The Korean Communications
in Statistics Vol. 8, No. 2, 2001
pp. 473-481

The Limit Distribution of a Modified W-Test Statistic for Exponentiality

Namhyun Kim[1]

Abstract

Shapiro and Wilk (1972) developed a test for exponentiality with origin and scale unknown. The procedure consists of comparing the generalized least squares estimate of scale with the estimate of scale given by the sample variance. However the test statistic is inconsistent. Kim(2001) proposed a modified Shapiro-Wilk's test statistic based on the ratio of two asymptotically efficient estimates of scale. In this paper, we study the asymptotic behavior of the statistic using the approximation of the quantile process by a sequence of Brownian bridges and represent the limit null distribution as an integral of a Brownian bridge.

Keywords : exponentiality, goodness of fit tests, quantile process, Brownian Bridge.

1. 서론

지수분포의 분포함수

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right),\ x > \alpha,\ \beta > 0,\ -\infty < \alpha < \infty \tag{1.1}$$

을 $\exp(\alpha,\beta)$로 쓰기로 하자. 또한 $\alpha=0$, $\beta=1$인 표준 지수분포 $F(x;0,1)$은 $F_0(x)$로 나타내고 $f_0(x)$를 F_0에 해당하는 확률밀도함수, F_0^{-1}은 F_0의 역함수라고 하자.

$X_1,\ldots,X_n$이 연속확률분포함수 $G(x)$에서의 확률표본이고 이 표본의 순서통계량을 $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$이라고 하자. $X_1,\ldots,X_n$이 지수분포의 모형에 적합한지를 검정하는 것은

$$H_0:\ G(x) = \exp(\alpha,\beta) \tag{1.2}$$

을 검정하는 것이다. 대립가설 H_A는

$$H_A:\ G(x) \neq \exp(\alpha,\beta)$$

이라고 하자. (1.2)의 귀무가설 H_0를 검정하기 위해 제안된 통계량은 무수히 많다. 이 경우 대부분 α는 기지 또는 0으로, β는 미지로 가정하고 있다. 예를 들면 Gail과 Gastwirth(1978a,

1) Assistant Professor, Department of Science, Hongik University, Seoul, 121-791, Korea.
E-mail : nhkim@wow.hongik.ac.kr

1978b), Jackson(1967), Stephens(1978) 등이 있다. 또한 D'Agostino와 Stephens(1986, 4, 5, 10장)에서 이에 대한 전반적인 설명과 참고문헌을 제시하고 있다.

지수분포의 검정에서 모수 α와 β가 모두 미지일 경우의 검정법은 많이 고려되고 있지 않다. 한 가지 이유는 지수분포의 통계적인 성질(2절의 **Fact 1**)을 이용하여 α가 미지인 경우의 검정법 대신 $\alpha=0$ 인 검정법을 이용할 수 있기 때문이다. 그러나 이러한 방법으로 모수 α를 제거하는 것이 가설 (1.2)를 검정하는데 있어서 α를 추정하는 것보다 더 좋은 검정법을 제공할 수 있는지는 확실하지 않다. 두 가지 방법을 비교하기 위해서 Spinelli와 Stephens(1987)은 실제적인 여러 가지 대립가설 하에서 모의실험(simulation)을 실시하였다.

지수분포의 검정에서 α와 β가 모두 미지인 경우 소개된 대표적인 통계량은 Shapiro와 Wilk (1972)의 W_E-통계량이다. 만일 가설 (1.2)의 H_0가 사실이라면, 모형

$$E(X_{(j)})=\alpha+\beta\widetilde{v_{jn}}$$

가 성립할 것이다. 여기서 E는 기대값을 의미하고 $\widetilde{v_{jn}}=E(Z_{(j)})$, $Z_{(1)},\ldots,Z_{(n)}$은 $\exp(0,1)$에서의 순서통계량이다. 모형 (1.1)에서 α와 β의 일반화 최소자승 추정량(generalized least squares estimate) $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$은

$$\hat{\alpha}=X_{(1)},\qquad \hat{\beta}=\frac{n(\overline{X}-X_{(1)})}{n-1} \tag{1.3}$$

이다. 여기서 $\overline{X}$는 표본평균을 의미한다. Shapiro와 Wilk(1972)의 W_E-통계량은 식(1.3)의 $\hat{\beta}$과 표본분산 $s^2=S^2/(n-1)=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2/(n-1)$을 비교하는 것으로 β의 두 추정량의 비에 기초한 통계량이다. W_E-통계량의 형태는

$$W_E=\frac{n(\overline{X}-X_{(1)})^2}{(n-1)S^2}$$

이며 이는 양쪽 검정통계량이다. Spinelli와 Stephens(1987)에서 보인 바와 같이 W_E-통계량은 대부분의 대립가설에서 좋은 검정력을 갖는다. 그러나 W_E-통계량의 가장 심각한 단점은 이 검정법이 일치성(consistency)을 갖지 않는다는데 있다.

