

형상불완전을 갖는 평면 원호 아치의 동적 거동

Dynamic Behavior of the Plane Circular Arches with the Shape Imperfections

조 진 구
Cho, Jin Goo

Abstract

In this study, a computer program considering shape imperfections of arch under dynamic loading was developed. The shape imperfection of arch was assumed as higher degree polynomial expressed as $w_i = w_o(1 - (2x/L)^m)^n$ and sinusoidal curve such as $w_i = w_o \sin(n\pi x/L)$.

In finite element formulation, the material nonlinear behavior was assumed the elasto-viscoplastic model highly corresponding to the real behavior of the material and the geometrically nonlinear behavior was modeled using Lagrangian description of motion. Also, the behavior of steel was modeled by applying yield criteria of Von Mises.

The developed program was applied to the analysis of the dynamic behavior for the clamped beam subjected to the concentrated load at midspan and the results were compared with those from other research to investigate accuracy of the presented finite element program. In numerical examples, the shape imperfections of $L/500$, $L/1,000$ and $L/2,000$ were considered and the modes of shape imperfections of the symmetric and antisymmetric were adopted. The effects of the shape imperfections on the dynamic behavior of arch were conspicuous and results of analysis indicate that the reasonable values of arch rise to arch span ratio ranged between 0.1 and 0.3.

I. 서 론

아치는 주로 원호, 포물선 등의 곡선형상을 갖는 구조물로서 직선부재로 구성되는 다른 구조형식과는 거동이 매우 상이하고 따라서 하중을 지지하는 방식도 매우 특이하다.⁵⁾ 아치는 수직으로 작용하는 외력 때문에 양단의 지점에서 수평 반력이

발생하고 이 수평 반력은 임의 단면에서의 굽힘 모멘트를 감소시키며 부재단면은 주로 축방향 압축력을 지지하게 되므로 긴 시간의 구조물 건설에 사용될 수 있다. 특히 아치는 곡선형태이므로 구조적으로 안정되고 미관이 아름답기 때문에 오랜 옛날부터 온실, 교량 등 각종 구조물에 널리 사용된 구조형식이다.

*전남대학교 농과대학(농업과학기술 연구소)

키워드 : 평면아치, 형상불완전, 초기결함, 동적해석

과거에는 단면은 크고 시간이 짧은 구조물이 대부분이며 하중이 과대하지 않았기 때문에 정적 해석만으로도 안전한 설계가 가능하였다. 그러나 최근에는 강재의 압연기술의 발전으로 강구조 부재는 경량화 및 고강도화 되었으며^{6,9)} 설계기술이 발달함에 따라 단면은 작아지는 반면 시간은 더욱 길어지는 등 대규모화하는 추세에 있는데⁹⁾ 반해 충격, 지진 등 예기치 않은 동하중을 받는 경우가 많아지는 등 위험성은 오히려 커지고 있다.

구조물은 어떠한 경우에도 안전성이 확보되어야 하고 이를 위해서는 정하중은 물론 동하중에 대해서도 안전성이 확보되어야 한다. 한편 작은 시간을 갖는 아치는 그 구조형상의 특성상 건설과정과 크리프 및 건조 수축 등의 장기 거동에 의하여 형상불완전이 개입될 수 있다.⁴⁾ 이러한 형상불완전은 아치 구조물에 추가적인 응력의 발생과 극한강도의 저하 등에 영향을 미치고 있으므로 정밀한 해석을 위해서는 반드시 고려되어야 한다.^{12,13)} Zienkiewicz¹⁵⁾ 등은 대변형을 고려한 소성문제의 해석방법을 연구하였고, Robert Kao^{12,13)}는 1978년과 1980년에 발표된 초기 결함을 갖는 구형꺾의 동적 좌굴의 연구에서 초기 결함이 구형꺾의 내하 능력에 큰 영향을 미친다고 하였다. 한편 국내에서 조^{1,2,3)}는 수 편의 논문에서 철근 콘크리트 축대칭 셸이 초기 결함을 갖는 경우의 동적 특성을 연구한 바 있으며 최창근⁴⁾ 등은 철근 콘크리트 냉각탑의 바람하중에 의한 동적 거동에서 형상불완전의 개입으로 인한 동적 특성을 연구한 바 있다. 그러나 아직까지는 형상불완전을 갖는 아치의 동적 특성에 관한 연구는 거의 이루어지지 않고 있다. 또한 지금까지 이루어진 연구는 대부분 아치의 거동을 수직 처짐만을 자유도로하여 지배미분방정식을 수치해석^{6,7)} 또는 해석적 방법⁸⁾으로 해석한 것들로서 아치를 평면 문제로 해석한 것은 거의 없는 실정이다.⁵⁾

