The Korean Communications
in Statistics Vol. 8, No. 1, 2001
pp. 65-71

Optimal Block Designs for Complete Diallel Cross[1)]

Kuey Chung Choi[2)] and Young Nam Son[3)]

Abstract

In this paper, optimal block designs for complete diallel crosses are proposed. These optimal block designs are constructed by using triangular partially balanced incomplete designs derived from symmetric balanced incomplete block designs. Also, it is shown that block designs for complete diallel crosses derived from complementary designs of triangular designs are optimal block designs.

Keywords : General combining ability, Partially balanced incomplete block design, Balanced incomplete block design, Complementary design

1. 서 론

이면교배(diallel cross)계획은 식물(동물)의 육종실험에서 근교계통(inbred line)의 유전적 특성을 연구하는데 이용되는 짝짓기 계획(mating design)이다. 서로 다른 유전적인 특징을 갖는 p종의 근교계통에서 i번째 근교계통과 j번째 근교계통의 교배를 (i, j)로 나타내고 n_c를 실험에 이용되는 서로 다른 교배의 수라 하자. 우리의 관심은 p개의 근교계통의 일반조합능력(general combining ability: *gca*)을 비교하기 위한 최적 이면교배계획을 구성하는데 있다. Griffing(1956)은 n_c에 따라 4가지 형태의 완전이면교배(Complete Diallel Cross: CDC)계획을 정의하였는데 본 연구에서는 $n_c = p(p-1)/2$인 CDC계획을 고려한다.

CDC에서 최적 블록계획을 구성하는 방법에 대한 연구로 Gupta와 Kageyama (1994)는 Preece(1967)의 지분된 균형 불완비 블록계획을 이용해서 블록 CDC 계획을 구성하는 방법을 제시하였는데 그들은 하위 블록의 크기가 2인 지분된 균형 불 완비 블록계획을 이용하여 구한 블록

1) This paper was supported by grant No. K970087002 from the Basic Research Program of the Korea Science & Engineering Foundation.

2) Professor, Department of Computer Science and Statistics, Chosun University, Kwangju 501-759, Korea.
E-mail : kjchoi@mail.chosun.ac.kr.

3) Researcher, The Research Institute of Statistics, Chosun University, Kwangju 501-759, Korea.

CDC 계획이 총체적으로 최적 계획임을 보였다. Dey와 Mihda(1996)는 삼각형 부분 균형 불 완비 블록(Partially Balanced Incomplete Block : PBIB) 계획을 이용하여 블록 CDC계획을 구성하는 방법을 제시하였다. 또한 그들은 삼각형 PBIB 계획으로부터 구성되는 블록 CDC 계획은 분산균형 계획일 뿐만 아니라 $\lambda_1=0$인 경우에서는 블록 CDC 계획은 총체적으로 최적 계획임을 입증하였다. Das, Dey 그리고 Dean(1998)은 Dey 등(1996)의 방법을 확장시켜서 $\lambda_1 \neq 0$인 경우에서도 블록 CDC계획이 총체적으로 최적계획이 되기 위한 조건을 제시하였다.

본 연구에서는 특정한 모수를 갖는 대칭 균형 불 완비블록(Balanced Incomplete Block : BIB) 계획으로부터 삼각형 PBIB 계획을 쉽게 구성할 수 있다는 사실을 이용하여 삼각형 PBIB 계획을 직접 구성하지 않고서 최적 CDC 블록계획을 구성하는 방법을 제시한다. 또한 대칭 BIB 계획으로부터 유도되는 삼각형 PBIB 계획의 여(complementary)계획을 이용하여 최적 블록 CDC 계획을 설계하는 방법을 제시한다.

2. 블록 CDC 계획의 구성

실험에 이용되는 n개의 교배를 블록의 크기가 k인 b개의 블록에 배치하는 이면교배실험에 대한 모형(Singh과 Hinkelmann, 1995)은 아래와 같이 정의된다.

$$Y=\mu 1_n+\Delta_1 g+\Delta_2 \beta+\varepsilon \tag{2.1}$$

여기서 Y는 $n\times 1$ 관찰 값 벡터이고 μ는 전체평균, 1_n은 모든 요소가 1인 $n\times 1$ 벡터를 나타낸다. 또한, $g=(g_1,g_2,\ldots,g_p)'$와 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_b)'$는 각각 p개의 gca 효과벡터와 b개의 블록효과벡터를 나타내며 Δ_1,Δ_2는 각각 크기 $n\times p$와 $n\times b$인 gca과 블록에 대응하는 계획행렬이고 ε는 평균이 0, 분산이 σ^2인 $n\times 1$ 오차 항 벡터이다.

