

# 재귀형 직교 웨이브렛 함수

도 재 수<sup>†</sup>

요 약

본 논문에서는, 1차원 및 2차원 웨이브렛 함수를 전역통과필터(APF)와 지연기의 병렬접속에 의한 재귀형(IIR) 디지털 필터로 구성하는 방법을 제안한다. Mallat에 의하여 웨이브렛 변환과 필터뱅크가 밀접한 관계에 있다는 것이 알려졌고, 완전 재구성 필터뱅크로부터 웨이브렛 함수를 도출하는 다양한 방법이 알려져 있다. 그러나, 이러한 방법의 대부분은 비재귀형(FIR) 디지털 필터에 근거를 두는 것으로, 재귀형 디지털 필터에 의한 방법은 거의 제안되어 있지 않다. 재귀형 필터를 이용하는 장점은 비재귀형에 비하여 낮은 차수로 표현되는 점이다. 또 직교 웨이브렛 함수를 끌어내기 위한 직교조건을 용이하게 만족시킬 수 있다. 본 논문에서는 웨이브렛 함수에 요구되는 레귤러리티(Regularity)조건을 만족시키기 위하여, 최대 평탄성(Maximally Flat)을 부가한 새로운 1차원 및 2차원 재귀형 웨이브렛 함수의 도출법을 보인다.

## Orthogonal Wavelet Construction using Recursive Filter Bank

Jae Su Do<sup>†</sup>

ABSTRACT

The purpose of this paper is to suggest a construction method of IIR Digital Filter by using a parallel connection of the First and Second dimension of wavelet function with APF and delayer. According to Mallat, it is known that the wavelet function is closely connected with filter bank, and that there are many ways of extracting wavelet function out of a complete reconstructive filter bank. These methods, however, are mostly based upon FIR Digital Filter. Therefore there is only a few ways of using IIR Digital Filter. The advantage of using IIR Filter is that it decreases order comparing to FIR Filter. Also, it satisfies the orthogonal condition which extracts the orthogonal wavelet function. In order to satisfy the regularity conditions of wavelet function, this paper deals with the extracting method from a new First and Second dimension of a recursive wavelet function by adding the Maximally Flat.

키워드: 웨이브렛 함수(Wavelet Function), 재귀형 필터(IIR Filter), 비재귀형 필터(FIR Filter), 레귤러리티 조건(Regularity Condition), 최대 평탄성(Maximally Flat)

### 1. 서 론

웨이브렛(Wavelet) 변환은, 시간적으로 변화하는 비정상 신호를 해석하는 새로운 방법이다. 이 이론은 처음, 프랑스 학자인 Morlet에 의하여, 인공지진을 이용한 석유탐사법의 해석도구로 도입되었다. 그리고 근년에는 Mallat에 의하여, 직교 웨이브렛 변환과 직교 미러 필터가 밀접한 관계에 있다는 것이 알려졌고, 그 후에 웨이브렛 변환에 의한 신호처리가 주목을 받았다. 이 변환은, 신호를 다중 해상도 공간에서 처리할 수 있기 때문에, 비정상 신호의 해석, 특히 특이성의 검출이나 음성이나 화상의 압축부호화의 하나인 서브밴드 부호화 등 공학의 다양한 분야에 넓게 이용된다. 이와 같이, 웨이브렛 변환은 종래 독립적으로 연구가 진행되어 온 몇 개의 신호처리 기술을 수학적으로 통일화하여 취

급할 수 있으므로 이 후의 발전이 기대된다[1-9].

본 논문에서는, 웨이브렛 변환의 기저함수(웨이브렛 함수)를 재귀형(IIR) 디지털 필터로부터 도출하는 방법을 보인다. Mallat에 의하여 웨이브렛 변환과 필터뱅크의 관계가 알려진 후, Daubechies는 필터뱅크로부터 역으로 웨이브렛 함수를 도출하는 방법을 보였고, 그 이후 다양한 방법이 연구되었다. 그러나, 이러한 방법의 대부분은 비재귀형(FIR) 디지털 필터에 근거를 둔 것이고, 재귀형 디지털 필터에 의한 방법은 거의 알려져 있지 않다. 재귀형 필터를 이용하는 장점은 비재귀형에 비하여 저차수로 실현되는 것 뿐만 아니고, 특히 전역통과필터(APF)와 지연기의 병렬구조[11-14]를 이용함으로써, 직교 웨이브렛 함수를 위한 직교조건을 용이하게 만족시킬 수 있다는 것이다.

본 논문에서는, 지연기와 전역통과회로의 병렬구조를 이용하여 직교조건을 만족하고, 더욱이 이 필터에 최대 평탄성(Maximally Flat)[10]을 부가함으로써, 레귤러리티(Regularity)조건을 만족하는 새로운 직교 웨이브렛 함수의 도출법

\* 본 연구는 2001학년도 동국대학교 천문학술지 논문게재연구비 지원으로 수행되었습니다.

† 종신회원: 동국대학교 컴퓨터학과 교수

논문접수: 2001년 3월 29일, 심사완료: 2001년 8월 10일

을 제안한다. 특히 스케일 2의 2차원 직교 웨이브렛 함수에 대하여는, FIR형 필터를 이용한 방법도 알려져 있지만, 비선형 방정식을 풀 필요가 있어, 얻어진 함수는 저차수의 것으로 제한된다. 한편, 본 방법에서는 직교조건을 쉽게 만족시킬 수가 있고, 임의의 저차수의 웨이브렛 함수가 도출된다는 점이 큰 특징이다.

본 논문에서는, 먼저 웨이브렛 변환의 정의와 그 중요한 조건인 직교조건과 레귤러리티 조건을 1차원 및 2차원으로 부여한다. 그리고, 전역통과필터와 지연기의 병렬접속의 구성에 의한 기저함수의 도출방법을 1차원과 2차원인 경우로 나누어 논의하고, 최후로 각각의 설계 예를 보여, 본 방식의 유효성을 입증한다.

