

# 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 이용한 칼라 영상의 분할

(Segmentation of Color Image using the Deterministic Annealing EM Algorithm)

조완현\* 박종현\*\* 박순영\*\*\*

(WanHyun Cho) (JongHyun Park) (SoonYoung Park)

**요약** 본 논문은 가우시안 혼합모형을 이용한 새로운 칼라 영상의 분할 알고리즘을 제안한다. 기존의 EM 알고리즘의 문제점인 국부적 최대값의 문제를 해결하기 위하여 최대 엔트로피의 원리를 이용하는 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 소개하였고, 여러 색상들로 구성된 영상에 대하여 가우시안 혼합모형을 가정하였으며, 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 사용하여 이들의 모수를 추정하는 방법을 알아보았다. 또한 혼합모형에 성분의 수를 자동으로 결정할 수 있는 방법을 제시하였으며 선택된 최적의 혼합모형을 사용하여 각 화소에 대한 사후확률을 계산하고 이들의 최대값을 이용하여 영상분할을 실시하였다. 결정적 어닐링 EM 알고리즘이 기존의 EM 알고리즘보다 혼합모형의 모수를 더 정확하게 추정한다는 것과 혼합모형의 성분의 수를 결정하는 제안된 방법의 성능을 실험결과를 통하여 고찰하였고, 또한 두 가지 실제 영상을 통하여 제안된 알고리즘이 기존의 알고리즘 보다 영상을 더 효율적으로 분할할 수 있음을 보였다.

**Abstract** In this paper we present a novel color image segmentation algorithm based on a Gaussian Mixture Model(GMM). It is introduced a Deterministic Annealing Expectation Maximization (DAEM) algorithm which is developed using the principle of maximum entropy to overcome the local maxima problem associated with the standard EM algorithm. In our approach, the GMM is used to represent the multi-colored objects statistically and its parameters are estimated by DAEM algorithm. We also develop the automatic determination method of the number of components in Gaussian mixtures models. The segmentation of image is based on the maximum posterior probability distribution which is calculated by using the GMM. The experimental results show that the proposed DAEM can estimate the parameters more accurately than the standard EM and the determination method of the number of mixture models is very efficient. When tested on two natural images, the proposed algorithm performs much better than the traditional algorithm in segmenting the image fields.

## 1. 서론

칼라 영상분할의 궁극적인 목적은 어떤 의미에 있어서 비슷한 색상을 보여주는 각 개체를 확인하는 것으로 공식적으로는 영상을 동일한 몇 개의 영역으로 분리하는

것으로 정의된다. 즉, 주어진 영상을 구성하고 있는 각 화소를 K개의 범주나 동일한 영역 중 하나에 분류함을 의미한다. 이것은 자동인식 로봇, 원격 의학진단, 대량의 멀티미디어 검색 등 그 응용범위가 매우 광범위하다.

지금까지 여러 가지 다양한 영상분할 알고리즘들이 제안되었는데 대표적인 방법으로는 정칙화 이론(Regulation Theory)과 여러 가지 필터를 사용하는 방법[1], 마코프 확률모형(Markov Random Field Model)과 베이즈의 추정방법[2], 가우시안 혼합모형(Gaussian mixture model)과 EM(Expectation Maximization) 알고리즘방법[3], 벡터의 양자화(Vector Quantization)와 군집분석(Cluster Analysis)을 이용하는 방법[4] 등을 생각할 수 있다. 이들 대부분의 방법들은 각 픽셀에서 관

\* 본 연구는 정보통신부의 대학기초연구지원사업으로 이루어진 것이다.

† 종신회원 : 전남대학교 통계학과 교수  
whcho@chonnam.chonnam.ac.kr

\*\* 비회원 : 목포대학교 전자공학과  
jhpark@chungkye.mokpo.ac.kr

\*\*\* 비회원 : 목포대학교 정보공학부 교수  
sypark@chungkye.mokpo.ac.kr

논문접수 : 2000년 3월 31일

심사완료 : 2001년 7월 12일

측되는 밝기를 특징벡터로 표현하며 이들에 대하여 적절한 확률모형을 가정하고, 이들 확률모형을 결정하는 모수들을 통계적 방법으로 추정하여 이용하거나 또는 각 특징벡터간의 유사도를 기반으로 하는 군집알고리즘을 사용하여 분할을 수행하는 방법들을 이용한다.

본 논문에서 우리는 최근에 조합적 최적화 문제에서 많은 관심을 불러일으키고 있는 어닐링(Annealing) 개념을 이용한다. 이것은 최대 엔트로피의 원리를 이용한 것으로 목적함수의 국부적 최대값의 문제를 해결할 수 있는 가장 바람직한 방법임과 동시에 반복 계산의 시작점에 전혀 의존하지 않는 방법으로 알려져 있다. 또한 우리는 주어진 칼라 영상의 각 픽셀에서 측정되는 R.G.B (Red, Green, Blue) 색상모형을 인간의 시각인지와 밀접한 관계가 있는 H.S.I(Hue, Saturation, Intensity) 성분의 특징벡터로 변환하여 사용한다. 그리고 여러 색상으로 이루어진 영상에 대하여 가우시안 혼합모형을 적용하여 모형화한 후에 결정적 어닐링(Deterministic Annealing) EM 알고리즘으로 모수를 추정하고, 추정된 통계적인 분포 특성에 따라서 각 픽셀의 사후확률(Posterior Probability)을 계산하여 동일한 영역을 나타내는 샘플들의 군(cluster)으로 개체를 분할한다.

본 논문의 구성은 먼저 2절에서 새로운 모수 추정방법인 결정적 어닐링 EM 알고리즘의 개념을 소개하고, 3절에서는 관측되는 특징벡터에 대하여 확률 모델로 가우시안 혼합 모델을 고려하여 새로이 제안된 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 이용한 모수의 추정방법을 기술한다. 또한 혼합모형의 성분의 수를 결정하는 방법과 영상 분할 방법을 소개하였다. 그리고 4절에서는 제안된 알고리즘과 기존의 방법에 대한 성능의 비교를 실험결과를 통하여 알아보았고, 마지막으로 5절에서는 제안된 방법에 대한 결론과 앞으로 연구방향에 대하여 기술한다.