모형 (2.1)에서 gca벡터 g를 추정하기 위한 정보행렬 C는 다음과 같이 정의된다.

$$C=(c_{ij})=G-\frac{1}{k}\Gamma\Gamma' \tag{2.2}$$

여기서 r_i를 i번째 근교계통의 반복 수, r_{ij}, $i<j=1,2,\ldots,p$를 교배 (i,j)의 반복 수라 할 때 $G=(g_{ij})$는 대칭행렬로서 $g_{ii}=r_i, g_{ij}=r_{ij}$, $i<j=1,2,\ldots,p$ 이고 $\Gamma=\Delta_1'\Delta_2$는 $p\times b$ 근교계통 - 블록 빈도행렬을 나타낸다.

CDC에서 블록화 계획이 완전 확률화 블록(Complete Randomized Block : CRB)계획일 때 (2.2)의 정보행렬은 아래의 (2.3)과 같이 표현될 수 있고

$$C=r(p-2)(I_p-p^{-1}J_p) \tag{2.3}$$

모수가 $v=p(p-1)/2, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$인 삼각형 PBIB 계획을 이용하여 블록 CDC를 구성하는 경우

에 (2.2)의 정보행렬은 아래와 같이 표현된다(Dey 등, 1996).

$$C=\theta(I_p-p^{-1}J_p) \tag{2.4}$$

여기서 $\theta=k^{-1}p(p-2)\{\lambda_1+(p-3)\lambda_2/2\}$ 이다.

따라서 모수가 $v=p(p-1)/2, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$인 삼각형 PBIB 계획을 CDC 계획의 블록화 계획으로 이용할 때 우리는 블록 CDC 계획의 효율인자 e를 (2.3)과 (2.4)를 이용하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$e=\frac{\overline{Var}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)_{CRB}}{\overline{Var}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)_{PBIB}}=\theta/\{r(p-2)\} \tag{2.5}$$

삼각형 PBIB 계획을 설계하여 블록 CDC 계획을 구성하였던 Dey 등(1996)의 방법과는 다르게 특정한 모수를 갖는 대칭 BIB 계획으로부터 삼각형 PBIB 계획을 직접 구하여 최적 블록 CDC 계획을 구성하는 방법은 아래의 정리 2.1(Dey, 1986)을 이용한다.

정리 2.1. 다음과 같은 모수를 갖는 대칭 BIB 계획 D^*가 존재한다고 하자.

$$v^*=p(p-1)/2+1=b^*,\ r^*=p=k^*,\ \lambda^*=2 \tag{2.6}$$

그러면 계획 D^*에서 어떤 하나의 특정한 처리를 선택한 다음, 이 처리를 포함하지 않는 블록만으로 구성된 계획 D는 아래와 같은 모수를 갖는 삼각형 PBIB 계획이 된다.

$$v=p(p-1)/2,\ b=(p-1)(p-2)/2,\ r=p-2,\ k=p,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2 \tag{2.7}$$

위의 정리 2.1을 이용하면 CDC의 블록화 계획으로 D를 구성할 필요 없이 D^*로부터 D를 바로 구하여 블록 CDC 계획을 구성할 수 있다.

Das 등(1998)은 Dey 등(1996)의 방법을 확장시켜서 아래의 조건을 만족하는 삼각형 PBIB 계획을 CDC의 블록화 계획으로 이용하면 총체적으로 최적인 블록 CDC 계획을 얻을 수 있음을 보였다.

$$p(p-1)(p-2)\lambda_1=bx\{4k-p(x+1)\} \tag{2.8}$$

여기서 $x=[2k/p]$는 $2k/p$를 넘지 않는 가장 큰 정수를 나타낸다.

Das 등(1998)의 결과에 따라 정리 2.1을 이용하여 구한 계획 D는 $x=2$ 이며 (2.8)을 만족하므로 D를 이용한 블록 CDC계획은 총체적 최적계획이며 (2.5)의 블록 CDC계획의 효율성 인자는 항상 1이 된다. 정리 2.1을 이용하여 총체적 최적 블록 CDC 계획을 구성하는 과정을 예를 들어 설명하면 다음과 같다.