## 2. 웨이브렛 변환

### 2.1 웨이브렛 변환

웨이브렛 변환에는, 다음과 같은 컴팩트 서포트(Compact support)된 기본 웨이브렛 함수  $\phi(x)$  (i.e. 국부(local)함수)를 준비한다.

$$\phi(x) = 0 \quad |x| > M \quad (1)$$

(단, 본 논문에서 제안하는 재귀형 웨이브렛 함수에 대하여는, 이 컴팩트 서포트라는 말이, 적당하지 않을 지도 모른다.) 그리고 이 기본 웨이브렛 함수에, 허용 조건 ( $\phi(x)$ 의 평균이 0)

$$\hat{\phi}(0) = 0 \quad (2)$$

를 만족시킨다. 여기서  $\hat{\phi}(\omega)$ 는  $\phi(x)$ 의 푸리에 변환을 나타낸다. 이 기본 웨이브렛 함수에 스케일링과 시프트 변환을 행한 웨이브렛 함수

$$\phi_{a,b}(x) = a^{-1/2} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (3)$$

을 기저 함수로 이용한다. 특히 이산화하는 경우, 스케일링과 시프트의 각 파라미터는

$$\begin{aligned} a &= \alpha^k = 2^{-k} \\ b &= \alpha^k \beta n = 2^{-k} n \end{aligned} \quad (4)$$

로 두는 경우가 많다. 이 경우의 이산 웨이브렛 함수는  $x = mT = m$ 로 하여 다음과 같이 된다.

$$\phi_{k,n}(m) = 2^{k/2} \phi(2^k m - n) \quad (5)$$

이 때, 이산 웨이브렛 변환은 다음 식과 같이 정의된다 [1-9].

$$W_{f(k,n)} = \langle f | \phi_{k,n} \rangle \quad (7)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \overline{\phi_{k,n}(m)} dx \quad (8)$$

여기서,  $\overline{\phantom{x}}$ 는  $\cdot$ 의 복소 공역을 나타낸다.

또 다차원, 특히 2차원으로 확장하는 것은 간단히 변수  $(x)$ 를  $(x_1, x_2)$ 로 확장하여, 1차원과 같은 조건을 부과하여 기본 웨이브렛 함수를 생성하면 되지만, 2차원에서의 웨이브렛 변환은 1차원 웨이브렛 변환을 종과 횡으로 실시한 가분형 웨이브렛 함수에 의한 것과 일반적인 비가분형 웨이브렛 함수에 의한 것으로 크게 구분할 수 있다. 전자는 단순한 1차원의 확대이고, 본 논문에서는 후자에 대하여서만 의논을 진행한다.

### 2.2 직교 웨이브렛

여기서는 다중 해상도 해석공간을 이용하여, 직교 웨이브렛 함수  $\phi(x)$ 를 구한다. 먼저 다중 해상도 해석공간  $V_k$ 는 다음의 관계를 만족한다.

$$V_k \subset V_{k+1} \quad (9)$$

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} V_k = L^2(R) \text{이고 조밀, } \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} V_k = \{0\} \quad (10)$$

$$f(x) \in V_k \Leftrightarrow f(2x) \in V_{k+1} \quad (11)$$

$$f(x) \in V_k \Leftrightarrow f(x-n) \in V_k \quad (12)$$

이상으로부터,  $V_k$ 와 그 직교 보공간에 있는 직교 웨이브렛 공간  $W_k$ 의 관계는

$$V_{k+1} = V_k \oplus W_k \quad (W_k \perp W_{k'} \text{ if } k \neq k') \quad (13)$$

로 표현된다. 즉,

$$L^2(R) = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} W_k \quad (14)$$

로 되어,  $W_k$ 의 정규 직교 기저를 이루는 웨이브렛 함수  $\phi_{k,n}(x) = 2^{k/2} \phi(2^k x - n)$ 은,  $L^2(R)$ 를 이룬다. 그러므로  $V_k$ 의 정규 직교 기저를 이루는 스케일링 함수  $\phi_{k,n}(x) = 2^{k/2} \phi(2^k x - n)$ 을 이용한다. 이 때, 기본 스케일링 함수  $\phi(x)$ 와 기본 웨이브렛 함수  $\phi(x)$ 의 주파수 영역에서의 표현은,  $H(z)$ 를 저역통과 필터(LPF),  $G(z)$ 를 고역통과 필터(HPF)로 하면

$$\hat{\phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (15)$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k}\omega) \quad (16)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (17)$$

의 관계가 있다. 그런데, 상기의 스케일링 함수  $\phi_{k,n}$ 이 각 스케일에서 직교가 되기 위해서는, 다음의 직교 조건

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (18)$$

을 만족하지 않으면 안된다. 또 스케일링 함수와 웨이브렛

함수가 직교하기 위해서는,

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \quad (19)$$

을 만족하면 된다. 식 (19)을 만족하기 위해서는, 간단하게

$$G(\omega) = e^{-j\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \quad (20)$$

으로 되는 조건을 만족하면 된다. 따라서, 식 (18)을 만족하는  $H(\omega)$ 를 얻으면 된다. 이 때,  $H(\omega)$ 으로부터  $G(\omega)$ 를 구하고, 식 (15)~(17)을 이용하여, (정규)직교 웨이브렛 함수를 도출할 수 있다[1-9, 15]. 그런데, 이  $\phi(x)$ 가 다중 해상도 공간을 생성하는 조건에 대하여는, 다음절에서 논의한다. 또한, 이 직교 웨이브렛은 직교 미러필터(QMF) बैं크와 밀접한 관계가 있다[4, 5].