## 2. 결정적 어닐링 EM 알고리즘

먼저 관측 가능한 특징벡터로 구성되는 벡터  $\mathbf{y}$ 를 불완비자료(Incomplete Data)라 하고, 벡터  $\mathbf{z}$ 를 군집을 표시하는 관측되지 않은 지시벡터 값이라 하자. 이때 완비자료(Complete Data)는  $\mathbf{x}=(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ 로 정의되고,  $\log L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})$ 를 완비자료에 기초하여 형성된 로그우도함수(Log Likelihood Function)라 하자. 또한  $p(\mathbf{y} | \mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})$ 를  $\mathbf{z}$ 가 주어졌을 때 특징벡터  $\mathbf{y}$ 의 조건부 확률밀도함수라 하고,  $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\pi})$ 는 모수벡터  $\boldsymbol{\pi}$ 를 지시벡터  $\mathbf{Z}$ 의 사전확률밀도함수(Prior Density Function)를 나타낸다고 하자. 그때 완비자료  $\mathbf{x}$ 의 로그우도함수  $\log L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})$ 는 다음

과 같이 주어진다.

$$\log L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) = \log p(\mathbf{y} | \mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) + \log p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\pi}) \quad (1)$$

여기서  $\boldsymbol{\theta}$ 는 조건부 분포의 모수벡터  $\boldsymbol{\theta}$ 와 사전분포의 모수벡터  $\boldsymbol{\pi}$ 를 포함하는 모수벡터이다.

이때 우리는 관측벡터  $\mathbf{y}$ 가 주어졌을 때 모수벡터  $\boldsymbol{\theta}$ 의 최우추정량(Maximum Likelihood Estimator)을 계산하는 방법으로 다음과 같은 EM 알고리즘을 이용할 수 있다. EM 알고리즘은 최우추정량의 초기 값으로 임의의 값,  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ 을 취하고, 다음의 두 단계를 반복적으로 적용하여 연속되는 추정량,  $\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \dots$ 을 계산하는 방법이다.

**E-Step** : 사후확률분포  $p_z^{(i)} = p(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}^{(i-1)})$ 를 계산하고, 이것을 이용하여 다음의 기대값을 구한다.

$$Q(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}) = E_{p_z^{(i)}}(L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})) \quad (2)$$

**M-Step** : 다음의 함수를 최대로 하는 모수벡터  $\boldsymbol{\theta}$ 의 추정량  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ 을 계산한다.

$$\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}) \quad (3)$$

그런데 위에서 정의되는 EM 알고리즘은 불완비자료에서 미지의 모수에 대한 최우추정량을 계산하는 경우나 사후확률분포의 최빈값을 구하는 문제, 그리고 최근에는 인공신경망을 학습시키는 경우 등 그 응용분야가 매우 다양한 추정방법이다. 그러나 이러한 활용성이 높은 매력적인 추정방법에도 불구하고 EM 알고리즘은 몇 가지 구조적 한계를 가지고 있다. 첫째는 모수벡터에 대한 초기값의 선택에 따라서 우도함수의 국부적 최대값이 되는 최우추정량을 제공한다는 것이고, 둘째는 추정량의 수렴속도가 너무 느리다는 것이며, 셋째로 관측되지 않은 자료를 사용하여 추정량을 계산하기 때문에 과도하게 적합되는 경향이 있다는 것이다. 이러한 문제점을 해결할 수 있는 하나의 방법으로 최근에 최대 엔트로피의 원리를 이용한 결정적 어닐링 EM 알고리즘의 개념이 몇몇 학자들에 의하여 제안되었다[5, 6].

먼저 완비자료의 로그우도함수  $\log L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}=(\mathbf{y}, \mathbf{z}))$ 를 고정된 모수벡터  $\boldsymbol{\theta}$ 에 대하여 표시벡터  $\mathbf{z}$ 의 함수로 생각하고, 표시벡터  $\mathbf{z}$ 의 전체 변수공간  $\Omega_z$ 상의 비용함수로 다음을 정의하자.

$$H(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = -\log L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) \quad (4)$$

그때 사전 확률밀도함수,  $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\pi})$ 에 관하여 비용함수의 기대값,  $E(H(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}))$ 을 계산하고, 이 값을 엔트로피의 제약조건하에서 분포공간상의 임의의 분포에 관하여 최소로 하는 문제를 생각할 수 있다. 그때 얻어지는

값을 통계역학에서 일반화 자유에너지(Generalized Free Energy)라고 부르며, 이것은 라그랑지의 승수(LaGrange Multiplier)를 사용하면 다음과 같은 목적함수로 표현된다.

$$\theta(p_z^{(t)}, \theta) = E_{p_z^{(t)}}(-L_c(\theta | \mathbf{x})) + \beta \cdot E_{p_z^{(t)}}(\log p_z^{(t)}) \quad (5)$$

그때 주어진 일반화 자유에너지,  $\theta(p_z^{(t)}, \theta)$ 를 최소로 만드는 해는 다음과 같은 깁스분포(Gibbs Distribution)의 형태로 주어진다.

$$p_\beta(z | \mathbf{y}; \theta) = \frac{1}{\sum_{z' \in \Omega_z} \exp(-\beta \cdot H(z' | \mathbf{y}; \theta)) \cdot \exp(-\beta \cdot H(z | \mathbf{y}; \theta))} \quad (6)$$

$$= \frac{(p(\mathbf{y} | \mathbf{z}; \theta) p(\mathbf{z}; \pi))^\beta}{\sum_{z' \in \Omega_z} (p(\mathbf{y} | \mathbf{z}'; \theta) p(\mathbf{z}'; \pi))^\beta}$$

따라서 우리는 모수  $\beta$ 에 의하여 결정되는 새로운 표식벡터  $\mathbf{Z}$ 의 사후확률분포(Posterior Distribution),  $p_\beta(z | \mathbf{y}; \theta)$ 를 얻게된다. 이때 사후확률분포는 두 가지 특별한 경우를 포함하는데 첫 번째 경우는  $\beta=0$ 인 것으로 이것은 일량분포(Uniform Distribution)에 해당하고, 두 번째 경우는  $\beta=1$ 인 것으로 이것은 보통의 EM 알고리즘에 의해서 얻어지는 사후분포에 해당된다. 따라서  $\beta$ 의 값을 영에서 일까지 점점 증가시키면 이 사후분포는 일량분포에서 보통의 베이시안 사후분포(Bayesian Posterior distribution)로 변화함을 알 수 있다. 그리고 우리는 주어진 사후분포  $p_\beta(z | \mathbf{y}; \theta)$ 를 이용하여 비용함수에 대한 기대값을 계산한다.