Kim(2001)에서는 W_E-통계량의 이러한 단점을 보완하기 위해서 분모의 추정량을 β^2의 점근유효추정량으로 대치한 N_E-통계량을 제안하였다. N_E-통계량은 de Wet과 Venter(1973)의 통계량을 β뿐만 아니라 α도 미지인 경우의 지수분포에 적용한 것이라고 생각할 수 있다. 즉 β^2의 점근유효추정량(Kim(2001)의 정리 4)

$$L_n=\frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}(X_{(j)}-X_{(1)})^2/v_{jn}\ ,\qquad v_{jn}=F_0^{-1}\left(\frac{j}{n+1}\right)=-\log\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$$

을 고려하여 수정된 W_E-통계량으로 N_E-통계량,

$$N_E=\frac{n(\overline{X}-X_{(1)})^2}{(n-1)^2L_n}=\frac{n(\overline{X}-X_{(1)})^2}{(n-1)\sum_{j=2}^{n}(X_{(j)}-X_{(1)})^2/v_{jn}} \tag{1.4}$$

을 제안하고 여러 가지 대립가설에서의 검정력을 모의실험(simulation)을 통하여 비교하였다. 그 결과 제안된 N_E-통계량이 고려된 대립가설의 분포 중에서 변동계수가 1보다 크거나 같은 분포, 즉 감소 고장률(decreasing failure rate : DFR) 분포나 고장률이 일정한 분포에서 W_E-통계량보다 더 좋은 검정력을 가짐을 볼 수 있었다. 특히 변동계수가 1인 지수분포 이외의 분포, 예를 들면 $a<1$, $b=a(a+1)/(1-a)$인 베타분포 $B(a,b)$에서 W_E는 표본의 크기가 클수록 검정력이 점점 감소하고 N_E는 이 경우 검정력이 매우 우수함을 볼 수 있었다. Kim(2001)에서는 $a=1/2$, $1/4$, $1/8$인 경우의 베타분포를 고려하였다.

본 논문에서는 N_E-통계량의 귀무가설에서의 극한분포를 Brownian bridge의 적분의 형태로 표현하고자 한다. 이를 위하여 quantile process의 Brownian bridge $B(t)$로의 근사가 유용하게 이용될 것이다.

2. N_E-통계량의 극한분포

정리 1. $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$이 $\exp(\alpha,\beta)$에서의 순서통계량일 때 식(1.4)의 N_E는 극한분포

$$n\left(\frac{1}{nN_E}-1-a_n\right)\xrightarrow{d}\int_0^1\frac{B^2(t)-t(1-t)}{v(t)(1-t)^2}\,dt-\left(\int_0^1\frac{B(t)}{1-t}\,dt\right)^2 \tag{2.1}$$

을 갖는다. 여기서

$$a_n=\frac{1}{n}\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}\frac{t(1-t)}{v(t)(1-t)^2}\,dt,$$

$v(t)=F_0^{-1}(t)=-\log(1-t)$이고, $\xrightarrow{d}$는 분포수렴(convergence in distribution)을 의미한다.

Fact 1. $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$이 $\exp(\alpha,\beta)$로 부터의 크기 n인 순서통계량이면, $Y_{(i)}=X_{(i+1)}-X_{(1)}$, $i=1,\ldots,n-1$은 $\exp(0,\beta)$로 부터의 크기 $n-1$인 순서통계량이다.

보조정리 1. 식(1.4)의 N_E는 위치, 척도 불변(origin and scale invariant)인 통계량이다.

증명. $X_{(i)}=\alpha+\beta Z_{(i)}$, $i=1,\ldots,n$을 대입해 보면 자명하다.

□

정리 1을 증명하기 위해서 del Barrio, Cuesta, Matrán과 Rodríguez(1999)의 증명과 유사한 방법을 적용한다.