다음으로, 2차원 직교 웨이브렛 함수를 도출한다. 본 논문에서는 옥타브 분할 필터뱅크에 대한 고찰을 통하여, 스케일 2의 비가분형 웨이브렛 함수를 생각할 수 있다. 스케일 2의 샘플링 행렬은 여러 가지를 생각할 수 있지만, 본 논문에서는 화상 처리 등에 가장 많이 이용되는 다음과 같은 Quincunx 행렬을 이용한다[6, 7].

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

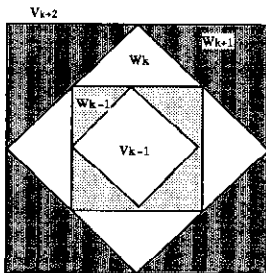
이 샘플링 행렬은

$$D^l = D, \quad D^2 = 2I, \quad |\det D| = 2$$

로 되는 관계가 있다. 더욱이 이 샘플링 행렬을 갖는 필터는 하프밴드필터(HBF)로 불리고, 다이아몬드나 펜형은 그 대표적인 특성이다. 본 논문에서는 후술의 레귤러리티 조건으로부터 다이아몬드형 필터만을 고려하고, 이 때의 다중 해상도 공간과 웨이브렛 공간을 (그림 1)과 같이 나타낸다. 또 이 때의 직교조건은, 1차원의 경우와 같이 다음 식으로 정의된다[5-7]. 먼저 식 (18)은

$$\begin{aligned} & |H(\omega_1, \omega_2)|^2 + |H(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi)|^2 \\ & = |G(\omega_1, \omega_2)|^2 + |G(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi)|^2 = 1 \end{aligned} \quad (22)$$

그리고 식 (19)는



(그림 1) 2차원 비가분형 다중해상도공간과 웨이브렛 공간 (Quincunx)

$$\begin{aligned} & H(\omega_1, \omega_2) \overline{G(\omega_1, \omega_2)} \\ & + H(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi) \overline{G(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi)} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

로 된다. 위의 식 (23)은 쉽게 만족되어, 남은 식 (22)를 만족시키는  $H(\omega)$ 가 얻어지면, 1차원의 경우와 같이

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H((D^k)^{-1}\omega) \quad (24)$$

의 관계로부터 비가분형의 2차원 스케일링 함수가 얻어진다.

### 2.3 레귤러리티

레귤러리티(Regularity)조건을 만족시키기 위해서는, 웨이브렛 함수가 다음 식과 같이  $L$ 차 모멘트까지 0이면 된다. 이 때,  $\phi$ 와  $\hat{\phi}$ 은 연속성을 가지는 함수로 된다[3].

$$\int x^l \phi(x) dx = 0 \quad \text{for } l = 0, 1, \dots, L \quad (25)$$

이것은 다음 식과 등가가 된다.

$$\frac{d^l}{d\omega^l} \hat{\phi}(\omega) |_{\omega=0} = 0 \quad \text{for } l = 0, 1, \dots, L \quad (26)$$

더욱이 식 (17) 및 식 (26)과  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ 으로 부터, 다음 식과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\frac{d^l}{d\omega^l} H(\omega) |_{\omega=\pi} = 0 \quad \text{for } l = 0, 1, \dots, L \quad (27)$$

즉, 레귤러리티 조건을 만족하기 위하여는,  $H(\omega)$ 가  $\omega = \pi$ 측에서 최대 평탄(Maximally Flat)성을 가지고 있으면 된다. 이 때,  $H(\omega)$ 는 적어도 하나  $\omega = \pi$ 에서 영점을 갖는다. 즉,  $H(\omega)$ 은 다음의 형태로 쓸 수 있다.

$$H(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-j\omega}}{2} \right)^{L+1} S(\omega) \quad (28)$$

단, 식 (18)로부터  $S(0) = 1$ 로 된다. 그러므로,  $B = \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} |S(\omega)|$ 로 두면,

$$B < 2^L \quad (29)$$

동시에, 어느 적당한  $\epsilon$ 에 대하여

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2 |n|^\epsilon < \infty \quad (30)$$

을 만족하면, 식 (16)의 무한적으로 도출되는  $\phi$ 는  $L^2(R)$ 의 정규 직교 기저함수로 되고,  $L^2(R)$ 의 다중 해상도 공간을 생성한다는 것이 알려져 있다. 식 (17) 또, 식 (30)은 유한개의 극과 영점을 갖는 필터를 고려하면, 반드시 만족한다. 따라서, 이하의 도출과정에서는 식 (29)을 만족하는 것을 보이면 된다[3].

또, 1차원과 같이 2차원의 경우의 레귤러리티 조건은

$$\frac{\partial^k H(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^l \partial \omega_2^{K-l}} \Big|_{(\omega_1, \omega_2) = (\pi, \pi)} = 0$$

for  $l = 0, 1, \dots, K$   
 $K = 0, 1, \dots, M$  (31)

로 된다.

결국, 직교성과 레귤러리티 조건을 만족하는  $H(\omega)$ 가 얻어지면, 직교 웨이브렛 함수가 도출된다.

### 3. (1차원) 기저함수의 도출

#### 3.1 (1차원) 기본구성

(그림 2)(이 그림은 2차원)와 같이 전역통과필터와 지연기의 병렬접속에 의하여 저역통과필터와 고역통과필터를 구성한다. 이 때, 저역통과필터와 고역통과필터는

$$H(z) = \frac{1}{2} \{ z^{-2N} + z^{-1} A(z^2) \} \quad (32)$$

$$G(z) = \frac{1}{2} z^{-1} \{ z^{-2N} - z^{-1} A(z^2) \} \quad (33)$$

$$= z^{-1} H(-z) \quad (34)$$

로 표현하고, 이러한 식을 식 (18) 및 식 (19)에 대입하면 반드시 직교 조건식을 만족할 수 있다. 여기서  $A(z)$ 은 전역통과 함수이고,

$$A(z) = z^{-N} \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^n}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (35)$$