$$Q_\beta(\theta | \theta^{(t-1)}) = E_{p_\beta(z | \mathbf{y}; \theta)}(H(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \theta)) \quad (7)$$

다음으로 고정된 표식벡터  $\mathbf{z}$ 의 사전확률분포,  $p(\mathbf{z}; \pi)$ 에 대하여 일반화 자유에너지,  $\theta(p_z^{(t)}, \theta)$ 를 최소값으로 만드는 모수벡터  $\theta$ 의 값을 구해야한다. 그런데 일반화 자유에너지는 다음과 같은 형태로 표현되고,

$$\theta(p_z^{(t)}, \theta) = Q_\beta(\theta | \theta^{(t-1)}) + \beta \cdot E_{p_z^{(t)}}(\log p_z^{(t)}) \quad (8)$$

위의 방정식에서 오른쪽쪽의 두 번째 항은 모수벡터  $\theta$ 와 독립이므로 첫 번째 항에 대하여 최소값을 갖는 모수벡터를 구하면 된다. 따라서 이것은 보통의 EM 알고리즘의 **M-Step**에 해당되고, 우도방정식의 일차 도함수를 이용하여 모수벡터의 최우추정값을 구한다.

따라서 우리는 위의 두 가지 단계를 요약하면 다음과 같은 새로운 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 얻게된다. 그런데 이 알고리즘의 초기 단계에서는 계산한 모수벡터의 추정값이 초기값에 많이 의존하므로 **E-Step**의 초기 단계에서는 사후확률분포의 영향력을 가능한 낮게 하고, 반복계산이 진행될수록 영향력을 높여 가는 방법

을 사용해야한다.

**결정적 어닐링 EM 알고리즘**

**INITIALIZE** : 모수벡터의 초기값과 사전확률분포 결정;

$$\theta \leftarrow \theta^{(0)}, P_z \leftarrow P_z^{(0)};$$

$\beta$ 에 초기값을 부여 :  $\beta \leftarrow \beta_0$  ;

**IF**  $\beta < \beta_{FINAL}$  ;

**REPEAT**

**E-Step** : 사후확률분포  $p_z^{(t)} = p(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \theta^{(t-1)})$ 를

계산하고 다음의 기대값을 구한다;

$$Q_\beta(\theta | \theta^{(t-1)}) = E_{p_z^{(t)}}(-\log L_c(\theta | \mathbf{x}))$$

**M-Step** : 다음의 함수를 최소로 하는 모수벡터  $\theta$ 의

추정값  $\theta^{(t)}$ 을 계산;

$$\theta^{(t)} = \arg \max_{\theta} Q_\beta(\theta | \theta^{(t-1)})$$

$t = t + 1$ ;

**UNTIL** convergence;

$$\beta \leftarrow \beta + \delta_\beta ; \theta^{(t-1)} \leftarrow \theta^{(t)} ; p_z^{(t-1)} \leftarrow p_z^{(t)} ;$$

**ELSE** exit ;

**3. 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 이용한 영상분할**

**3.1 가우시안 혼합모형의 모수추정**

먼저 우리는 칼라영상이  $N$ 개의 화소로 구성되어 있다고 하고, 각 화소는  $K$ 개의 서로 다른 영역중의 하나에 속한다고 하자. 그리고  $K$ 개의 서로 다른 영역을  $G_1, \dots, G_K$ 로 나타내자. 이때  $\mathbf{y}_i, (i=1, \dots, N)$ 를  $i$ 번째 픽셀로부터 관측되는 유한차원의 특징벡터라 하고,  $p_k(\mathbf{y}_i; \theta_k)$ 를  $i$ 번째 픽셀의 특징벡터  $\mathbf{y}_i$ 가  $k$ 번째 그룹  $G_k$ 로부터 관측될 조건부 확률밀도함수라 하자. 이때 특징벡터  $\mathbf{y}_i$ 의 확률분포를 나타내기 위해서 유한 혼합모형을 채택할 수 있는데 이것의 분포는 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$p(\mathbf{y}_i; \theta) = \sum_{k=1}^K \pi_{ik} p_k(\mathbf{y}_i; \theta_k), (i=1, \dots, N) \quad (9)$$

여기서  $\pi_{ik}$ 은  $i$ 번째 픽셀이  $k$ 번째 그룹으로 속하는 사전확률이다.

그리고  $N$ 개의 픽셀에 대한 관측되지 않은 그룹표식 벡터들을  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N$ 으로 표시하자. 그러면  $i$ 번째 픽셀의 그룹표식벡터  $\mathbf{z}_i^t = (z_{i1}, \dots, z_{iK})$ 의  $k$ 번째 성분  $z_{ik}$ 은  $i$ 픽셀이  $k$ 번째 그룹에 속하면 1을 속하지 않으면 0을 가진다. 일반적으로 우리가 많이 사용하는 영상분할에서의 가정은 픽셀간의 공간적인 성질을 무시하는 것으로 이것은 각 픽셀이 독립적이고 동일한 분포로 구성

되어 있음을 의미한다. 따라서  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ 의 사전 확률분포는 다음과 같이 주어진다.

$$p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\pi}) = \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^K \pi_k^{z_{ik}} \quad (10)$$

여기서  $\pi_k$ , ( $k = 1, \dots, K$ )는  $i$ 번째 픽셀이  $k$ 번째 개체에 속할 사전확률이며 각각의 합은 1이다. 또한 그룹 표시벡터  $\mathbf{z}$ 가 주어졌을 때 특징벡터  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 의 조건부 확률분포가 각 픽셀간에 독립적으로 분포한다고 가정하면, 이때 특징벡터  $\mathbf{y}$ 의 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^K p_k(y_i; \boldsymbol{\theta}_k)^{z_{ik}} \quad (11)$$

여기에서  $p_k(y_i; \boldsymbol{\theta}_k)$ 는 평균이  $\boldsymbol{\mu}_k$ 이고, 공분산이  $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 인 다변량 정규분포,  $\phi(\mathbf{y}_k; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$ 가 많이 사용된다. 따라서 완비된 자료  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ 의 로그우도함수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\log L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{ik} \log(\pi_k \cdot \phi(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}_k)) \quad (12)$$

이때 2절에서 유도한 결정적 어닐링 EM 알고리즘의 결과를 사용하기 위해서 다음과 같이 비용함수를 정의하고,

$$H(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = -\log L_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) \\ = -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{ik} \log(\pi_k \cdot \phi(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}_k)) \quad (13)$$