따라서 본 연구에서는 2차원 평면 해석 방법을 적용하고 강재의 재료비선형과 대변형에 따른 기하학적 비선형등을 고려한 비선형 해석을 통하여 형상불완전을 갖는 평면 원호아치의 동적 거동 특

성을 파악 하므로써 평면 원호아치의 실제 설계시에 동적 특성을 고려할 수 있도록 하는데 그 목적이 있다.

이를 위하여 해석방법으로는 유한요소법을 사용하였으며 유한요소 정식화에서 탄-점소성 모델에 의해서 재료비선형 효과를 고려하고 기하학적 비선형 효과는 전체 라그랑지안 좌표계에 의해서 고려하였다. 강재의 거동은 Von Mises 항복 기준에 따라 모델링 하였다.

II. 유한요소 해석

형상불완전을 갖는 평면 원호 아치의 동적 해석 방법으로는 유한요소법을 사용하였으며 이때 사용된 요소는 8-절점 등매개변수 요소이다. 또한 유한요소 정식화 과정에서는 다음 사항들을 고려하였다.

1. 재료비선형

일반적으로 비선형 연속체의 문제에서 전체 변형률은 탄성 성분과 점소성 성분으로 나눌 수 있다. 따라서 임의의 시간 t_n 에서의 전체 변형률 속도 $[\dot{\epsilon}]_n$ 은 다음과 같다.

$$[\dot{\epsilon}]_n = [\dot{\epsilon}_e]_n + [\dot{\epsilon}_{vp}]_n \dots\dots\dots (1)$$

응력 속도는 변형률 속도와 관련하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\dot{\sigma}] = [D][\dot{\epsilon}_e] \dots\dots\dots (2)$$

한편 점소성 변형률 속도를 현재의 응력 상태만의 함수라고 하면 다음과 같은 점소성 유동법칙으로 나타낼 수 있다.

$$[\dot{\epsilon}_{vp}]_n = \gamma \langle \Phi_n(F) \rangle \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}_n \dots\dots\dots (3)$$

식(2) 및 식(3)을 식(1)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$[\varepsilon]_n = [D]^{-1} [\sigma]_n + \gamma \langle \phi_n(F) \rangle \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}_n \dots\dots\dots (4)$$

여기서 [D] : 탄성행렬
 γ : 유동계수
 (F) : 항복함수

$[\varepsilon]_n, [\varepsilon_e]_n, [\varepsilon_{vp}]_n$: 전체, 탄성 및 점소성 변형률 속도
 $[\sigma]_n$: 응력 속도

를 나타낸다.

또한

$\langle \phi_n(F) \rangle = 0$: 항복이 일어나지 않았을 때
 $= 1$: 항복이 일어났을 때

한편 Euler 적분공식에 의하면 시간 t_{n+1} 에서의 변형률은 다음과 같다.

$$[\varepsilon_{vp}]_{n+1} = [\varepsilon_{vp}]_n + [\varepsilon_{vp}]_n \cdot \Delta t \dots\dots\dots (5)$$

여기서 Δt 는 시간 간격을 나타낸다.

2. 기하학적 비선형

기하학적 비선형성을 고려하기 위해 변형 전 초기형상과 일치하는 전체 라그랑지안 좌표계를 선택하면 변형률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\varepsilon]_n = [\varepsilon_L]_n + [\varepsilon_{NL}]_n \dots\dots\dots (6)$$

여기서 $[\varepsilon_L]_n = \sum_{i=1}^m [B_{Li}] [d_i]_n$: 선형 변형률
 $\dots\dots\dots (7)$

$[\varepsilon_{NL}]_n = \frac{1}{2} [A_\theta]_n \theta_n$: 비선형 변형률
 $\dots\dots\dots (8)$

$\theta_n = \sum_{i=1}^m [G_i] [d_i]_n$: 변위경사
 $\dots\dots\dots (9)$

여기서 $[G_i]$: 형상함수의 미분 항으로 표시된다.