로 정의된다. 그리고,  $z = e^{j\omega}$ 이다. 그러므로, 식 (35)를 식 (32)에 대입함으로써, 저역통과필터  $H(z)$ 는

$$H(z) = \frac{1}{2} \left\{ z^{-2N} + z^{-1} \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{2n}}{z^{2N} \sum_{n=0}^N a_n z^{-2n}} \right\}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-(2n-\frac{1}{2})} + z^{2n-\frac{1}{2}}}{2z^{2N+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^N a_n z^{-2n}} \quad (36)$$

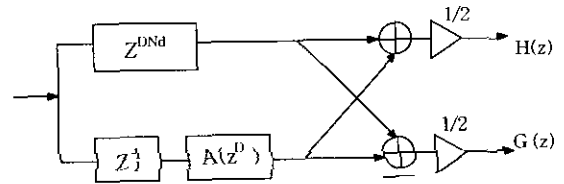
로 되고, 주파수 응답  $H(\omega)$ 는 다음과 같이 된다.

$$H(\omega) = \frac{e^{-j(2N+\frac{1}{2})\omega} \cdot \sum_{n=0}^N a_n \cos(2n-\frac{1}{2})\omega}{\sum_{n=0}^N a_n (\cos 2n\omega - j \sin 2n\omega)}$$

$$\doteq \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (37)$$

그런데, 웨이브렛 역변환을 행하기 위하여는, 시간축을 역으로 한  $H(z^{-1})$ ,  $G(z^{-1})$ 를 이용할 필요가 있다. 이 조작은, 신호의 시간축을 반전시켜, 통상의 처리를 행하는 것에

해당한다. 이 조작은 화상과 같은 유한한 수열에 대하여는 문는 없고, 음성과 같은 무한 수열에 대하여는, 참고문헌 [16]에 실시간 처리의 방법이 나와 있다.



(그림 2) 기본구성

#### 3.2 (1차원) 최대 평탄형 LPF

본 절에서는, 전 절에서 논한 정규 직교 필터에 레귤러리티 조건을 적용한다. 즉, 정규 직교 필터에 최대 평탄의 조건을 부과한다. 식 (27)과 식 (37)로부터

$$\frac{d^l}{d\omega^l} N(\omega) \Big|_{\omega=\pi} = 0 \quad \text{for } l=0, 1, \dots, L \quad (38)$$

로 고쳐 쓰여진다. 이 때  $l$ 이 우수인 때 위의 식은 항등적으로 0으로 되고,  $a_n$ 은 임의로 된다. 또,  $l$ 이 기수인 때  $a_0 = 1$ 로 하면, 식 (38)은 다음 식과 같이 된다.

$$\sum_{n=1}^N a_n (2n - \frac{1}{2})^l = (\frac{1}{2})^l \quad (39)$$

그러므로,  $l=2N-1 (=L)$ 을 이용하면, 식 (39)는 다음과 같은 행렬의 형태로 된다.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \dots & 2N - \frac{1}{2} \\ (\frac{3}{2})^3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\frac{3}{2})^L & \dots & \dots & (2N - \frac{1}{2})^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^3 \\ (\frac{1}{2})^5 \\ \vdots \\ (\frac{1}{2})^L \end{pmatrix} \quad (40)$$

이상의 행렬로부터, 최대 평탄형 LPF의 계수  $a_1, a_2, \dots, a_N$ 이 결정된다.

또,  $l=2N-3 (=L')$ 까지와  $\omega = \omega_0$ 에서 영점을 갖는다고 한 때의 조건식

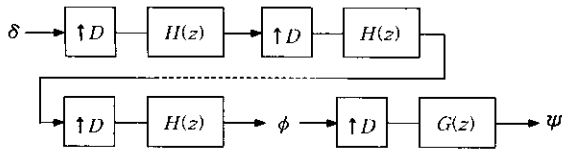
$$\sum_{n=1}^N a_n \cos(2n - \frac{1}{2})\omega_0 = -\cos \frac{\omega_0}{2} \quad (41)$$

을 이용하면, 계수  $a_n$ 을 이 경우에도 결정할 수 있다. 이와 같이, 레귤러리티 조건을 감소시켜 영점의 수를 증가시켜도, 같은 형태로 계수가 구하여져, 레귤러리티와 영점 설정의 임의성을 갖는 저역통과필터가 구성된다.

#### 3.3 (1차원) 스케일링 함수와 웨이브렛 함수

본 절에서는, 기본 스케일링 함수  $\phi(x)$ 와 기본 웨이브렛 함수  $\psi(x)$ 를 구하기 위하여, 전 절에서 도출한 최대 평탄형 필터에 Daubechies가 이용한 cascade 알고리즘을 적용한다[3]. 본

방식에서의 도출과정을 (그림 3)(이 그림은 2차원)에 보인다.



(그림 3) 스케일링함수와 웨이브렛함수의 도출과정

스케일링 함수는 식 (16)으로부터,  $H(z^{1/2})$ 를 무한회 종속 접속한 임펄스 응답 그 자체이다. 이것은 (그림 3)과 같이, 비율 2로 보간한 신호를 필터  $H(z)$ 를 통과시키는 것에 해당하여, 이것을 무한으로 반복하면 된다. 단, 유한개의 반복에서 수렴하는 것으로 알려져 있어, 수회의 반복에서 연속 웨이브렛 함수가 얻어진다. 단, 보간조작을 고려하여 시간축을 정규화할 필요가 있다. 실제로 스케일링 함수를 도출하기 위하여는 계산상의 관점으로부터, 신호열의 우수번째를  $z^{-N}$ 에, 기수번째를  $A(z)$ 에 통과시켜, 이것을 순번으로 행하는 것으로부터  $\phi(x)$ 를 구한다. 이 방법을 취함으로써, 직접 계산하는 방법보다도 계산회수를 반감시킬 수 있다.

