	0.005	0	10.20	29.87	63.42
		0.05	13.21	38.47	77.75
		0.50	13.41	38.79	78.01
0.4	0.02	0	7.015	20.74	43.29
		0.05	9.920	28.96	59.60
		0.50	10.06	29.41	60.02
	0.005	0	7.041	21.16	45.68
		0.05	9.931	29.00	59.68
		0.50	10.07	29.44	60.06

표 4 회전-고정 보의 무차원 고유진동수
($\epsilon=0.05, s=0.8s_p, R=1.$)

f	s _p	D	무차원 고유진동수, C _i		
			i=1	i=2	i=3
0.1	0.02	0	11.74	41.17	52.06
		0.05	14.00	46.81	98.34
		0.50	14.17	46.90	98.40
	0.005	0	11.87	42.76	93.36
		0.05	14.00	46.82	98.36
		0.50	14.18	46.90	98.40
0.2	0.02	0	7.726	29.52	65.25
		0.05	10.80	39.05	83.66
		0.50	11.24	39.36	83.85
	0.005	0	7.782	30.63	71.36
		0.05	10.81	39.07	83.71
		0.50	11.25	39.38	83.88
0.3	0.02	0	4.870	20.27	47.53
		0.05	7.651	30.02	66.25
		0.50	8.106	30.58	66.60
	0.005	0	4.892	20.81	50.89
		0.05	7.661	30.06	66.31
		0.50	8.112	30.60	66.64
0.4	0.02	0	3.061	13.78	33.92
		0.05	5.393	22.07	50.47
		0.50	5.676	22.81	50.98
	0.005	0	3.070	14.03	35.63
		0.05	5.400	22.11	50.54
		0.50	5.680	22.83	51.02

경우에 발생하는 현상이다. 즉 f가 증가함에 따라서 휨진동이 지배적인 경우에는 C_i가 감소하고, 비틀림진동이 지배적인 경우에는 C_i가 증가하여 특정 f에서 두 개의 모드가 교차한다. 또한 D=0의 C_i값은 D≠0인 경우와 비교하여 C_i값이 작으므로 뒀은 고유진동수를 감소시키는 요인으로 작용하는 것을 알 수 있다.

이 표들에서 세장비 관련변수 s_p가 작을수록 무차원 고유진동수 C_i가 크고, 뒀계수 D가 증가하는 경우에 C_i는 항상 증가하며, s_p가 클수록 D의 변화에 따른 C_i의 변화가 큰 것을 알 수 있다. 한편 수평높이대 지간길이 비 f가 동일한 경우 D가 충분히 크면, s_p에 관계없이 거의 일정한 C_i값을 나타내는 것을 알 수 있다. 다른 조건이 동일한 경우에 C_i값은 고정-고정, 회전-고정 및 회전-회전의 단부조건 순서로 큰 것을 알 수 있다. 이상의 토의로부터 수평 곡선보의 고유진동수 산출시에 뒀 효과를 반드시 고려해야 된다고 사료된다.

5. 모형실험

본 연구의 이론적인 타당성을 검증하기 위하여 실험실

규모의 모형실험을 실시하였다. 두께가 0.2 cm인 강판 ($E=200.1 \text{ GPa}$, $G=77.3 \text{ GPa}$, $\gamma=7864 \text{ N}\cdot\text{sec}^2/\text{m}^4$)을 이용하여 폭과 높이가 3 cm인 I형 단면 ($A=1.7200 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $I=2.6489 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $J=2.4000 \times 10^{-10} \text{ m}^4$, $I_p=4.6426 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $I_w=4.4858 \times 10^{-12} \text{ m}^6$)을 갖는 수평높이 $h=12 \text{ cm}$, 지간길이 $l=60 \text{ cm}$ 인 포물선형 수평 곡선보를 제작하였다. 보의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정을 택하여 3조의 시편을 제작하였다. 식(17)~(21)을 이용하면 모형 곡선보의 무차원 변수들 $f=0.2$, $s=0.021$, $s_p=0.027$, $\epsilon=0.0035$, $D=0.00047$ 을 계산할 수 있다.