예제 2.1. $p=6$인 경우, 모수가 $v^*=16=b^*$, $r^*=6=k^*$, $\lambda^*=2$인 D^*를 구성하면 아래와 같은 블록을 갖는 계획이 된다.

$\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{2,5,7,8,9,10\}$, $\{1,5,7,11,12,13\}$, $\{1,2,7,14,15,\mathbf{16}\}$,
$\{4,6,7,8,11,14\}$, $\{1,3,9,10,11,14\}$, $\{2,3,8,12,13,14\}$, $\{3,5,8,11,15,\mathbf{16}\}$,
$\{3,6,7,9,12,15\}$, $\{1,4,8,10,12,15\}$, $\{2,4,9,11,13,15\}$, $\{4,5,9,12,14,\mathbf{16}\}$,
$\{3,4,7,10,13,\mathbf{16}\}$, $\{1,6,8,9,13,\mathbf{16}\}$, $\{2,6,10,11,12,\mathbf{16}\}$, $\{5,6,10,13,14,15\}$.

D^*의 블록 중에서 어떤 하나의 처리를 16이라 하면 이를 포함하지 않는 블록만으로 이루어진 계획 D는 모수가 $v=15, b=10, r=4, k=6, \lambda_1=1$, $\lambda_2=2$이면서 아래와 같은 블록을 갖는 삼각형 PBIB 계획이 된다.

$\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{2,5,7,8,9,10\}$, $\{1,5,7,11,12,13\}$, $\{4,6,7,8,11,14\}$, $\{1,3,9,10,11,14\}$,
$\{2,3,8,12,13,14\}$, $\{3,6,7,9,12,15\}$, $\{1,4,8,10,12,15\}$, $\{2,4,9,11,13,15\}$, $\{5,6,10,13,14,15\}$

위에서 구한 D의 블록에서 15개 처리번호 각각에 15개의 서로 다른 교배를 대응시켜면 효율인자가 1이면서 아래와 같은 블록을 갖는 최적 블록 CDC 계획이 구성된다.

$\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3)\}$, $\{(1,3),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,6)\}$,
$\{(1,2),(1,6),(2,4),(3,5),(3,6),(4,5)\}$, $\{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,6)\}$,
$\{(1,2),(1,4),(2,6),(3,4),(3,5),(4,6)\}$, $\{(1,3),(1,4),(2,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$,
$\{(1,4),(2,3),(2,4),(2,6),(3,6),(5,6)\}$, $\{(1,2),(1,5),(2,5),(3,4),(3,6),(5,6)\}$,
$\{(1,3),(1,5),(2,6),(3,5),(4,5),(5,6)\}$, $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,5),(4,6),(5,6)\}$.

정리 2.2. (2.7)의 모수를 갖는 삼각형 PBIB 계획 D의 여(complementary)계획을 $\overline{D}$라 하면 이것은 아래와 같은 모수를 갖는 삼각형 PBIB 계획이고 이를 이용한 블록 CDC 계획은 총체적으로 최적인 계획이다.

$$\begin{aligned}&\overline{v}=p(p-1)/2,\ \overline{b}=(p-1)(p-2)/2,\ \overline{r}=(p-2)(p-3)/2,\ \overline{k}=p(p-3)/2,\\ &\overline{\lambda}_1=(p-2)(p-5)/2+1,\ \overline{\lambda}_2=(p-2)(p-5)/2+2.\end{aligned} \tag{2.9}$$

증명. (i)먼저 D로부터 $\overline{D}$의 모수들을 구하면 다음과 같다. $\overline{D}$는 D의 여 계획이므로 $\overline{v}=v=p(p-1)/2$, $\overline{b}=b=(p-1)(p-2)/2$ 이며 D의 블록크기가 $k=p$이므로 $\overline{D}$의 블록크기는 $\overline{k}=v-k=p(p-3)/2$이다.