최종적으로 식 (17)로부터, 2로 보간한 후,  $G(z)$ 를 통과하여 웨이브렛 함수를 구한다. 또한, 이 함수는 재귀형필터에 의하여 도출한 것이기 때문에, 기본적으로는 무한행렬로 될 수 있다. 그러나, 레귤라리티 조건을 만족하고 있기 때문에, 웨이브렛 함수는 지수 함수적으로 감쇄하고, 예제로 보이는 것과 같이 어느 구간이외에서는 충분히 감쇄한다고 생각할 수 있다.

4. 2차원 기저함수의 도출

본 장에서는, 1차원의 경우과 같이, 전역통과필터와 지연기의 병렬구조를 이용하여 스케일 2의 2차원 비가분형 웨이브렛 함수를 도출한다.

4.1 2차원 기본구성

(그림 2)와 같이 전역통과필터와 지연기의 병렬접속에 의하여 저역통과필터와 고역통과필터를 구성한다. 이 때, 저역통과필터와 고역통과필터는

$$H(z) = \frac{1}{2} \{ z^{D^N} + z_1^{-1} A(z^D) \} \tag{42}$$

$$G(z) = \frac{1}{2} z^{-1} \{ z^{D^N} - z_1^{-1} A(z^D) \} \tag{43}$$

$$= z^{-1} H(-z) \tag{44}$$

로 표현되고, 이러한 식을 직교 조건식(22) 및 식 (23)에 대입하면 반드시 직교조건을 만족시킬 수 있다. 그런데,

$$z = (z_1, z_2)^t \tag{45}$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2)^t \tag{46}$$

$$z^{N_s} = z_1^{-N} z_2^{-N} \tag{47}$$

$$A(z) = z_1^{-N} z_2^{-N} \frac{\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} z_1^m z_2^n}{\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} z_1^{-m} z_2^{-n}} \tag{48}$$

및 샘플링 행렬의 식 (21)에 의하여

$$z^D = (z_1 z_2, z_1 z_2^{-1})^t \tag{49}$$

$$(D_\omega = (\omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2)^t) \tag{50}$$

이다. 또 이상의 식을 식 (42)에 대입함으로써,  $H(z)$ 은

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left\{ z_1^{-2N} + z_1^{-1} \frac{\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} z_1^{m+n} z_2^{m-n}}{z_1^{2N} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} z_1^{-(m+n)} z_2^{-(m-n)}} \right\} \\ = \frac{\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} \left\{ z_1^{-(m+n-\frac{1}{2})} z_2^{-(m-n)} + z_1^{m+n-\frac{1}{2}} z_2^{m-n} \right\}}{2z_1^{2N+\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} z_1^{-(m+n)} z_2^{m-n}} \tag{51}$$

로 되어, 주파수 응답  $H(\omega)$ 은 다음과 같이 된다.

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{\left\{ e^{-j(2N+\frac{1}{2})\omega_1} \cdot \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} \right\}}{\left\{ \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} e^{-j(m+n)\omega_1 + (m-n)\omega_2} \right\}} \cdot \frac{\left\{ \cos \left( m+n-\frac{1}{2} \right) \omega_1 + (m-n)\omega_2 \right\}}{\left\{ \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} e^{-j(m+n)\omega_1 + (m-n)\omega_2} \right\}} \tag{52}$$

여기서 필터계수가 실수인 것으로부터

$$\overline{H(\omega_1, \omega_2)} = H(-\omega_1, -\omega_2) \tag{53}$$

이 성립하고, 또 진폭특성에 다음과 같은 대상의 형태를 한정하는 성질(상한대상성)을 갖는다.

$$|H(\omega_1, \omega_2)| = |H(\omega_1, -\omega_2)| \tag{54}$$

그렇게 하기 위하여 식 (53) 및 식 (54)으로부터

$$a_{mn} = a_{nm} \tag{55}$$

이라는 조건을 부과한다. 여기서

$$\begin{aligned} b_{mn} &= 2a_{mn} & (m \neq n) \\ b_{mn} &= a_{mn} & (m = n) \end{aligned}$$

으로 두면, 주파수 응답은

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{\left\{ e^{-j(2N+\frac{1}{2})\omega_1} \cdot \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N b_{mn} \right\}}{\left\{ \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N b_{mn} e^{-j(m+n)\omega_1} \cos(m-n)\omega_2 \right\}} \cdot \frac{\left\{ \cos \left( m+n-\frac{1}{2} \right) \omega_1 \cos(m-n)\omega_2 \right\}}{\left\{ \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N b_{mn} e^{-j(m+n)\omega_1} \cos(m-n)\omega_2 \right\}} \tag{56}$$

로 된다.

4.2 2차원 최대 평탄형 LPF

본 절에서는, 전 절에서 논한 정규 직교 필터에 레글레리티 조건을 적용한다(최대 평탄형 필터라 한다). 이 경우 변수가 늘어나기 때문에, 1차원보다는 조건이 다소 복잡하게 된다. 먼저,

$$N_0(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m b_{mn} \cos(m+n-\frac{1}{2})\omega_1 \cdot \cos(m-n)\omega_2 \quad (57)$$

라 하면 식 (31)은

$$\frac{\partial^{l_1+l_2} N_0(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^{l_1} \partial \omega_2^{l_2}} \Big|_{(\omega_1, \omega_2)=(\pi, \pi)} = 0 \quad \text{for } l_1+l_2=0, 1, \dots, M \quad (58)$$

로 변형할 수 있다. 여기서  $\cos a\omega_i$ 에 대하여 고려하여 보면

$$\frac{\partial^{2k} \cos a\omega_i}{\partial \omega_i^{2k}} \Big|_{\omega_i=\pi} = (-1)^k a^{2k} \cos a\pi \quad (59)$$

$$\frac{\partial^{2k+1} \cos a\omega_i}{\partial \omega_i^{2k+1}} \Big|_{\omega_i=\pi} = (-1)^{k+1} a^{2k+1} \sin a\pi \quad (60)$$

