

## Noise-free Distributions Comparison of Bayesian Wavelet Threshold for Image Denoise

Ilsu Choi<sup>1)</sup>, Sung-Suk Rhee<sup>2)</sup> and Yunkee Ahn<sup>3)</sup>

### Abstract

Wavelet thresholding is a method for the reduction of noise in image. Wavelet coefficients of image are correlated in local characterization. These correlations also appear in the original pixel representation of the image, and they do not follow from the characterizations of the wavelet transform. In this paper, we compare noise-free distributions of Bayes approach to improve the classical threshold algorithm.

*Keywords* : noise-free distribution, Bayes, image denoise, wavelet transform, Markov random field.

### 1. 서 론

일반적으로 이미지의 잡음을 제거하기 위한 방법으로 웨이블릿 임계치 알고리즘(wavelet threshold algorithm)을 많이 사용한다. 이는 원래의 화상을 적은 수의 계수를 이용하여 표현할 수 있다는 것과 잡음이 모든 계수에 골고루 산재해 있을 것이라는 가정에서 출발한 것이다. 또한 웨이블릿 변환(wavelet transformation)이 직교변환이므로 계수들 간에 상관관계가 없다는 가정을 갖고 있으나 Xu(1994) 등에서 통계적으로 독립이 아님을 알 수 있다.

본 논문에서는 마아코브 랜덤 피일드(Markov random field)의 국소적 성질을 이용한 베이저안 방법의 사전분포에 따른 화상의 차이를 살펴보았다. Jansen & Bultheel(1999)는 잡음이 없는 웨이블릿 계수(wavelet coefficients)의 분포로 일양분포를 사용하였으나 이는 계수들의 분포로는 적합하지 않은 것이었고, Ahn, Choi & Rhee(2001)은 잡음이 없는 웨이블릿 계수의 분포로 라플라스 분포(Laplace distribution)를 사용하였으나 이는 조건부 분포가 수리적으로 구해지지 않고 수치해석적으로 구해야 하는 어려움으로 많은 시간을 소요하게 된다. 본 논문에서는 잡음이 없는 웨이블릿 계수의 분포로 일양분포, 라플라스 분포, 정규분포를 사용하여 추정값의 차이를 살펴보고

- 
- 1) Assistant professor, Department of Applied Mathematics, Yosu National University, Yosu, Korea.  
E-mail : ischoi@yosu.ac.kr
  - 2) Associate professor, Department of Business Administration, Seowon University, Chongju, Korea.  
E-mail : ssrhee@dragon.seowon.ac.kr
  - 3) Professor, Department of Applied Statistics, Yonsei University, Seoul, Korea.  
E-mail : ahnyk503@yonsei.ac.kr

자 한다. 2절에서는 일반적인 베이저안 임계치(Bayesian threshold) 방법, 3절에서는 잡음이 없는 웨이브렛 계수의 분포에 대한 각각의 알고리즘과 결과 분석에 대해서 논의하고자 한다.

## 2. 베이저안 임계치 방법

임계치 알고리즘(threshold algorithm)의 착상은 본질적 이미지 형태로 나타내는 큰 계수를 취하는 것이다. 이미지의 화소들에 가우지안 잡음(Gaussian noise)이 추가되었다면 직교변환의 성질에 따라 변환된 잡음 역시 웨이브렛 영역에서 가우지안이다. 그러므로 잡음이 추가된 이미지의 웨이브렛 계수는 다음과 같이 나타낸다.

$$W = V + N$$

여기서  $N$ 은 잡음 벡터이고,  $V$ 는 순수한 이미지의 웨이브렛 계수 벡터이고,  $W$ 는 입력 웨이브렛 계수 벡터이다.

Donoho & Johnstone(1995)에 의해 제안된 엄격한 임계치(hard threshold)에서  $W_i$ 는  $W_{\lambda i}$ 로 다음과 같은 식에 의해 변형된다.

$$W_{\lambda i} = W_i X_i$$

여기서  $\lambda$ 는 임계치(threshold)이고  $X_i$ 는 마스크 변수(mask variable)로 다음과 같다.

$$X_i = I\{|W_i| > \lambda\}$$

사전분포가  $P(\mathbf{X} = \mathbf{x})$ 이고 조건부 분포  $f_{w|\mathbf{x}}(\mathbf{w}|\mathbf{x})$ 이면 사후분포는 다음과 같다.