이 비용함수에 대하여 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 적용하면  $t$ 번째 반복단계의 E-Step에서 그룹 표시벡터  $\mathbf{z}$ 에 대한 사후밀도함수는 다음과 같은 깃스분포로 주어진다.

$$p_{\beta}(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}) = \frac{1}{\sum_{z' \in \Omega_z} \exp(-\beta H(\mathbf{z}' | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}))} \cdot \exp(-\beta H(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})) \quad (14)$$

그런데 위 수식의 분모는 다음과 같이 쓸 수 있으므로,

$$\sum_{z' \in \Omega_z} \exp(-\beta H(\mathbf{z}' | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})) \\ = \prod_{i=1}^N \sum_{h=1}^K (\widehat{\pi}_h \cdot \phi(\mathbf{y}_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_h))^{\beta} \quad (15)$$

따라서  $\mathbf{z}$ 의 사후밀도함수는 다음과 같이 곱의 형태로 주어진다.

$$p_{\beta}(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}) \\ = \prod_{i=1}^N \frac{\sum_{k=1}^K z_{ik} \cdot (\widehat{\pi}_k^{(t-1)} \cdot \phi(\mathbf{y}_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(t-1)}))^{\beta}}{\sum_{h=1}^K (\widehat{\pi}_h^{(t-1)} \cdot \phi(\mathbf{y}_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_h^{(t-1)}))^{\beta}} \quad (16)$$

또한 위에서 얻어진  $\mathbf{z}$ 의 사후확률밀도함수를 사용하여 조건부기대값,  $E(H(\mathbf{z} | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}))$ 을 계산한다. 그런데 로그우도함수가 그룹 표시변수  $Z_{ik}$ 의 선형함수로 주어지

기 때문에 이들 각각의 그룹 표시변수  $Z_{ik}$ 의 조건부기대값을 계산하면 된다. 따라서 이것은 다음과 같이 표현되고, 이것은  $t$ 번째 반복계산 후에  $i$ 번째 픽셀에서 관측되는 특징벡터  $\mathbf{y}_i$ 가  $k$ 번째 그룹에 속하는 사후확률이 된다.

$$\tau_k^{(t)}(\mathbf{y}_i) = E[z_{ik} | \mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}] \\ = \frac{(\widehat{\pi}_k^{(t-1)} \phi(\mathbf{y}_i; \widehat{\boldsymbol{\mu}}_k^{(t-1)}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_k^{(t-1)}))^{\beta}}{\sum_{h=1}^K (\widehat{\pi}_h^{(t-1)} \phi(\mathbf{y}_i; \widehat{\boldsymbol{\mu}}_h^{(t-1)}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_h^{(t-1)}))^{\beta}} \quad (17)$$

그리고 우리가 관측되지 않은 표시변수  $Z_{ik}$  대신에 사후확률로 대체한다면 다음의  $Q_{\beta}$  함수를 얻을 수 있다.

$$Q_{\beta}(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}) \\ = -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \tau_k^{(t)}(\mathbf{y}_i) \log(\widehat{\pi}_k^{(t-1)} \phi(\mathbf{y}_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(t-1)})) \quad (18)$$

다음으로  $t$ 번째 반복계산의 M-Step에서 우리는 함수  $Q_{\beta}(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(t-1)})$ 를 최대로 만드는  $\boldsymbol{\theta}$ 의 값을 구해야 한다. 만약 우리가 라그랑지 승수법을 사용하면 각 모수들에 대하여 최우추정량을 얻을 수 있다. 먼저 혼합비율의 추정량은 다음과 같이 주어지고,

$$\widehat{\pi}_k^{(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_k^{(t)}(\mathbf{y}_i) \quad (19)$$

또한 다변량 정규분포의 평균벡터와 공분산 행렬들의 최우추정량들은 다음과 같이 계산된다.

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_k^{(t)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \tau_k^{(t)}(\mathbf{y}_i)} \sum_{i=1}^N \tau_k^{(t)}(\mathbf{y}_i) \cdot \mathbf{y}_i, \quad (20)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_k^{(t)} = \frac{\sum_{i=1}^N \tau_k^{(t)}(\mathbf{y}_i) (\mathbf{y}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_k^{(t)}) (\mathbf{y}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_k^{(t)})^t}{\sum_{i=1}^N \tau_k^{(t)}(\mathbf{y}_i)} \quad (21)$$

### 3.2 혼합모형에서 성분 수의 결정

우리는 측정자료  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$ 들이 다음과 같은  $K$ 개의 성분으로 구성된 가우시안 혼합모형에서 추출되었다고 가정하고, 이때 최적의 성분의 수인  $K$ 의 값을 결정하는 문제를 생각해 보자.

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^K \pi_k \phi(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_k) \quad (22)$$

이 문제에 대한 연구가 최근에 몇몇 학자들에 의하여 수행되었으며 이중 대표적인 것으로는 Medasani와 Krishnapuram[7]을 생각할 수 있다. 이들은 최대의 성분의 수로  $C$ 를 사전에 미리 정하고, 목적함수(Object Function)로 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$J = \sum_{i=1}^N \log \left( \sum_{k=1}^C \pi_k p(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}_k) \right) + \alpha \sum_{k=1}^C \pi_k^2 \quad (23)$$

그때 계층적 가우시안 혼합분해 알고리즘을 사용하여 주어진 군집중 출현확률이 아주 작은 군집을 다른 군집에 병합하는 방법으로 군집의 수를 줄여 가면서 목적함

수 값을 최대로 만드는 군집의 수  $K$  ( $1 \leq K \leq C$ )를 구하여 최적의 성분의 수로 결정하였다. 또한 비슷한 방법으로 Cheng와 Xu[8]은 다음과 같은 비용함수를 정의하고, 이 함수값을 최대로 만드는 정수  $K$  ( $1 \leq K \leq N$ )를 순차적으로 계산하여 최적의 성분수로 사용하였다.

$$J(K, \theta_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K p(k | y_j) \cdot \log p(k | y_j) - \sum_{k=1}^K \pi_k \log \pi_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K p(k | y_j) \cdot \log p(y_j | \theta_k) \quad (24)$$

따라서 우리는 먼저 주어진 자료에 대하여  $K$  개의 혼합모형을 가정하고 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 사용하여 이들 모수를 추정한 다음 이 값들을 대입한 로 그우도함수를 목적함수로 정의한다.

$$J = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \hat{\pi}_k(y_j) \cdot \log(\hat{\pi}_k \cdot p(y_j; \hat{\theta}_k)) \quad (25)$$

그리고 정의된 목적함수의 값을 계산하고, 이러한 절차를 가능한 정수  $K$ 에 대하여 반복적으로 적용하여 목적함수 값을 최대로 만드는 정수  $K$  ( $1 \leq K \leq N$ )를 최적의 성분의 수로 결정한다.