보조정리 1로부터 H_0: $G(x)=\exp(0,1)$으로 가정해도 무방하다. 그리고 **Fact 1**으로부터 N_E-통계량의 극한분포를 살펴보기 위해서 $1/nN_E$에 대해

$$R_n:=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Z_{(j)}^2/v_{jn}\right)/\ \overline{Z}^2-1$$

을 고려하면 충분하다. 여기서 $Z_1,\ldots,Z_n$은 $\exp(0,1)$에서의 확률표본이고 $Z_{(1)},\ldots,Z_{(n)}$은 표

본의 순서통계량이다. 그리고 $\overline{Z}$는 표본평균이다. 또한 H_0하에서 $\overline{Z}\to 1\ a.s.$이므로 R_n의 극한 분포는 $R_n^* := \overline{Z}^2 R_n$을 통하여 살펴볼 수 있다. G_n을

$$G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_i \le x)$$

즉,

$$G_n(x) = \begin{cases} 0, & Z_{(1)} > x \\ k/n, & Z_{(k)} \le x < Z_{(k+1)}, \quad k=1,\ldots,n-1 \\ 1, & Z_{(n)} \le x \end{cases}$$

으로 정의된 경험적 분포함수(empirical distribution function)라고 하자. 여기서 I는 표시함수(indicator function)를 의미한다. 또한 G_n^{-1}를

$$G_n^{-1}(t) = \begin{cases} Z_{(k)}, & \dfrac{k-1}{n+1} < t \le \dfrac{k}{n+1}, \quad k=1,\ldots,n \\ Z_{(n)}, & \dfrac{n}{n+1} < t \le 1 \end{cases}$$

으로 정의된 sample quantile function이라고 하자. 그리고 $\rho_n(t)$를

$$\begin{aligned} \rho_n(t) &:= \sqrt{n} f_0(F_0^{-1}(t))(G_n^{-1}(t) - v(t)) \\ &= \sqrt{n}(1-t)(G_n^{-1}(t) - v(t)) \end{aligned}$$

으로 정의된 quantile process라고 하자.

R_n^*는

$$\begin{aligned} R_n^* &:= \overline{Z}^2 R_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_{(j)}^2 / v_{jn} - \overline{Z}^2 \\ &= \int_{1/(n+1)}^{1} \frac{(G_n^{-1}(t))^2}{v(t)}\,dt - \left(\int_{1/(n+1)}^{1} G_n^{-1}(t)\,dt\right)^2 \\ &= \int_{1/(n+1)}^{1} \frac{(G_n^{-1}(t) - v(t))^2}{v(t)}\,dt - \left(\int_{1/(n+1)}^{1} (G_n^{-1}(t) - v(t))\,dt\right)^2 \\ &\quad + \left(\int_{1/(n+1)}^{1} (2G_n^{-1}(t) - v(t))\,dt\right)\left(1 - \int_{1/(n+1)}^{1} v(t)\,dt\right) \\ &:= R_n^{(1)} - R_n^{(2)} + \text{Remainder} \end{aligned}$$

와 같이 나눌 수 있다.

$$nR_n^{(1)} = \int_{1/(n+1)}^{1} \frac{\rho_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}\,dt,$$

$$nR_n^{(2)} = \left(\int_{1/(n+1)}^{1} \frac{\rho_n(t)}{1-t}\,dt\right)^2$$

이고 $\int_0^1 G_n^{-1}(t)\,dt = \overline{Z}$, $\int_0^{1/(n+1)} v(t)\,dt = O(1/n^2)$임을 이용하여 Remainder항은 $O_p(1/n^2)$임을

쉽게 보일 수 있다. 따라서

$$nR_n^* = \int_{1/(n+1)}^{1} \frac{\rho_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}\, dt - \left(\int_{1/(n+1)}^{1} \frac{\rho_n(t)}{1-t}\, dt \right)^2 + O_p\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.2}$$

이다. 여기서 $a_n = O(b_n)$은 $|a_n/b_n|$이 충분히 큰 n에 대해서 유계(bounded)라는 의미로 적절한 K와 자연수 $n(K)$가 존재하여 모든 $n \geq n(K)$에 대해서 $|a_n/b_n| \leq K$이 성립한다는 말이다. $X_n = O_p(b_n)$은 모든 $\eta > 0$에 대해서, 상수 $K(\eta)$와 자연수 $n(\eta)$가 존재하여 $n \geq n(\eta)$이면 $P(|X_n/b_n| \leq K(\eta)) \geq 1-\eta$가 성립한다는 의미이다. O, O_p의 자세한 정의는 Bishop, Fienberg와 Holland(1975, 14장)에 잘 설명되어있다.