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{W} = \mathbf{w}) = \frac{P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) f_{w|\mathbf{x}}(\mathbf{w}|\mathbf{x})}{f_{\mathbf{w}}(\mathbf{w})}$$

### 2.1 조건부 분포 모형

조건부 분포  $f_{w|\mathbf{x}}(\mathbf{w}|\mathbf{x}) = \prod f(w_i|x_i)$ 는 잡음이 없는 웨이브렛 계수가 어떤 분포를 갖느냐에 따라서 여러 가지 형태를 취한다. 본 논문에서는 Jansen & Bultheel(1999)이 제시한 일양분포, Ahn, Choi & Rhee(2001)의 라플레이스 분포와 라플레이스 분포의 대안으로 정규분포를 살펴보았다. 먼저 잡음이 없는 웨이브렛 계수가  $[-\mu, -\sigma] \cup [\sigma, \mu]$ 에서 일양분포에 따르고 잡음  $N_i$ 가  $N(0, \sigma^2)$ 에 따른다면  $P_{(V_i|X_i)}(v_i)$ 와  $f_{(w_i|X_i)}(w_i)$ 는 다음과 같다.

$$P_{(V_i|X_i)}(v_i) = \frac{1}{2(\mu - \sigma)},$$

$$f_{w_i|X_i}(w_i) = \frac{1}{2(\mu - \sigma)} [\Phi(w + \mu) - \Phi(w + \sigma) + \Phi(w - \sigma) - \Phi(w - \mu)]$$

여기서  $\mu$ 는 계수의 최대값이고  $\Phi(z)$ 는 누적정규분포를 나타낸다.

잡음이 없는 웨이브렛 계수가 모수가  $(s, p)$ 인 라플레이스 분포에 따르고 잡음  $N_i$ 가  $N(0, \sigma^2)$

에 따른다면  $P_{(v_i|x_i)}(u1)$ 과  $f_{(w_i|x_i)}(w1)$ 는 다음과 같다.

$$P_{v_i|x_i}(u1) = \frac{e^{-|u|/s^p}}{Z(s, p)},$$

$$f_{w_i|x_i}(w1) = \int_{-\infty}^w Z e^{-s^{-p}(w-n)^p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn + \int_w^{\infty} Z e^{s^{-p}(w-n)^p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn$$

여기서 모수  $\{s, p\}$ 는 최우추정치로 추정하고  $Z(s, p) = 2^{s/p} \Gamma(\frac{1}{p})$ 이다.

$f_{(w_i|x_i)}(w1)$ 는 수리적으로 구해지지 않고 수치해석적으로 계산해야 하는데 많은 시간을 소요하게 된다.

잡음이 없는 웨이블릿 계수가  $N(0, \sigma_1^2)$ 인 정규분포에 따르고 잡음  $N_i$ 가  $N(0, \sigma^2)$ 에 따른다면  $P_{(v_i|x_i)}(u1)$ 과  $f_{(w_i|x_i)}(w1)$ 는 다음과 같다.

$$P_{(v_i|x_i)}(u1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-\frac{v_i^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$f_{(w_i|x_i)}(w1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}}} e^{-\frac{w_i^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma^2)}}$$

### 2.2 메트로폴리스 표본추출기(Metropolis sampler)

$P(X_i=1 | W)$ 의 계산은 모든 실현 가능한  $x$ 에 대해 마야코브 랜덤 피일드(Markov random field)의 특징을 고려하여 메트로폴리스 표본추출기(Metropolis 등(1953))를 사용하여 구한다.  $x$ 의 결합 밀도함수가  $P(x) = P(x_1, \dots, x_N)$ 라고 할 때 초기값  $x^{(0)}$ 에 대해 매 반복에서 다음과 같은 완전 조건부 밀도함수에서 다음 단계의  $x$ 를 선택하게 된다.

$$P(x_i^* | x_i^{(t-1)}) = \frac{e^{\beta \sum_{j \in \partial i} x_j x_i}}{e^{\beta \sum_{j \in \partial i} x_j} + \sum_{j \in \partial i} 1}$$

여기서  $\partial i$ 는 점  $i$ 의 주변에 있는 점들의 집합을 나타낸다.

선택된  $x$ 에 대해 두 개의 표본에 대해 다음의 확률비를 구한다.

$$r^{(t)} = \frac{P(X^{(t)} | W)}{P(X^{(t-1)} | W)}$$

이 방법의 장점은 조건부 밀도 함수  $P(X=x | W) = \frac{1}{Zf_w(w)} \exp[-U(x)] f_{w|x}(w|x)$ 의 값을 구하는 데 있어 분자와 분모가 상쇄되기 때문에 많은 양의 계산을 생략할 수 있다는 데 있다.

이 때 새로운  $x$ 가 선택될 확률은  $\min[r^{(t)}, 1]$  이고 선택이 되는 경우 새로운 단계로 계속되게 된다.

### 3. 베이저안 임계치 알고리즘과 결과분석

#### 3.1 베이저안 임계치 알고리즘

베이저안 임계치 알고리즘은 다음과 같다.