**3.3 칼라영상의 분할**

최종적으로 얻어진 가우시안 혼합모형의 성분의 수와 이들 각각의 성분들에 대한 모수벡터들의 최우추정량을 사용하여  $i$  번째 픽셀이 주어진 특정그룹에 속할 표시벡터  $z_i$ 의 최우사후추정량(Maximum A Posterior estimate : MAP)은 다음과 같이 정의하고,

$$\hat{z}_i = \max_{1 \leq k \leq K} p(Z_{ik} = 1 | y_i, \theta) = \max_{1 \leq k \leq K} \frac{\{\hat{\pi}_k \phi(y_i; \hat{\mu}_k, \hat{\Sigma}_k)\}^\beta}{\sum_{h=1}^K \{\hat{\pi}_h^{(t-1)} \phi(y_i; \hat{\mu}_h, \hat{\Sigma}_h)\}^\beta} \quad (26)$$

이때 각 픽셀에 대하여 최우사후추정량을 계산하여 이 값이 일어나는 해당 그룹에 주어진 픽셀을 할당함으로써 영상분할이 수행된다.

**4. 실험 및 결과**

제안된 영상분할 알고리즘의 효율성을 분석하며 기존의 방법과 성능을 비교하기 위하여 실험자료(synthetic data)와 자연 영상에 대한 실험을 수행하였다.

**4.1 기존의 EM 과 결정적 어닐링 EM 의 성능비교**

제안된 알고리즘이 초기조건에 대하여 강건하며 모수 추정에서 전역적인 최적의 해를 제공할 수 있는 방법임을 입증하기 위하여 다음과 같은 실험자료를 이용하였다. 실험자료는 네 개의 국부적인 특성이 비슷한 군집으로 구성되어있으며 각 군집은 표 1에서와 같은 평균 벡터와 공분산 행렬을 가지고 있는 다변량 가우시안 분포로부터 발생된 2,500개의 샘플들로 이루어졌다. 여기서 각

각의 샘플들은 서로 독립적이며 동일하게 분포되었다.

표 1 실험자료 발생을 위해 사용된 모수

모 수	$\mu$	$\Sigma$
군집1	(0.0, 0.7)	$\begin{pmatrix} 0.03 & 0.002 \\ 0.002 & 0.006 \end{pmatrix}$
군집2	(0.3, 0.0)	$\begin{pmatrix} 0.008 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.001 \end{pmatrix}$
군집3	(0.5, -0.3)	$\begin{pmatrix} 0.003 & -0.005 \\ -0.005 & 0.03 \end{pmatrix}$
군집4	(-0.6, 0.2)	$\begin{pmatrix} 0.03 & 0.001 \\ 0.001 & 0.006 \end{pmatrix}$

또한 생성된 실험자료의 공간적 특성을 시각적으로 파악하기 위하여 이들을 이차원 공간에 그림 1과 같이 도식하였다. 여기에 그려진 원들은 초기조건을 시각적으로 표현하기 위하여 각 군집의 평균벡터,  $\mu$ 와 주어진 공분산행렬  $\Sigma$ 를 사용하여서 다음의 방정식을 만족하는  $x$ 의 성분으로 구성되어 있다[9].

$$(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu) = 1 \quad (27)$$

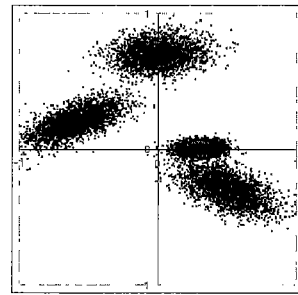


그림 1 실험에서 생성된 표본들에 대한 2차원 산점도

먼저 두 개의 군집을 가정하고, 임의로 초기값을 선택하여 실험자료를 두 개의 군집으로 분할한 실험결과가 그림 2(a)에 나타나 있다. 기존 EM 알고리즘은 초기의 위치에 영향을 받아서 국부적 유사성이 아주 빈약한 샘플들을 하나의 군집에 포함시키려는 속성이 있으나 결정적 어닐링 EM 알고리즘은 통계학적 특성이 비슷한 샘플들을 가지고 군집화시키려는 속성이 있음을 관찰할 수 있다. 또한 그림 2(b)는 세 개의 군집을 가정하고, 임의로 세 개의 초기값을 선택하여 분할을 실시한 결과를 보여주고 있다. EM 알고리즘은 같은 군집내에 두개의 가우시안 분포가 중복되어 수렴되는 결과를 보이지만 반면에 결정적 어닐링 EM 알고리즘은 가장 근접하게 위치하고 있는 두 개의 군집으로 한 개의 가우시안