위의 식을 사용하면 식(6)의 변형률은 다음과 같다.

$$[\varepsilon]_n = \sum_{i=1}^m \left[[B_{Li}]_n + \frac{1}{2} [B_{NLi}]_n \right] [d_i]_n \dots\dots\dots (10)$$

여기서 비선형 변형률-변위 행렬 $[B_{NLi}]_n$ 은 식(11)과 같다.

$$[B_{NLi}]_n = [A_\theta]_n [G_i] \dots\dots\dots (11)$$

3. 동적 해석

동하중을 받는 구조물의 임의시간 t_n 에서의 평형방정식은 다음과 같다.

$$[M] \{\ddot{d}\}_n + [C] \{\dot{d}\}_n + \{P\}_n = \{F\}_n \dots\dots (12)$$

여기서 [M] : 질량 행렬
 [C] : 감쇠 행렬
 $\{P\}_n$: 저항 절점력 벡터
 $\{F\}_n$: 절점 외력 벡터
 $\{\dot{d}\}_n$: 절점 가속도 벡터
 $\{d\}_n$: 절점 속도 벡터

중양차분법을 이용하면 시간 t_n 에서의 가속도 및 속도는 다음과 같이 계산된다.

$$\{\ddot{d}\}_n \simeq \{a\}_n = \frac{1}{(\Delta t)^2} [\{d\}_{n+1} - 2\{d\}_n + \{d\}_{n-1}] \dots\dots\dots (13)$$

$$\{\dot{d}\}_n \simeq \{v\}_n = \frac{1}{2\Delta t} [\{d\}_{n+1} - \{d\}_{n-1}] \dots\dots\dots (14)$$

여기서 Δt : 시간 간격

식(13)과 식(14)를 식(12)에 대입한 후 간단히 쓰면 다음과 같다.

$$\{d\}_{n+1} = f(\{d\}_n, \{d\}_{n-1}) \dots\dots\dots (15)$$

즉 임의의 시간 $t_n + \Delta t$ 에서의 변위는 시간 t_n 및 t_{n-1} 에서의 변위의 항으로 주어진다.

4. 감쇠

일반으로 선형탄성의 문제에서 감쇠에 관한 정보는 대단히 제한적으로만 알려져 있으며 특히 비선형의 경우에는 감쇠에 관한 유효한 자료는 거의 없는 실정이다. 따라서 감쇠행렬은 질량 행렬과 강성도 행렬에 비례한다고 가정하는 것이 관례화 되어있다.¹¹⁾ 즉

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \dots\dots\dots (16)$$

로서 나타내고 이것을 Rayleigh damping 이라고 한다. 중앙차분법에서 $\beta = 0$ 로하여 근사화 시킨다. 본 연구에서는 감쇠효과를 무시하였다.

5. 형상불완전

형상불완전을 갖는 평면 원호 아치의 형상 및 불완전형상은 Fig. 1과 같다.

여기서 h 는 아치의 중앙에서의 높이이고 L 은 아치의 지간이다. 또한 $w_i(x, t)$ 는 임의시간 t 에서의 형상불완전 값이다. 한편 $w_i(x, 0)$ 는 초기 형상불완전 값이다. 실제로 형상불완전의 크기 및 형상에 관한 자료는 거의 없지만 $L/1,000 \sim L/5,000$ 의 범위 내에서 추정하고 있다.⁹⁾

본 연구에서 아치의 형상불완전은 식(17)과 같은 고차 다항식 또는 식(18)과 같은 정현곡선으로 가정한다.

$$w_i = w_o(1 - (2x/L)^m)^n \dots\dots\dots (17)$$

여기서 w_o : 아치의 정점에서 초기 최대 형상불완전 값

x : 아치의 대칭축으로부터의 거리

L : 아치지간

m : 형상불완전의 모드를 결정하는 상수로서 본 논문에서는 2를 취하였다.

n : 형상불완전의 모드를 결정하는 상수로서 본 논문에서는 3을 취하였다.