D에서 임의의 처리를 δ라 할 때, 이것은 D에서 r개의 블록에 나타나고 $b-r$개의 블록에는 나타나지 않으므로 $\overline{D}$의 반복수 $\overline{r}=b-r=(p-2)(p-3)/2$이 된다.
첫 번째 동반관계에 있는 임의의 두 처리를 α,β라 하면 D에서 α가 나타나고 β는 나타나지 않거나 또는 α는 나타나지 않고 β만 나타나는 블록이 각각 $r-\lambda_1$개이므로 D에서 α,β 모두 나타나지 않는 블록의 수는 $b-2(r-\lambda_1)-\lambda_1$이다. 그러므로 α,β가 $\overline{D}$에서 동시에 나타나는 블록의 수 $\overline{\lambda}_1=b-2r+\lambda_1=(p-2)(p-5)/2+1$이 된다. 마찬가지로 두 번째 동반관계에 있는 임의의 두 처리가 모두 D에 나타나지 않는 블록의 수는 $b-2r+\lambda_2$ 이므로 $\overline{D}$에서는 이 두 처리가 $\overline{\lambda}_2=b-2r+\lambda_2=(p-2)(p-5)/2+2$개의 블록에 나타난다. $\overline{D}$에서 임의의 처리와 i번째 $(i=1,2)$ 동반관계에 있는 처리의 수 $\overline{n}_i$는 $\sum_{i=1}^{2}\overline{n}_i=\overline{v}-1$와 $\sum_{i=1}^{2}\overline{n}_i\ \overline{\lambda}_i=\overline{r}(\overline{k}-1)$의 관계에 의해서 $\overline{n}_1=2(p-2)$ 이고 $\overline{n}_2=(p-2)(p-3)/2$가 된다.
PBIB 계획은 p^i_{jk}에 의해서 결정되므로 $\overline{k}>\overline{r}$인 $\overline{D}$에서 이를 구하기 위해서 아래의 (2.10)의 $p^i_{jk},(i,j,k=1,2)$ 성질과 (2.11)(Dey, 1986, p.196)을 이용한다.

$$p^i_{kj}=p^i_{jk},\quad \overline{n}_i p^i_{jk}=\overline{n}_j p^j_{ik},\quad \sum_{k=1}^{2}p^i_{jk}=\overline{n}_j-\delta_{ij}, \tag{2.10}$$

여기서 δ_{ij}는 $i=j$이면 1이고 $i\neq j$ 이면 0 이다.

$$(\overline{r}-\overline{\lambda}_1)(\overline{r}-\overline{\lambda}_2)+(\overline{\lambda}_1-\overline{\lambda}_2)\{p^2_{12}(\overline{r}-\overline{\lambda}_1)-p^1_{12}(\overline{r}-\overline{\lambda}_2)\}=0. \tag{2.11}$$

(2.10)의 두 번째와 세 번째 식으로부터 $\overline{n}_1 p^1_{12}+\overline{n}_2 p^2_{12}=\overline{n}_1\ \overline{n}_2$이다. 이 식과 (2.11)을 이용하여 p^2_{12}를 구하면 $p^2_{12}=2(p-4)$가 된다. p^2_{12}를 (2.10)에 대입하여 나머지 p^i_{jk}를 구하면

$$P_1=\begin{bmatrix} p-2 & p-3 \\ p-3 & (p-3)(p-4)/2 \end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix} 4 & 2(p-4) \\ 2(p-4) & (p-4)(p-5)/2 \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 D의 여 계획 $\overline{D}$는 (2.9)의 모수를 갖는 삼각형 PBIB 계획이 된다.

(ii) $\overline{D}$에서 $x=[2\overline{k}/p]=p-3$이고 $p(p-1)(p-2)\overline{\lambda}_1=\overline{b}x\{4\overline{k}-p(x+1)\}$의 관계를 만족하므로 $\overline{D}$로부터 구성되는 블록 CDC계획은 총체적 최적계획이 된다.

예제 2.2. 예제 2.1에서 D의 여 계획 $\overline{D}$를 이용하여 최적 블록 CDC 계획을 구성하면 다음과 같다. 먼저 D로부터 모수가 $\overline{v}=15$, $\overline{b}=10$, $\overline{r}=6$, $\overline{k}=9$, $\overline{\lambda}_1=3$, $\overline{\lambda}_2=4$인 $\overline{D}$의 블록은 아래와 같다.

$\{7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$, $\{1,3,4,6,11,12,13,14,15\}$, $\{2,3,4,6,8,9,10,14,15\}$,

{1,2,3,5,9,10,12,13,15}, {2,4,5,6,7,8,12,13,15}, {1,4,5,6,7,9,10,11,15},
{1,2,4,5,8,10,11,13,14}, {2,3,5,6,7,9,11,13,14}, {1,3,5,6,7,8,10,12,14},
{1,2,3,4,7,8,9,11,12}

위의 블록의 처리번호에 15개의 서로 다른 교배를 대응시키면 아래와 같은 블록을 갖는 최적 블록 CDC계획이 구성된다.