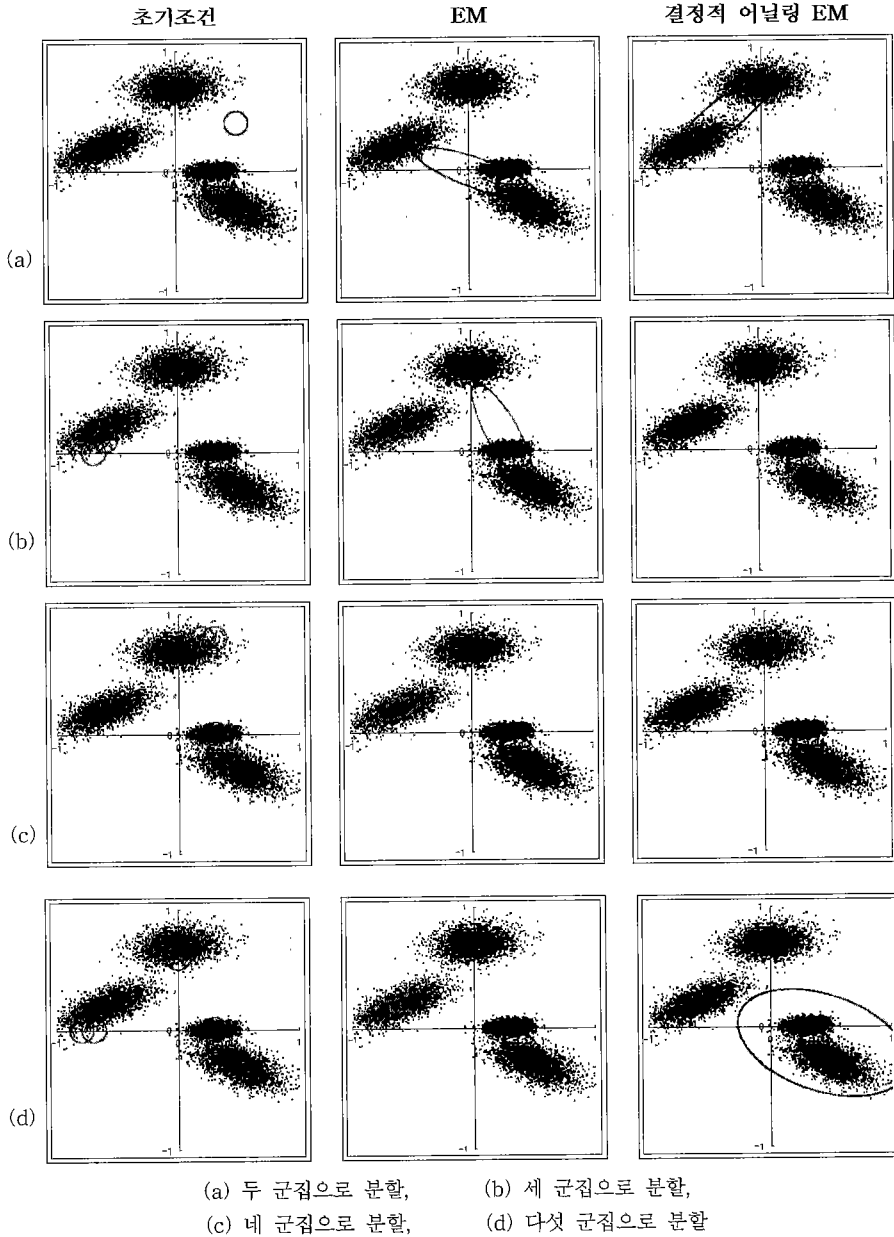


그림 2 세 종류의 초기조건에 의한 가우시안 혼합모형의 수렴결과

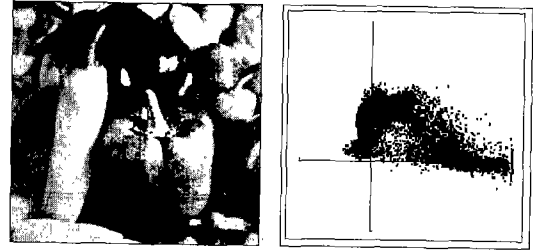
분포가 수렴되었으며 다른 두개의 군집으로 나머지 두개의 가우시안 분포가 수렴됨을 볼 수가 있다. 세 번째로 그림 2(c)는 시각적으로 가장 이상적인 네 개의 군집으로 실험자료를 분할한 실험결과로서 결정적 어닐링 EM 알고리즘은 초기조건에 의존치 않고, 각각의 군집

위에 수렴된 가우시안 분포가 위치하고 있으나 EM 알고리즘은 초기 위치 때문에 한 군집내에 두 개의 가우시안 분포가 수렴되는 결과를 낳게 되었다. 마지막으로 그림 2(d)는 아주 흥미로운 결과를 보여주고 있는데 가정된 네 개의 군집보다 더 많도록 다섯 개의 군집으로

분할을 시도하는 경우에는 결정적 어닐링 EM 알고리즘의 분할결과와는 두 개의 군집이 중복되게 분할됨으로서 보통의 EM 알고리즘의 분할결과보다는 시각적으로 덜 적절한 것 같이 보여지고 있다. 이러한 결과는 아마도 보통의 EM 알고리즘이 국부적 최대값에 수렴하는 성질로부터 유래한 것이 아니가 추측된다.

다음은 자연영상에 대한 실험결과를 제시하고 있다. 실험영상은  $100 \times 100$ 의 픽셀로 구성되고, 각 픽셀은 R.G.B 세 개의 색상으로 이루어진 그림 3(a)의 peppers 영상을 사용하였으며 이 영상을 인간의 시각인지와 밀접한 관계가 있는 H.S.I 색상 모델로 변환한 후에 색상 성분과 관계가 있는 Hue와 Saturation 성분만을 사용하여 2차원의 특징벡터를 구성하였다[10]. 그림 3(b)는 변환된 H.S.I 모델에서 각 픽셀에 대한 Hue와 Saturation 성분을 2차원 극좌표 평면 위에 표시한 결과로서 원래의 peppers영상에서 관찰할 수 있는 것처럼 픽셀들은

세계의 동질의 특성을 가지고 있는 군집으로 분류할 수 있음을 볼 수 있다.