1. 웨이브렛 계수  $W$ 를 구한다.
2. 웨이브렛 각 수준의 각 요소(수직, 수평, 대각선)에 대해 엄격한 임계치(hard threshold)를 적용하고 이 때 마스크 변수(mask variable)  $X_i^{(0)}$ 를 결정한다.
3. 모수를 추정한다. 잡음이 없는 웨이브렛 계수가 일양분포일 때는  $\{\mu, \sigma\}$ , 라플레이스 분포일 때는  $\{s, p, \sigma\}$ , 정규분포일 때는  $\{\sigma_1, \sigma\}$ 를 추정한다.
4. 마야코브 랜덤 피일드(Markov random field)모형으로 메트로폴리스 표본추출기(Metropolis sampler)로  $P(X_i | W)$ 를 구한다.
5.  $\hat{W}_i = W_i P(X_i | W)$
6. 웨이브렛 역변환으로 결과를 도출한다.

#### 3.2 결과분석 및 결론

알고리즘을 적용한 결과분석을 위하여 Matlab 소프트웨어에 포함되어 있는  $256 \times 256$ 의 크기인 "woman" 이미지와  $128 \times 128$ 의 크기인 "sinsin" 이미지를 사용하였다. 그림 1과 그림 2는  $\sigma = 60$  일 때 "woman" 이미지와 "sinsin" 이미지에 대하여 원래의 이미지와 모형에 적합시킨 이미지를 나타내고 있다. 표 1은  $[0,255]$ 의 256 그레이 수준(gray level)으로 구한 추정치의  $MSE(= \sum (\hat{Y}_i - Y_i)^2 / n)$ 를 20회 반복하여 얻은 평균과 표준편차를 나타낸다.

		잡음 (noise)	엄격한 임계치 (hard threshold)	균등분포 (uniform)	정규분포 (normal)	라플레이스 분포 (Laplace)
"woman" $\sigma = 60$	평균	3606.2	1403.4	1232.2	1167.6	1136.1
	표준편차	22.3642	15.7404	13.6174	12.1192	11.6422
"woman" $\sigma = 40$	평균	1602.8	803.4	708.6	664.5	643.5
	표준편차	9.9397	7.3933	5.5928	5.3179	5.1027
"sinsin" $\sigma = 60$	평균	3601.9	1074.8	903.3	838.9	807.6
	표준편차	43.5602	30.3978	25.5497	23.6182	22.7355
"sinsin" $\sigma = 40$	평균	1600.8	477.8	387.1	345.2	325.3
	표준편차	19.3601	13.4496	10.8950	9.6984	9.0920

표 1. 추정치들(4개)에 대한 잡음제거 결과의 비교( 각 셀내의 모든 수치는 MSE임)

라플레이스 분포와 정규분포를 사용했을 때 MSE가 다른 경우보다 작고 둘 간에는 미미한 차이  
 지만 라플레이스 분포의 경우가 작은 것을 알 수 있다. 그러나 라플레이스 분포를 사용하는 경우  
 는 수치해석적인 적분을 포함하고 있어 정규분포의 경우보다 시간이 10-20배 정도 오래 걸리는  
 단점을 갖고 있으므로 효율면에서는 정규분포가 효과적임을 알 수 있다.