라 할 수 있다. 즉  $a$ 가 정수인 때, 식 (60)=0으로 되고,  $a=\beta+1/2$  ( $\beta$ 는 정수)인 때, 식 (59)=0으로 되는 것을 알 수 있다. 따라서  $l_1$ 이 우수 또는  $l_2$ 가 기수인 경우, 식 (58)은 항등적으로 0으로 되고, 필터계수  $b_{mn}$ 는 임의로 된다. 그러므로 이것 이외의  $l_1$ 이 기수이고  $l_2$ 가 우수인 경우만 생각한다. 이 경우, 식 (58)은

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{(2k_1+1)+2k_2} N_0(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^{2k_1+1} \partial \omega_2^{2k_2}} \Big|_{(\omega_1, \omega_2)=(\pi, \pi)} \\ &= \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m b_{mn} (-1)^{k_1+k_2+1} (m+n-\frac{1}{2})^{2k_1+1} \\ & \quad \cdot \sin(m+n-\frac{1}{2})\pi \cdot (m-n)^{2k_2} \cos(m-n)\pi \\ &= \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m b_{mn} (-1)^{k_1+k_2} (m+n-\frac{1}{2})^{2k_1+1} \cdot (m-n)^{2k_2} \\ &= 0 \quad (k_1, k_2 \text{는 } 0 \text{이상의 정수}) \end{aligned} \quad (61)$$

로 된다. 여기서,  $0^0=1, 0^p=0(p \neq 0)$ 로 생각하여,  $b_{00}(a_{00})=1$ 으로 부터 위의 식은

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^m b_{mn} (-1)^{k_1+k_2} (m+n-\frac{1}{2})^{2k_1+1} (m-n)^{2k_2} \\ & + (-1)^{k_1+k_2} (-2)^{-(2k_1+1)} \cdot 0^{2k_2} = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

로 고쳐 쓸 수 있다. 더욱이 경우를 분류하여

$k_2=0$ 인 때

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^m b_{mn} (-1)^{k_1} (m+n-\frac{1}{2})^{2k_1+1} = (-1)^{k_1} 2^{-(2k_1+1)} \quad (63)$$

$k_2 \neq 0$ 인 때

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^m b_{mn} (-1)^{k_1+k_2} (m+n-\frac{1}{2})^{2k_1+1} \cdot (m-n)^{2k_2} = 0 \quad (64)$$

로 된다.

이러한 식들로부터 계수가 도출되지만, 여기서 필터계수  $b_{mn}$ 의 개수와 레글레리티 조건식( $l_1$ 이 기수이고  $l_2$ 가 우수인 경우)의 관계를 생각한다. 먼저, 전자의 수는

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

개로 된다. 또 후자의 수는

$$\frac{(M+3)(M+1)}{8}$$

개로 된다. 이상으로부터

$$N = \frac{M-1}{2}$$

로 하면 개수는 일치한다. 그러나, 식 (63), 식 (64)를 풀기 위하여  $a_{00}=1$  즉  $b_{00}=1$ 로 할 필요가 있고, 레글레리티 조건식도 하나 줄이는 것이 된다. 즉, 식 (63) 및 식 (64)로부터

$$p_{mn}^{k_1 k_2} = (-1)^{k_1+k_2} (m+n-\frac{1}{2})^{2k_1+1} (m-n)^{2k_2} \quad (65)$$

로 두고

$$P = \begin{bmatrix} P_{10}^{00} & P_{11}^{00} & P_{20}^{00} & \dots & P_{NN}^{00} \\ P_{10}^{10} & P_{11}^{10} & P_{20}^{10} & \dots & P_{NN}^{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{10}^{K_1^0} & P_{11}^{K_1^0} & P_{20}^{K_1^0} & \dots & P_{NN}^{K_1^0} \\ P_{10}^{01} & P_{11}^{01} & P_{20}^{01} & \dots & P_{NN}^{01} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{10}^{K_1 K_2} & P_{11}^{K_1 K_2} & P_{20}^{K_1 K_2} & \dots & P_{NN}^{K_1 K_2} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$c = [b_{10}, b_{11}, \dots, b_{NN}]^t \quad (67)$$

$$d = [2^{-1}, -2^{-3}, \dots, (-1)^{K_1} 2^{-(2K_1+1)}, 0, \dots, 0]^t \quad (68)$$

라 두면

$$Pc = d \quad (69)$$

로 되는 행렬식이 된다. 즉

$$c = P^{-1}d \quad (70)$$

를 풀면 계수를 결정할 수 있다.

이 방법으로 계수의 도출은 되지만, 이상특성으로부터 멀어지게 된다. 그러므로 1차원의 경우와 같이, 레글레리티 조건을 더욱 완화하고,  $M$ 이 기수이므로 식의 수를

$$\frac{\{(M-2)+3\}\{(M-2)+1\}}{8} = \frac{(M+1)(M-1)}{8}$$

으로 줄이면  $b_{00} = 1$ 으로 두고 이전의 경우보다,  $\frac{M+1}{2} = N+1$ 만 조건식이 부족하다. 그러므로  $N$ 개의 임의의 점  $(\omega_{1i}, \omega_{2i})$ 에 영점을 두고, 이하의 조건식을 추가한다.

$$\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m b_{mn} \cos\left(m+n-\frac{1}{2}\right) \omega_{1i} \cos(m-n) \omega_{2i} = 0 \quad (71)$$

이것으로부터 계수를 구할 수가 있다. 또한, 식 (53) 및 식 (54)에 따라,  $(\omega_{1i}, \omega_{2i})$ 에 영점을 두면

$$(-\omega_{1i}, \omega_{2i}), (-\omega_{1i}, -\omega_{2i}), (\omega_{1i}, -\omega_{2i})$$

에도 영점이 배점된다. 이와 같이, 레귤러리티 조건을 줄이고 영점의 수를 늘려도, 같은 형태로 계수가 구하여져, 레귤러리티와 영점 설정의 임의성을 갖는 2차원 LPF가 구성된다.