(a) peppers 영상( $100 \times 100$ ) (b) 극좌표 평면에서 픽셀들의 H, S 성분 분포

그림 3 실험에 사용한 영상

실험은 먼저 EM알고리즘과 제안된 결정적 어닐링

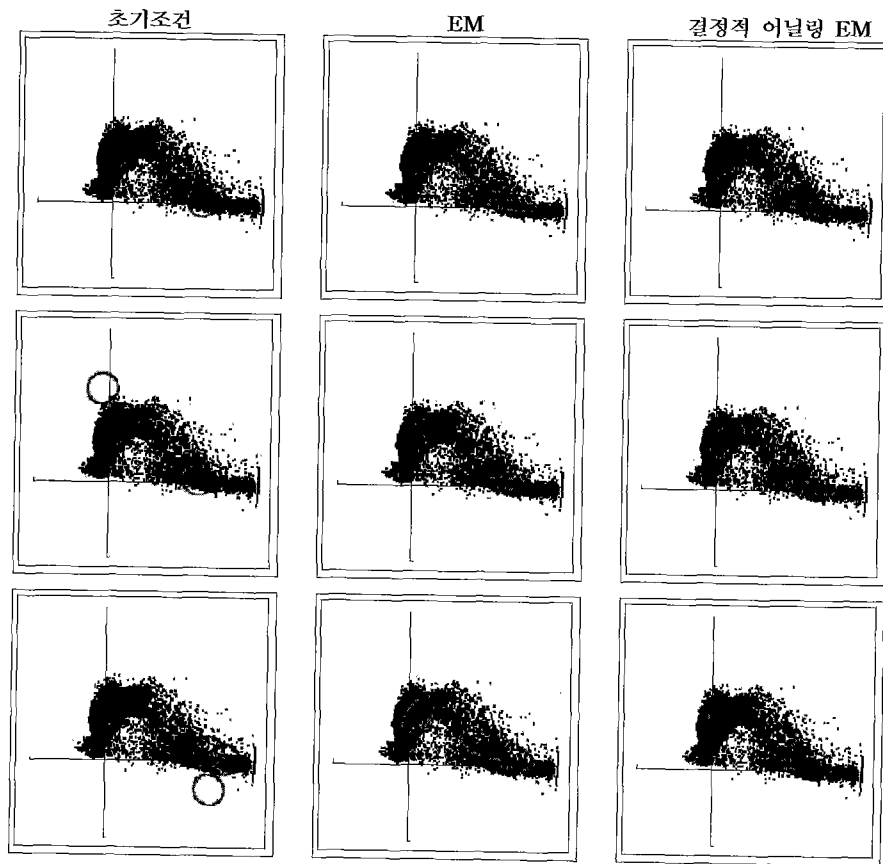


그림 4 세 종류의 다양한 초기조건에 대한 EM과 결정적 어닐링 EM의 적용한 결과

EM 알고리즘의 균집화 특성을 살펴보기 위하여 그림 3의 데이터에 각각 다른 초기 조건을 사용하면서 분할을 실시한 결과가 그림 4에 나타나 있다. 그림 5의 첫 번째 열에는 각 균집에 대한 중심벡터로 사용된 초기값의 위치를 표시하고 있다. 또한 두 알고리즘을 적용하기 위해서는 공분산행렬,  $\Sigma_k^{(0)}$ 의 초기값이 필요하며 우리는 주대각선 성분이 0.01이고 비주대각선 성분이 영인 행렬을 사용하고, 각 균집의 사전확률은 서로 동일하게 사용하였다 (즉  $k=3$ 인 경우  $\pi_k^{(0)}=1/3$ ). 다음으로 그림 4의 두 번째와 세 번째 열에는 EM 알고리즘과 제안된 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 사용하여 주어진 샘플들을 균집화한 결과를 볼 수 있다. 예측한 바와 같이 균집의 중심으로 초기조건을 시작한 경우는 기존의 EM 알고리즘이나 결정적 어닐링 EM 알고리즘이 모두 비슷하게 수렴된 형태를 갖고 있으나 초기조건을 임의적으로 선택한 경우는 수렴된 결과가 각각 다르게 나타났으며 이것은 전체 우도함수가 초기조건에 의존한 국부적으로 최대가 됨을 의미한다. 위와 같이 일관성이 부족한 세 개의 균집으로 수렴된 결과를 사용하여 영상을 분류할 시에는 정확도가 떨어지게 되며 특히 EM 알고리즘에서 마지막 경우는 한 개의 가우시안이 다른 가우시안에 거의 포함되어서 세 개의 개체로 분할은 불가능하다.

따라서 위와 같은 균집화 실험을 통하여 결정적 어닐

링 EM 알고리즘은 초기조건에 의존하지 않고, 최적의 전체 우도함수의 조건에 수렴되는 가우시안 혼합모델을 추정함으로써 각 샘플들을 이상적으로 균집화시킬 수 있음을 알 수 있다.

#### 4.2 혼합도형에서 성분의 수의 결정

우리는 제안된 목적함수를 사용하여 측정자료에 가장 잘 적합되는 혼합도형의 수를 결정하는 방법을 실험자료를 통하여 고찰하였다. 다음 표 2는 주어진 실험자료에 여러 개의 균집의 수를 초기조건을 가지고 EM 알고리즘과 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 적용하여 계산된 로그우도의 값을 제시한 것이다. 주어진 결과는 결정적 어닐링 EM 알고리즘이 기존의 EM 알고리즘이 가지고 있는 국부적 최대값의 문제점을 극복할 수 있음을 보여준다. 특히, 네 개의 균집으로 분할한 경우가 가장 높은 우도함수 값을 산출하였는데 이것은 실제 네 개의 가우시안 모델로부터 발생된 실험자료를 네 균집으로 집단화시키는 방법이 가장 이상적임을 보여주고 있다. 또한 다섯 개의 균집으로 분할하는 경우에는 결정적 어닐링 EM에 의한 로그우도함수의 값이 급격히 감소하여 네 균집이 가장 적절한 균집의 수임을 다시 한번 확인할 수 있으나 반면에 보통의 EM에 의하여 계산된 로그우도함수의 값은 아주 작은 차이의 감소가 일어나므로 최적의 균집의 수를 결정하는데 잘못된 결정을 내릴 수

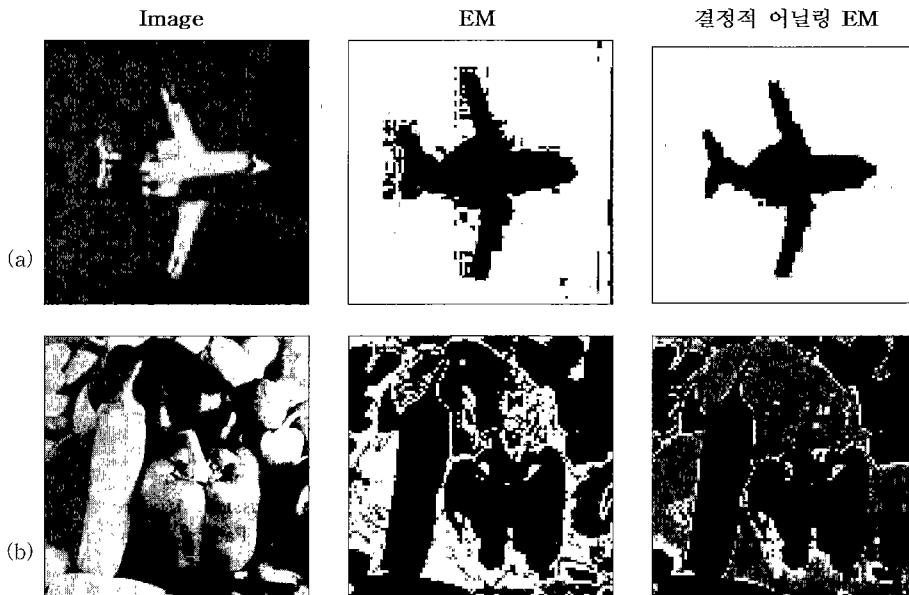


그림 5 실제 영상의 개체 분할 : (a) Airplane 영상, (b) Peppers 영상



있는 가능성이 존재함을 알 수 있다.