곡선보의 모형 제작시에 고정단은 강재 받침에 직접 보울트로 고정시켰다. 회전단은 플랜지의 상하를 얇은 강판으로 용접한 후에 경첩을 용접하여 강재 받침에 보울트로 고정시켰다. 이 때 강재 받침과 곡선보가 연성으로 진동하는 것을 방지하기 위하여 강재 받침은 두께 3cm의 아크릴판과 0.5cm의 고무판이 부착된 중량 80kgf, 1변이 30cm인 정육면체의 화강암 블럭 위에 부착하여 강재 받침의 강성을 곡선보의 강성보다 매우 크게하였다.

이와 같이 제작된 곡선보의 진동실험을 실시하였다. 본 연구에서는 총 13점의 가진점을 택하여 시편 위에 표시하였으며, 곡선보의 가속도 응답을 측정하기 위하여 소형의 가속도 센서를 시편 밑면에 부착하였다.

소형의 가속도 센서가 부착된 impact hammer를 이용하여 시편 위에 표시된 가진점을 연직방향으로 차례로 타격하면서 가진력과 시편의 가속도 응답을 Signal Analyzer(Model SD390, Scientific-Atlanta Corp.)를 이용하여 기록하였다. 이로부터 주파수 응답함수(Frequency Response Function)를 구하여 모드해석 소프트웨어(Model STAR System, GenRad Inc.)가 내장된 퍼스널 컴퓨터로 전송하였다. 13개의 가진점에서 측정된 주파수 응답함수에 대한 curve fitting¹⁵⁾을 실시하여 고유진동수를 구하였다. 본 연구에서는 각 조별로 여러 번의 반복실험을 실시하여 2% 범위내의 정도를 갖는 측정결과를 얻었다. 본 실험에서의 실험 모형도와 측정 계통도를 그림 2에 나타내었다.

표 6은 모형 곡선보의 고유진동수에 대한 이론적 연구결과와 실험결과를 비교한 것이다. 이론적 연구의 고유진동수는 모형 곡선보의 구조적 특성값 $l=0.6 \text{ m}$, $E=200.1 \text{ GPa}$, $I=2.6489 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $A=1.7200 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $\gamma=7864 \text{ N}\cdot\text{sec}^2/\text{m}^4$ 를 식(23)에 적용하여

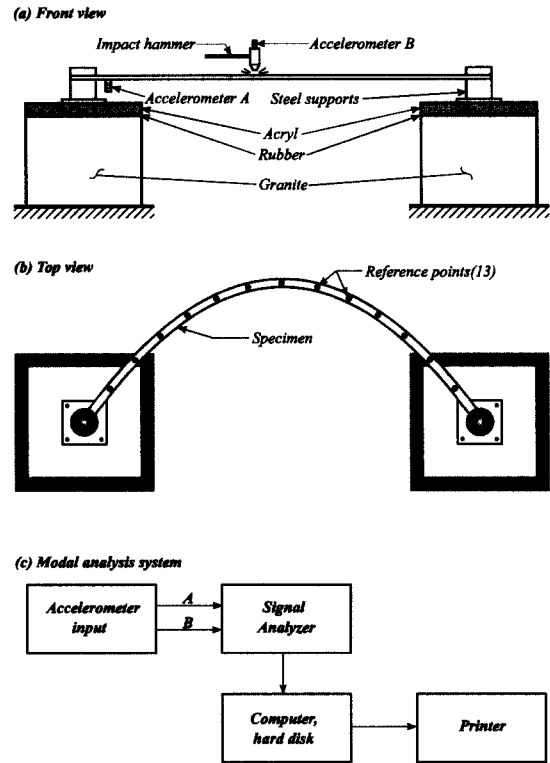


그림 2 실험 모형도 및 측정 계통도

표 6 해석결과와 실험결과와의 고유진동수(Hz) 비교

제 원	단부 조건	i	본 연구 ($R=1.$)	실험	오 차 (%)*
$f=0.2$ $\epsilon=0.0035$	회전-회전	1	29.47	27.5	6.68
		2	371.1	330	11.1
		3	1224.	1103	9.89
$D=0.00047$ $s=0.021$ $s_p=0.027$	회전-고정	1	181.0	167	7.73
		2	676.9	615	9.14
		3	1414.	1271	10.1
포물선형	고정-고정	1	395.5	375	5.18
		2	981.4	926	5.64
		3	1503.	1410	6.19