4.3 2차원의 스케일링 함수와 웨이브렛 함수

본 절에서는 1차원의 경우와 같이, 기본 스케일링 함수  $\phi(x)$ 와 기본 웨이브렛 함수  $\psi(x)$ 를, 전 절에서 이끌어낸 최대 평탄형 필터를 이용하여 구한다. 본 방법에서의 도출 과정을 (그림 3)에 보인다.

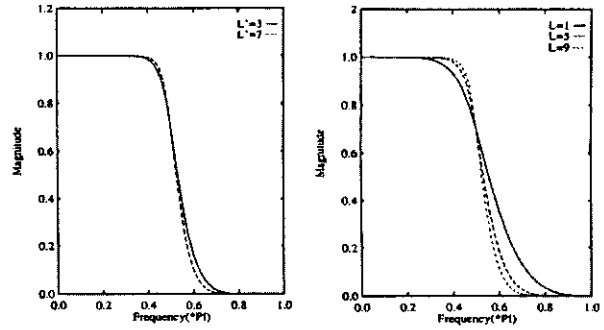
스케일링함수는 식 (24)로부터, 1차원의 경우와 같이  $H(z^D)$ 를 무한회 종속접속한 것의 임펄스 응답이다. 이 조작은 (그림 3)과 같이,  $D$ 로 보간하여  $H(z)$ 를 통과하는 것에 해당하고, 이것을 무한하게 반복한다. 2차원의 경우도 1차원과 같이, 수회의 반복으로 연속 웨이브렛 함수가 얻어진다. 최종적으로,  $D$ 로 보간한 후,  $G(z)$ 를 통하여 웨이브렛 함수를 구한다.

5. 설계 예

본 장에서는, 전 장까지 논한 방법으로 구체적으로 설계한, 1차원 및 2차원의 LPF와 스케일링 함수 또는 웨이브렛 함수를 몇 개의 예를 들어 보인다.

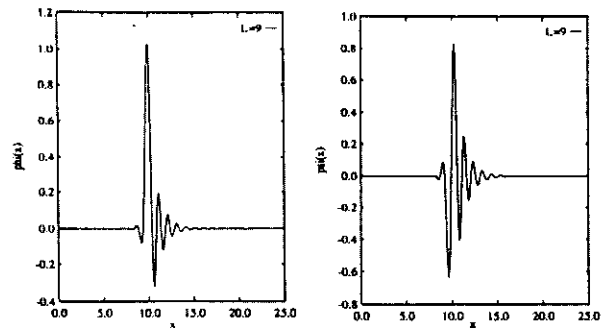
5.1 1차원

직교조건을 만족하는 본 구성에 있어서, 레귤러리티 조건식만을 이용하여 계수를 도출하고, 설계한 최대 평탄형 저역통과필터를 (그림 4) (a)에 보인다. 여기서는  $L=1, 5, 9$ 인 경우, 즉  $N=1, 3, 5$ 인 경우를 보인다. 이 그림으로부터,  $L$ 를 늘리면 저역통과필터로서의 특성이 좋아지는 것을 확인할 수 있다. 또, 레귤러리티 조건식을 하나 완화하여,  $\omega = \frac{4\pi}{5}$ 에 영점을 두는 것으로 설계한 최대 평탄형 저역통과필터를 (그림 4) (b)에 보인다. 여기서는  $L=3, 7$ 인 경우, 즉  $N=3, 5$ 인 경우를 보인다. 이 그림으로부터, 영점을 설정하는 것에 의하여도 거의 같은 특성의 저역통과필터를 설계할 수 있는 것을 알 수 있다.



(그림 4) (1차원) 최대평탄형 (IIR) LPF

더욱이, 이 필터를 이용하여 3.3에 보인 방법으로 도출한 기본 스케일링 함수  $\phi(x)$ 를 (그림 5(a))에, 기본 웨이브렛 함수  $\psi(x)$ 를 (그림 5(b))에 보인다. 여기서, 식 (29)를 확인하면,  $l$ 이 우수인 경우도 성립하기 때문에, 레귤러리티 조건은  $L+1(L'+1)$ 까지 유효하다. 따라서,  $B < 2^{L+1}$ 으로 되면  $\phi$ 가 다중 해상도 공간을 생성한다. 이 때,  $L=1$ 의 경우는  $B=1.0 < 2^2$ ,  $L=5$ 의 경우는  $B=1.0180 < 2^6$ ,  $L=9$ 의 경우는  $B=1.0 < 2^{10}$ 으로 된다. 따라서, 이 조건은 반드시 만족하고, (그림 5)에는 특히  $L=9$ 의 경우를 보인다. 또한, 이 함수는 Daubechies의 비재귀형 필터에 의하여 구성된 함수[1-3]와 같은 형상으로 된다. 이 함수는, 재귀형 필터에 의하여 구성하였기 때문에, 저차수에서 레귤러리티가 높은 웨이브렛 함수가 얻어진다.



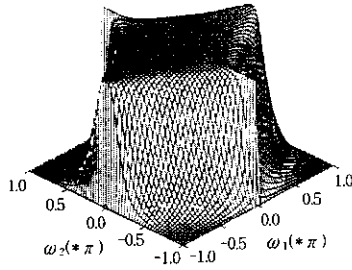
(그림 5) (1차원) 스케일링 함수와 웨이브렛 함수

5.2 2차원

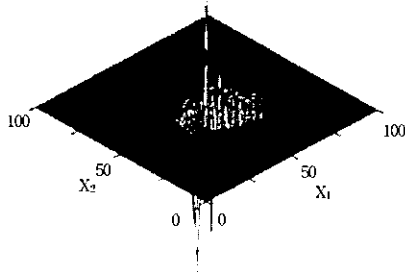
2차원의 경우도 1차원의 경우와 같이, 직교조건을 만족하는 본 구성에 있어서, 레귤러리티 조건식과  $N$ 개분  $(\omega_1, \omega_2) = (\pi, \pi)$ 에 영점을 두는 조건식으로부터, 설계한 최대 평탄형 저역통과필터를 (그림 6)에 보인다. 여기에서는  $M=5$ 인 경우, 즉  $N=3$ 인 경우를 보인다.