이제 ρ_n에 대한 다음의 정리를 이용하자.

정리 2. (Csörgő 와 Horváth(1993)의 정리 6.2.1) 적절한 확률공간에서

$$n^{(1/2)-\nu} \sup_{1/(n+1) \leq t \leq n/(n+1)} \frac{|\rho_n(t) - B_n(t)|}{(t(1-t))^{\nu}} = \begin{cases} O_p(\log n), & \nu = 0 \\ O_p(1), & 0 < \nu \leq 1/2 \end{cases}$$

을 만족하는 Brownian bridge의 열 $\{B_n(t), 0 \leq t \leq 1\}_n$가 존재한다.

정리 2에서 $B_n(t), 0 \leq t \leq 1$는 각각의 n에 대해서 고려된 확률공간에서 정의된 Brownian bridge 이며 $B_n(t) \stackrel{d}{=} B(t)$, $n = 1, 2, \ldots,$이다. $\stackrel{d}{=}$는 두 분포가 서로 같음을 의미한다.

보조정리 2. $Z_{(1)}, \ldots, Z_{(n)}$이 $\exp(0,1)$에서의 순서통계량일 때,

$$n\left(\int_{1-1/n}^{1} (Z_{(n)} - v(t))\, dt \right)^2 \xrightarrow{p} 0$$

$$n \int_{1-1/n}^{1} \frac{(Z_{(n)} - v(t))^2}{v(t)}\, dt \xrightarrow{p} 0$$

이 성립한다.

증명.

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_{(n)} < \log n + z) = \exp(-e^{-z})$$

임이 알려져 있다. 즉, $Z_{(n)} - \log n = O_p(1)$ 이다(Galambos(1987) 참조). 따라서

$$\begin{aligned} \int_{1-1/n}^{1} (Z_{(n)} - v(t))\, dt &= (Z_{(n)} - \log n)/n + (\log n)/n - \int_{1-1/n}^{1} v(t) dt \\ &= O_p(1/n) - (1/n) = O_p(1/n) \end{aligned}$$

이고

$$n\left(\int_{1-1/n}^{1} (Z_{(n)} - v(t))\, dt \right)^2 = O_p(1/n) \xrightarrow{p} 0$$

이다. 또한

$$n\int_{1-1/n}^{1}(Z_{(n)}-v(t))^2/v(t)dt \approx n\int_{1-1/n}^{1}(Z_{(n)}-\log n)^2/v(t)dt$$
$$= nO_p(1)\int_{1-1/n}^{1}1/v(t)dt$$
$$= O_p(1/\log n)\to 0,\quad n\to\infty \text{ 일 때},$$

으로 정리는 성립한다.

□

보조정리 3. 적절한 확률공간에서

$$nR_n^* - \left[\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{B_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}dt - \left(\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}\frac{B_n(t)}{1-t}dt\right)^2\right] \xrightarrow{p} 0$$

을 만족하는 Brownian bridge의 열 $\{B_n(t), 0\le t\le 1\}_n$ 가 존재한다.

증명. 식(2.2)와 **보조정리 2**로부터

$$nR_n^* - \left[\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{\rho_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}dt - \left(\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}\frac{\rho_n(t)}{1-t}dt\right)^2\right] \xrightarrow{p} 0$$

이므로

$$L_n^{(1)} := \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{\rho_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}dt - \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{B_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}dt \xrightarrow{p} 0$$
$$L_n^{(2)} := \left(\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}\frac{\rho_n(t)}{1-t}dt\right)^2 - \left(\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}\frac{B_n(t)}{1-t}dt\right)^2 \xrightarrow{p} 0$$

임을 보이면 충분하다.

우선 $L_n^{(1)}$을 고려하자. **정리 2**에 의해서 모든 $\nu\in(0,1/2)$에 대해서 다음을 만족하는 Brownian bridge의 열이 존재한다 :

$$\left|\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{\rho_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}dt - \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{B_n^2(t)}{v(t)(1-t)^2}dt\right|$$
$$\le \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{(\rho_n(t)-B_n(t))^2}{v(t)(1-t)^2}dt + 2\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{|\rho_n(t)-B_n(t)||B_n(t)|}{v(t)(1-t)^2}dt$$
$$\le O_p(1)\,n^{2\nu-1}\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{(t(1-t))^{2\nu}}{v(t)(1-t)^2}dt + O_p(1)\,n^{\nu-1/2}\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{(t(1-t))^{\nu}|B_n(t)|}{v(t)(1-t)^2}dt$$
$$:= A_n^{(1)} + A_n^{(2)}.$$