{(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)},
{(1,2),(1,4),(1,5),(2,3),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)},
{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,5),(2,6),(3,4),(4,6),(5,6)},
{(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,6),(3,4),(3,6),(4,5),(5,6)},
{(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(3,6),(4,5),(4,6)},
{(1,2),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6),(3,4),(3,5),(5,6)},
{(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(3,4),(3,5),(4,5),(4,6)},
{(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6),(3,5),(4,5),(4,6)},
{(1,2),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,6),(4,6)},
{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)}

[표 2.1]은 (2.6)의 모수를 갖는 대칭 BIB 계획과 이로부터 유도되는 D와 $\overline{D}$를 이용하여 구성할 수 있는 최적 블록 CDC 계획을 제시한 것이다. 이 표에 제시된 *Series* 29 ~ *Series* 89*a*는 Raghavarao(1971)의 대칭 BIB 계획을 나타내고 *Design* *T*44, *T*62, *T*83, *T*85는 Clatworthy(1973)의 삼각형 PBIB 계획을 나타낸다.

[표 2.1] D와 $\overline{D}$를 이용한 블록 CDC 계획과 효율인자

BIB 계획						D를 이용한 블록 CDC								$\overline{D}$를 이용한 블록 CDC							
Series	v^*	b^*	r^*	k^*	λ^*	*Design*	p	v	b	r	k	λ_1	λ_2	*Design*	p	$\overline{v}$	$\overline{b}$	$\overline{r}$	$\overline{k}$	$\overline{\lambda_1}$	$\overline{\lambda_2}$
29	11	11	5	5	2	*T*44	5	10	6	3	5	1	2	*T*44	5	10	6	3	5	1	2
47	16	16	6	6	2	*T*62	6	15	10	4	6	1	2	*T*83	6	15	10	6	9	3	4
81	37	37	9	9	2	*T*85	9	36	28	7	9	1	2		9	36	28	21	27	15	16
86*a*	56	56	11	11	2		11	55	45	9	11	1	2		11	55	45	36	44	28	29
89*a*	79	79	13	13	2		13	78	66	11	13	1	2		13	78	66	55	65	45	46

3. 결론

본 논문에서는 특정한 모수를 갖는 대칭 균형 불 완비블록 계획으로부터 삼각형 부분 균형 불

완비블록 계획을 직접 구성할 수 있다는 정리를 이용하여 삼각형 PBIB 계획을 설계하지 않고 바로 최적 블록 완전이면교배 계획을 구성하는 방법을 제시했다. 또한 특정모수를 갖는 BIB 계획으로부터 유도된 삼각형 PBIB 계획의 여 계획을 블록계획으로 이용했을 때에도 최적 블록 CDC 계획을 구성할 수 있음을 보였다. 제시된 방법들은 완전이면교배계획에서 특정한 모수를 갖는 대칭균형 불완비 블록계획을 구성할 수 있으면 이로부터 블록 완전이면교배계획의 효율인자가 항상 1이 되는 총체적 최적 계획을 쉽게 구성할 수 있다는 장점을 가지고 있다.

References

[1] Clatworthy, W.H.(1973). *Tables of Two -Associate-Class Partially Balanced Designs,* NBS Applied Mathematics Series 63, Washington, D.C.

[2] Das, A. Dey, A. and Dean, A.M. (1998). optimal designs for diallel cross experiments. *Statistics & Probability Letters* 36, 427-436.

[3] Dey, A.(1986). *Theory of Block Designs,* Johne Wiley & Sons.

[4] Dey, A. and Midha, C.K. (1996). Optimal block designs for diallel crosses. *Biometrika* 83, 484-489.

[5] Griffing, B.(1956). Concepts of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences* 9, 463-493.

[6] Gupta, S. and Kageyama, S. (1994). Optimal complete diallel crosses. *Biometrika* 81, 420-424.

[7] Preece, D.A.(1967). Nested balanced incomplete block designs. *Biometrika* 54, 479-86.

[8] Singh, M. and Hinkelmann, K. (1995). Partial Diallel Crosses in Incomplete Blocks. *Biometrics* 51, 1302-1314.

[9]Raghavarao, D.(1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments,* Dover publications.