* 오차(%) = $|1 - \text{실험}/\text{본 연구}| \times 100$

얻어진 $f_i = \omega_i / (2\pi) = 27.675 \text{ C}_i \text{ Hz}$ 로부터 구할 수 있다. 이 표에서 본 연구의 이론적인 고유진동수는 실험값과 우수하게 접근한 것을 알 수 있다. 회전-회전과 회전-고정의 단부조건인 경우에 비교적 큰 오차가 발생한 것은 회전단의 제작결함으로 인하여 시편의 들쭉거림이 발생하였기 때문인 것으로 사료된다.

6. 결 론

이 논문은 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 이를 위하여 뒹과 회전관성을 고려하여 임의의 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 면외 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 수치적분기법과 행렬값 탐사법을 이용하여 지배방정식으로부터 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하고 이를 컴퓨터 프로그램하였다. 실제의 수치해석 예는 포물선형 수평 곡선보에 적용하였다. 본 연구의 해석결과를 검증하기 위하여 타문헌과의 고유진동수를 비교하였고, 실험실 규모의 모형실험을 실시하여 고유진동수의 이론값과 실험값을 비교하였다. 다양한 제원을 갖는 포물선형 수평 곡선보에 대한 수치해석 결과를 표에 제시하였다. 수평 곡선보의 고유진동수 산출시에 뒹 효과를 반드시 고려해야 된다고 사료된다. 본 연구의 결과는 곡선형 교량 등과 같이 곡선부재로 이루어진 구조물의 설계시에 유용하게 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 1998년 한국과학재단의 핵심전문연구과제 연구비(과제번호:981-1201-001-1)에 의하여 이루어진 연구결과들 중의 일부이며, 재단당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- H. Yonezawa, "Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 88, No. EMI1, 1962, pp.1~22
- T.V. Ojalvo, "Coupled Twist-Bending Vibrations of Incomplete Elastic Rings," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 4, 1962, pp.53~72
- C.G. Culver, "Natural Frequencies of Horizontally Curved Beams," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 93, No. ST2, 1967
- C.P. Tan and S. Shore, "Dynamic Response of a Horizontally Curved Bridge," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, No. ST3, 1968, pp.761~781
- M. Petyt and C.C. Fleischer, "Vibration of Multi-Supported Curved Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 32, No. 3, 1974, pp.359~365
- C.P. Heins and M.A. Sahin, "Natural Frequency of Curved Box Girder Bridges," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 105, No. ST12, 1979
- S.S. Dey and N. Balasubramanian, "Dynamic Response of Orthotropic Curved Bridge Decks due to Moving Loads," *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 1, 1984, pp.27~32
- M.S. Issa, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, No. 2, 1988, pp.291~301
- 강영중, 최영준, "Free Vibration of Thin-Walled Horizontally Curved Beams", 한국강구조학회논문집, 제7권 제4호, 1995, pp.243~258
- W.P. Howson, A.K. Jemah and J.Q. Zhou, "Exact Natural Frequencies for Out-of-Plane Motion of Plane Structures Composed of Curved Beam Members," *Computers & Structures*, Vol. 55, No. 6, 1995, pp.989~995
- 모정만, 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 원광대학교 대학원 박사학위논문, 1998.
- C.P. Heins, *Bending and Torsional Design in Structural Members*. D.C. Heath and Company, 1975
- E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 5th Edition, John Wiley and Sons, 1972
- S.J. Oh, B.K. Lee and I.W. Lee, "Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, No. 1, 1999, pp.23~33
- D.J. Ewins, *Modal Testing : Theory and Practice*, John Wiley and Sons, 1985