한편, 부분적분법과 $v(t)\ge t$임을 이용하면

$$n^{2\nu-1}\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{(t(1-t))^{2\nu}}{v(t)(1-t)^2}dt,\quad 0<\nu<1/2,$$
$$= n^{2\nu-1}\left(\int_{1/(n+1)}^{1/2} \frac{t^{2\nu}(1-t)^{2\nu-2}}{v(t)}dt + \int_{1/2}^{n/(n+1)} \frac{t^{2\nu}(1-t)^{2\nu-2}}{v(t)}dt\right)$$
$$\le n^{2\nu-1}\left(C_1\int_{1/(n+1)}^{1/2} t^{2\nu-1}dt + C_2\int_{1/2}^{n/(n+1)} \frac{(1-t)^{2\nu-2}}{v(t)}dt\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= n^{2\nu-1}\left(C_1 \frac{t^{2\nu}}{2\nu} \Big|_{1/(n+1)}^{1/2} - C_2 \frac{(1-t)^{2\nu-1}}{2\nu-1} \frac{1}{v(t)} \Big|_{1/2}^{n/(n+1)} - C_2 \int_{1/2}^{n/(n+1)} \frac{(1-t)^{2\nu-2}}{2\nu-1} \frac{1}{v^2(t)}\, dt \right) \\
&= n^{2\nu-1}(O(1) + O(1/(n^{2\nu-1}\log n)) \\
&= O(1/\log n) \to 0, \quad n \to \infty \text{ 일 때},
\end{aligned}
$$

이므로

$$A_n^{(1)} \xrightarrow{p} 0$$

이다. 마찬가지로

$$
\begin{aligned}
&E\left(n^{\nu-1/2} \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{(t(1-t))^{\nu} |B_n(t)|}{v(t)(1-t)^2}\, dt \right) \\
&= n^{\nu-1/2} \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{(t(1-t))^{\nu+1/2}}{v(t)(1-t)^2}\, dt \\
&= n^{\nu-1/2}(O(1) + O(1/(n^{\nu-1/2}\log n)) \\
&= O(1/\log n) \to 0, \quad n \to \infty \text{ 일 때},
\end{aligned}
$$

이다. 따라서

$$E(A_n^{(2)}) \to 0, \quad n \to \infty \text{ 일 때},$$

이고,

$$L_n^{(1)} \xrightarrow{p} 0$$

이 성립한다.

다음으로 $L_n^{(2)}$를 고려하자.

$$L_n^{(2)} = \left(\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{\rho_n(t) - B_n(t)}{1-t}\, dt \right)\left(\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{\rho_n(t) + B_n(t)}{1-t}\, dt \right)$$

으로 쓸 수 있고, **정리** 2($\nu = 0$ 일 때)를 적용하면,

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{|\rho_n(t) - B_n(t)|}{1-t}\, dt \\
&\le O_p((\log n)/\sqrt{n}) \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= O_p((\log n)/\sqrt{n}) O(\log n) \\
&= O_p((\log n)^2/\sqrt{n}) \xrightarrow{p} 0
\end{aligned}
$$

이 성립한다. 또한

$$\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{B_n(t)}{1-t}\, dt$$

의 분포는 정규분포 $N(0, \sigma_1^2(1/(n+1)))$ 을 따른다는 것이 잘 알려져 있다. 여기서

$$\sigma_1^2(x) = \int_x^{1-x} \int_x^{1-x} \frac{\min(u, v) - uv}{(1-u)(1-v)}\, du\, dv$$

이다. $\lim_{x\to 0}\sigma_1^2(x)=1$ 임을 쉽게 보일 수 있으므로,

$$\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{B_n(t)}{1-t}\,dt = O_p(1)$$

이고, 따라서

$$\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{\rho_n(t)}{1-t}\,dt = O_p(1)$$

이다. 그러므로

$$|L_n^{(2)}| \le O_p((\log n)^2/\sqrt{n})O_p(1) \xrightarrow{p} 0, \quad n\to\infty \text{ 일 때},$$

이고, 정리는 성립한다.