표 2 EM과 결정적 어닐링 EM에 의해서 계산된 우도 함수값

군집의 수	로그우도함수값	
	EM	결정적 어닐링 EM
두 군집	-1266	-159
세 군집	-873	1008
네 군집	1144	2096
다섯 군집	1142	1070

### 4.3 자연영상에서의 개체 분할

다음 그림 5는 임의적으로 선택된 초기조건을 사용하여 EM 알고리즘과 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 두 종류의 다른 영상에 적용하여서 분할한 경우를 보여주고 있다. 제안된 알고리즘이 영상내 여러 색상으로 구성되어 있는 개체를 더욱 정확하게 분할할 수 있으며 특히 에지 부근에서 세밀한 영상 정보들이 시각적으로 적합하게 분류됨을 관찰할 수 있다.

결과적으로 제안된 결정적 어닐링 EM 알고리즘은 초기조건에 강건하게 동작함으로써 최적의 전체 우도함수의 조건에 수렴하게 되어 각 샘플들을 이상적으로 군집화시킬 수 있었으며 이 결과를 바탕으로 영상을 효율적으로 분할할 수 있음을 볼 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 통계적 확률모형에 기반을 둔 칼라 영상의 분할 방법을 제안하였는데 먼저 칼라영상의 각 픽셀에 대한 R.G.B 색상 모델을 인간의 시각인지와 비슷한 H.S.I 성분의 특징벡터로 변환하고 이들 특징벡터에 대하여 확률모델로 가우시안 혼합 모형을 가정하고, 결정적 어닐링 EM 알고리즘을 사용하여 이들의 모수를 추정한다. 또한 추정된 모수값을 사용하여 여 각 개체들을 분할하였다.

제안된 방법은 모수 벡터를 추정하는데 최대 엔트로피의 원리를 이용함으로써 초기조건과는 독립적으로 최적의 전체 우도함수에 수렴하게 할 수 있었다. 또한 실험을 통하여 제안된 결정적 어닐링 EM 알고리즘의 강건한 동작 상태를 관찰할 수 있었으며 이 결과를 바탕으로 칼라 영상이 효율적으로 분할됨을 볼 수 있었다. 또한 혼합모형의 성분의 수를 결정하는 경우에도 결정적 어닐링 EM 알고리즘이 보통의 EM 알고리즘보다 더 정확한 로그 우도함수 값을 제공함으로써 이러한 목

적함수 값을 기준으로 성분의 수를 결정하는 경우에 우리는 보다 더 정확한 결정을 내릴 수 있다는 사실을 알 수 있었다.

반면에 향후 연구과제로 생각할 수 있는 문제로는 결정적 어닐링을 수행하는 경우에 어닐링 속도를 어떻게 적절히 조절할 것인가와 각 픽셀에 대한 공간적 성질을 고려하지 않고, 이들이 서로 독립적이라고 가정하고 추정방법을 유도한 결과를 어떻게 개선할 수 있는가 하는 것을 생각할 수 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] Unser, M., Aldroubi, A. and Eden, M., "Recursive Regulation Filters: Design, Properties and Applications," IEEE Transactions on PAMI, Vol. 13, No. 3, pp.272-277, 1991.
- [2] Geman, S. and Geman, D., "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images," IEEE Trans. PAMI, Vol. 6, pp.721-741, 1984.
- [3] McLachlan, G. J., Ng, S. K., Galloway, G. J. and Wang, D., "Clustering of Magnetic Resonance Images," Technical Report, Department of Mathematics, University of Queensland, Australia, 1998.
- [4] Hofmann, T. and Buhman, J. M., "Pairwise Data Clustering by Deterministic Annealing," IEEE Transactions on PAMI, Vol. 19, No. 1, pp.1-13, 1997.
- [5] Ueda, N. and Nakano, R., "Deterministic Annealing EM Algorithm," Neural Network Vol. 11, pp. 271-282, 1998.
- [6] Neal, R. M. and Hilton, G. E., "A View of the EM Algorithm that Justifies Incremental and other Variants," Technical Report, Department of Statistics, University of Toronto, Canada, 1998.
- [7] Medasani, S. and Krishnapuram, R., "Determination of the Number of Components in Gaussian Mixtures Using Agglomerative Clustering," Proceedings of IEEE ICNN, Houston, USA, Vol. 3, pp.1412-1417, 1997.
- [8] Cheung, Yiu-ming and Xu, Lei, "Some Further Studies on Detection the Number of Clusters", Proceedings of IEEE ICNN, Houston, USA, Vol. 3, pp.1479-1483, 1997.
- [9] McKenzie, P. and Alder, M., "The EM Algorithm used for Gaussian Mixture Modelling and its Initialization," Pattern Recognition in practice IV, Vlieland, 1994.
- [10] Belongie, S., Carson, C., Greenspan, H. and Malik, J., "Color-and Texture-Based Image Segmentation

*Using EM and Its Application to Content-Based Image Retrieval," IEEE Computer Society, pp.675-682, 1998.*



조 완 현

1977년 전남대학교 수학교육과 졸업(학사). 1981년 전남대학교 대학원 수학과 졸업(석사). 1988년 고려대학교 통계학과(박사). 1983년 ~ 현재 전남대학교 통계학과 교수. 관심분야는 패턴인식, 다변량 통계분석, 영상 및 비디오처리



박 중 현

1995년 목포대학교 전자공학과 졸업(학사). 1997년 목포대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1999년 ~ 현재 목포대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. 관심분야는 영상처리, 내용기반 영상 및 비디오 검색, 멀티미디어 등임



박 순 영

1982년 연세대학교 전자공학과 졸업(학사). 1984년 연세대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1986년 뉴욕주립대학교 전기 및 컴퓨터공학과(석사). 1988년 뉴욕주립대학교 전기 및 컴퓨터공학과(박사). 1989년 ~ 1990년 뉴욕주립대학교

Post doctor. 1990년 ~ 현재 목포대학교 정보공학부 교수. 관심분야는 영상 및 비디오처리, 영상보호 및 인증, 영상검색