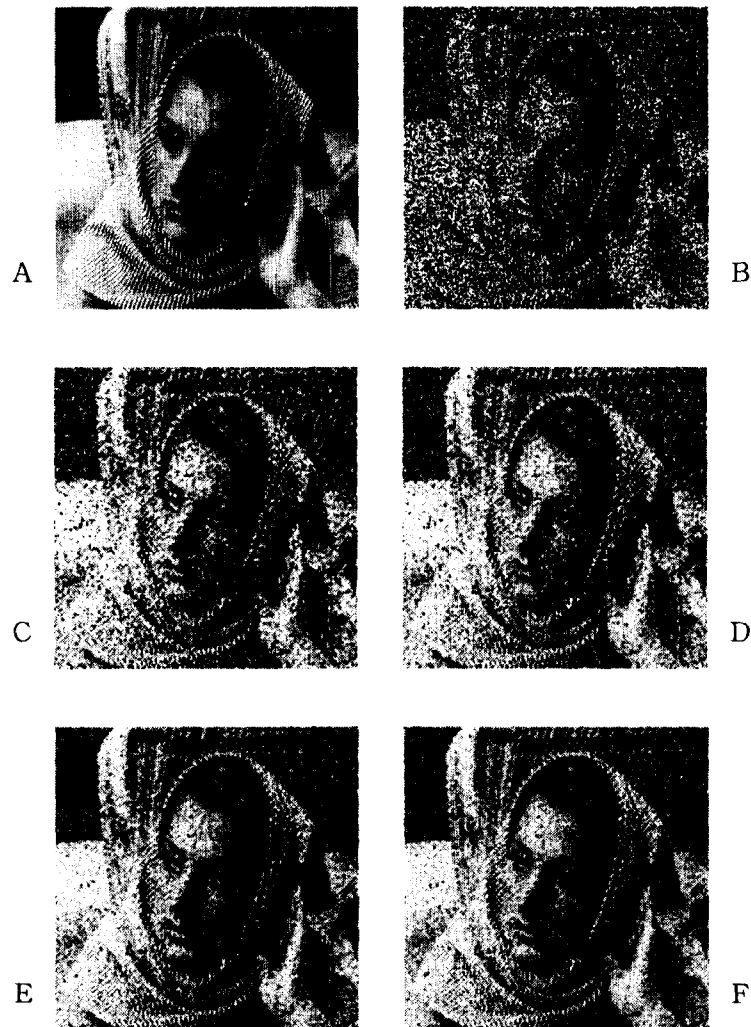


그림 1. "woman" 이미지의 잡음제거결과  
 A: 원래의 "woman" 이미지 B: 잡음이 있는 이미지( $\sigma=60$ )  
 C: 엄격한 임계치 모형 D: 균등분포모형  
 E: 정규분포모형 F: 라플레이스 분포 모형

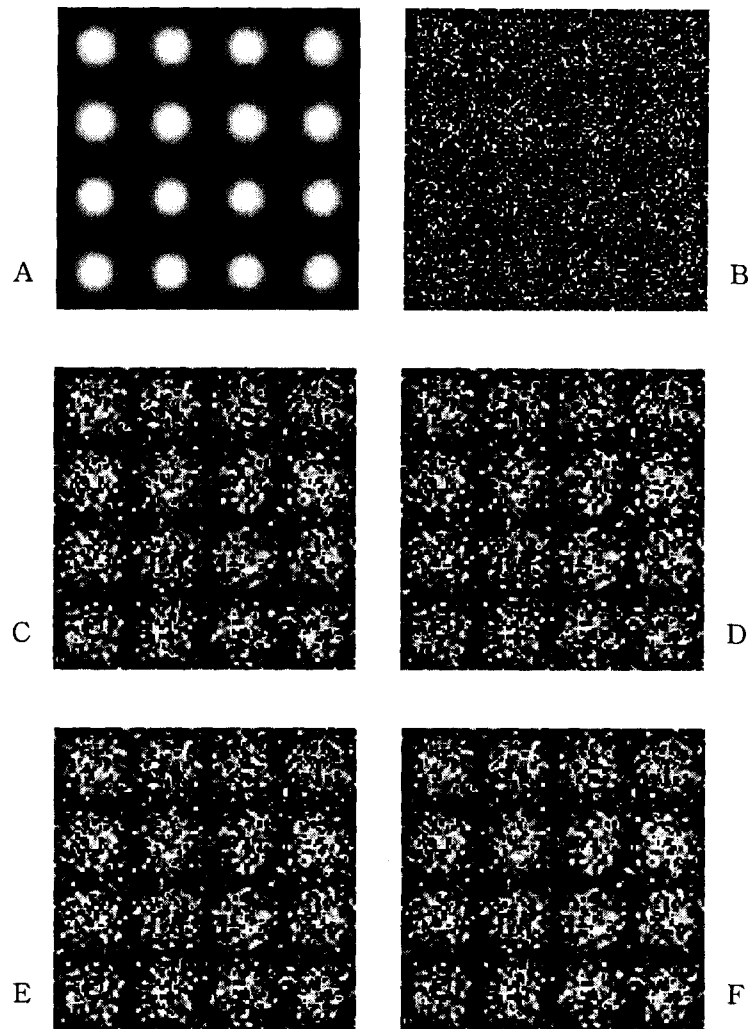


그림 2. "sinsin" 이미지의 잡음제거결과

- A: 원래의 "sinsin" 이미지    B: 잡음이 있는 이미지( $\sigma=60$ ).  
C: 엄격한 경계치 모형    D: 균등분포 모형  
E: 정규분포 모형    F: 라플레이스분포 모형

### References

- [1] Ahn, Y., Choi, I. and Rhee, S.(2001). A Bayesian Wavelet Threshold Approach for Image Denoising. The Korean Communications in Statistics, Vol. 8, No. 1, 109-115.  
[2] Donoho, D. and Johnstone (1995). Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage,

*Journal of the American Statistical Association*, Vol. 90, 1200-1224.

- [4] Metropolis, N. et al.(1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, Vol. 21, 1087-1092.
- [5] Jansen, M. and Bultheel, A. (1999). Empirical Bayes approach to improve wavelet thresholding for image noise reduction. Tech. report, Katholieke Universiteit Leuven
- [6] Xu, Y. et al.(1994). Wavelet transform domain filters: a spatially selective noise filtration technique. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 3, No. 6, 747-758