□

정리 1의 증명. 이 절의 앞부분에서의 설명에 의해서 $n(R_n - a_n)$에 대해서 주어진 정리가 성립함을 보이면 충분하다. 식(2.1)의 우변의 적분

$$\int_0^1 \frac{B^2(t) - t(1-t)}{(1-t)^2 v(t)}\,dt \tag{2.3}$$

이 존재한다면, **보조정리 3**에 의해서 $n(R_n^* - a_n)$은 식(2.1)의 우변의 극한분포를 갖게되고, 따라서 $n(R_n^* - a_n) = O_p(1)$ 이다. 그리고

$$n(R_n - a_n) - n(R_n^* - a_n) = nR_n^*(1-\overline{Z}^2)/\overline{Z}^2 = O_p(1)\sqrt{n}(R_n^* - a_n + a_n) \xrightarrow{p} 0$$

이므로 정리는 성립한다. 이제 식(2.3)의 적분의 존재성에 대해서 고려해보자. 우선

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{B^2(t) - t(1-t)}{(1-t)^2 v(t)}\,dt$$

는 존재하지 않는다는 사실은 Csörgő, Horváth와 Shao(1993, Lemma 2.2)를 적용하여 보일 수 있다. 따라서 식(2.3)의 극한의 의미를 L_2-수렴에서 고려해 보자.

$$A_n := \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{B^2(t) - t(1-t)}{(1-t)^2 v(t)}\,dt$$

라고 하면

$$\begin{aligned}
EA_n^2 &= \int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)} \frac{2(\min(s,t)-st)^2}{(1-s)^2 v(s)(1-t)^2 v(t)}\,dt\,ds \\
&= 4\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}\int_{s}^{n/(n+1)} \frac{s^2}{(1-s)^2 v(s) v(t)}\,dt\,ds \\
&\le 4\int_{1/(n+1)}^{1/2} \frac{s^2}{(1-s)v^2(s)}\,ds + 4\int_{1/2}^{n/(n+1)} \frac{s^2}{(1-s)v^2(s)}\,ds \\
&\le 4\int_{1/(n+1)}^{1/2} \frac{1}{1-s}\,ds + 4\int_{1/2}^{n/(n+1)} \frac{1}{(1-s)v^2(s)}\,ds \\
&\to 4(\log 2 + 1/\log 2) < \infty
\end{aligned}$$

이고, 이로부터 $n, m \to \infty$ 일 때 $E(A_n - A_m)^2 \to 0$ 임을 쉽게 보일 수 있다. 따라서 식(2.3)은 A_n 의 L_2-극한으로 정의할 수 있고, 정리는 성립한다.

□

참고문헌

[1] Bishop, Y. M. M., Fienberg, S. E. and Holland, P. W. (1975). *Discrete Multivariate Analysis : Theory and Practice*. The MIT Press, England.

[2] Csörgő, M. and Horváth, L. (1993). *Weighted Approximations in Probability and Statistics*. Wiley, New York.

[3] Csörgő, M., Horváth, L. and Shao, Q.-M. (1993). "Convergence of integrals of uniform empirical and quantile processes," *Stochastic Processes and Their Applications*, 45, 283-294.

[4] D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A. (1986). *Goodness-of-fit Techniques,* Marcel Dekker, New York.

[5] de Wet, T. and Venter, J. H. (1973). "A goodness of fit test for a scale parameter family of distributions," *South African Statistical Journal*, 7, 35-46.

[6] del Barrio, E., Cuesta, J. A., Matrán, C. and Rodríguez, J. M. (1999). "Tests of Goodness of fit based on the L_2-Wasserstein distance," *The Annals of Statistics*, 27, 1230-1239.

[7] Gail, M. H. and Gastwirth, J. L. (1978a). "A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Lorenz curve," *Journal of the American Statistical Association*, 73, 787-793.

[8] Gail, M. H. and Gastwirth, J. L. (1978b). "A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini Statistic," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 40, 350-357.

[9] Galambos, J. (1987). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, 2nd ed. Krieger, Melbourne, FA.

[10] Jackson, O. A. Y. (1967). "An analysis of departures from the exponential distribution," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 29, 540-549.

[11] Kim, N. (2001). "A modification of the W test for exponentiality," *The Korean Communications in Statistics*, 8, 159-171.

[12] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1972). "An analysis of variance test for the exponential distribution (complete samples)," *Technometrics*, 14, 355-370.

[13] Spinelli, J. J. and Stephens, M. A. (1987). "Tests for exponentiality when origin and scale parameters are unknown," *Technometrics*, 29, 471-476.

[14] Stephens, M. A. (1978). "On the W test for exponentiality with origin known," *Technometrics*, 20, 33-35.