더욱이 이 필터를 이용하여, 4.3에 보인 방법으로 도출한 기본 웨이브렛 함수  $\phi(x)$ 를 (그림 7)에 보인다. 여기서 2차원의 기본 스케일링 함수  $\phi(x)$ 가 다중 해상도 공간을 생성

하는 조건을 생각한다. 도출한  $\phi(x)$ 는, 이 필터에 의하여 수 회의 반복으로 지수 함수적으로 감소하고, 일정치에 수축하는 것을 확인할 수 있었다. 따라서,  $\phi(x)$ 가 다중 해상도 공간을 생성하는 것으로 볼 수 있다[7]. 이것의 수학적 증명은 곤란하며, 이 후 해명되기를 기대한다. 이 방법에 의하여, 본 논문에서 이용한 Quincunx의 샘플링 행렬에 의한 2차원 비가분형·재귀형 직교 웨이브렛 함수가 도출 가능하다.



(그림 6) 2차원 최대평탄형 (IIR) LPF



(그림 7) 2차원 웨이브렛 함수

## 6. 결 론

본 논문에서는, 1차원 및 2차원 재귀형 직교 웨이브렛 함수의 도출법을 제한하였다. 전역 통과 회로와 지연기의 병렬구조로 구성되는 IIR 디지털 필터를 이용하는 것으로부터, 구조적으로 직교조건을 만족하고, 동시에 간단한 방정식을 푸는 것만으로 레플라리티가 높은 웨이브렛 함수가 용이하게 도출된다. 특히 임의의 저차를 갖는 스케일2의 2차원 웨이브렛 함수가 도출되는 점은, 본 방법의 큰 특징이다. 얻어진 직교 웨이브렛 함수를 사용하여, 각종 신호처리에 적용하는 것이 이후의 과제이다.

## 참 고 문 헌

[1] I. Daubechies, "Orthonormal Basis of Compactly Supported Wavelets," *Comm. Pure Applied Math.*, No.41, pp.909-996, 1988.  
 [2] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time Frequency Localization and Signal Analysis," *IEEE Trans. Inf. Theory*, No.36, pp.961-1005, 1990.  
 [3] I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets," CBMS-NSF

Series, Appl. Math., SIAM, 1991.

[4] O. Rioul and M. Vetterli, "Wavelets and Signal Processing," *IEEE SP Magazine*, pp.14-38, 1991.  
 [5] M. Vetterli and C. Herly, "Wavelets and Filter Banks : Theory and Design," *IEEE Trans. Signal Processing*, No. 40, pp.2207-2232, 1992.  
 [6] M. Vetterli, "Wavelets and Filter Bank for Discrete-time Signal Processing," *Wavelets and their applications*, Ed. M. B. Ruskai et. al., pp.17-52, Jones and Bartlett Pub., 1992.  
 [7] J. Kovacevic and M. Vetterli, "Non-separable Multidimensional Perfect Reconstruction Filter Banks and Wavelets Bases for R," *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-38, No.2, pp.533-555, 1992.  
 [8] C. Herly and M. Vetterli, "Wavelets and Recursive Filter Banks," *IEEE Trans. Signal Processing*, No.41, pp.2536-2556, 1993.  
 [9] G. Evangelista, "Wavelet Transforms and Wave Digital Filters," Y. Meyer : *Wavelet and its application*, Springer-Verlag, 1992.  
 [10] L. R. Rajagopal and S. C. Dutta Roy, "Design of Maximally-Flat FIR Filters Using the Bernstein Polynomial," *IEEE Trans. Circuits and System*, No.34, pp.1587-1590, 1987.  
 [11] H. Toyoshima, M. Ikehara and S. Takahashi, "A New Class of 2-D Digital Filters Composed of Allpass Suctbtfilters," *ECCTD*, pp.420-424, 1989.  
 [12] 池原雅章, 井上啓, 豊島久道, 高橋進一, "アナログフィルタ理論に基づくIIRデジタル直交ミラーフィルタの設計法," *日本電子情報通信學會論文誌 (A)*, J73-A, No.4, pp.801-808, 1990.  
 [13] 池原雅章, 田中廣幸, 黒田英夫, "全域通過回路を用いたIIRデジタルフィルタの設計," *日本電子情報通信學會論文誌 (A)*, J75-A, No.4, pp.710-717, 1992.  
 [14] 池原雅章, 磯部廣幸, 田中廣幸, 黒田英夫, "全域通過回路を用いた直線位相2次元ハーフバンド IIRフィルタの設計," *日本電子情報通信學會論文誌 (A)*, J75-A, No.7, pp.1164-1170, 1992.  
 [15] 山口昌哉, 守本光, "ウェーブレットとその應用[II], 計測と制御, No.31, pp.879-886, 1992.  
 [16] S. R. Powell and P.M. Chau, "A Technique for Realizing Linear Phase IIR Filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, No.39, pp.2425-2435, 1991.  
 [17] C. K. Chui, "ウェーブレット入門, 東京電氣大學出版局, 1993.

## 도 재 수

e-mail : dojesu@mail.dongguk.ac.kr

1991년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1994년 일본 홋카이도(Hokkaido)대학 대학원 전자공학과(공학석사)

1997년 일본 홋카이도대학 대학원 전자공학과(공학박사)



1997년~1999년 동국대학교 전자계산학과 전임강사

1999년~현재 동국대학교 컴퓨터학과 조교수

관심분야 : 영상신호처리, 영상압축, 웨이브렛변환 등