$$w_i = w_o \sin(n\pi x/L) \dots\dots\dots (18)$$

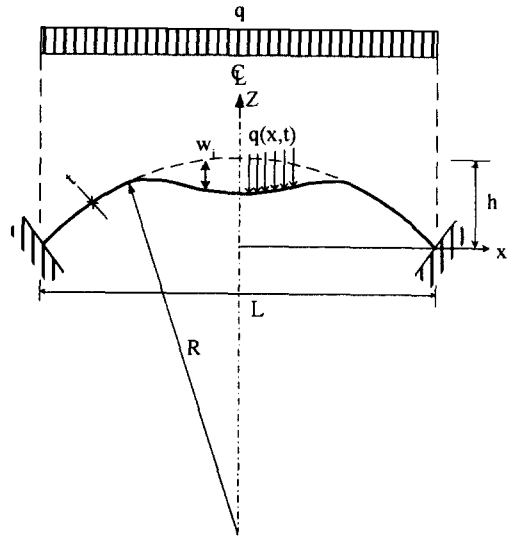


Fig. 1 Geometry of the plane circular arch with the shape imperfection

여기서 w_o : 아치의 정점에서의 초기 최대 형상불완전 값

x : 아치의 좌단으로부터의 거리

L : 아치의 지간

n : 형상불완전의 모드를 결정하는 상수로서 1(대칭모드) 또는 2(역 대칭모드)를 취하였다.

III. 프로그램의 검증

본 연구에서 개발된 프로그램의 적용성을 알아보기 위하여 양단 고정 보의 중앙에 집중하중이 작용하는 경우의 동적 거동을 해석하고 그 결과를 문헌(10)과 비교하였다. 본 예제는 프로그램의 검증이 목적이므로 문헌(10)의 모델을 그대로 사용하였으며 재료성질과 하중도 동일하게 하였다.

Mcnamara는 중앙차분법을¹⁰⁾ 사용하여 최대 변위 0.9(in.)를 그리고 동일 문제에 대해서 Mondkar¹⁰⁾는 5개의 8-절점 등매개변수 요소로서 분할된 유한요소 해석으로 0.77(in.) 얻었다. 본 연구에서 개발된 프로그램을 이용하고 5개의 요소로서 분할한

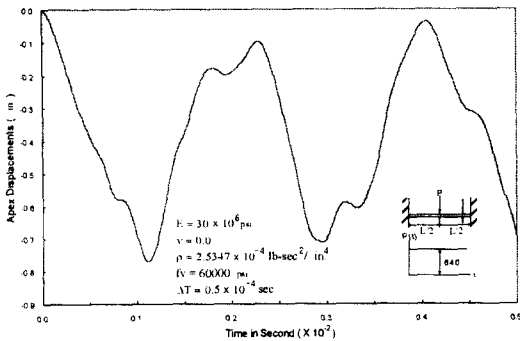


Fig. 2 Time response of vertical displacement of the clamped beam

해석결과에 의하면 Fig. 2에 나타난 바와 같이 최대 변위는 0.768(in)로서 Mondkar⁽¹⁰⁾의 결과와 일치되었다.

IV. 해석 예 및 고찰

필자에 의해서 개발된 프로그램을 모델 케이스로서 선정된 Fig. 3과 같은 강재 평면원호 아치가 형상불완전을 갖고 등분포 단계하중(uniformly distributed step load)을 받는 경우 동적 거동을 해석하였다. 모델 구조물의 요소의 분할은 원호 아치를 각도 방향으로 20 등분 두께 방향으로 3등분하였으며 사용된 재료의 성질은 Table 1과 같다. 이때 아치의 단면은 한국표준 I-150×75 강재를 사용하는 것으로 하였다.

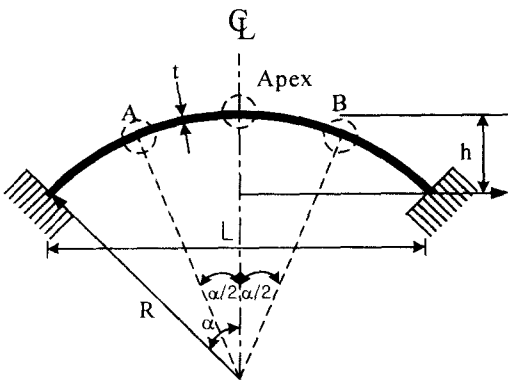


Fig. 3 Geometry of the plane circular arch

Table 1 The dimension and properties of circular arch

internal radius	$R = 6.0 \sim 12.0$ m
thickness of arch	$t = 0.15$ m
semi angle	$\alpha = 22.62 \sim 90.0$ degree
elastic modulus	$E = 2.1 \times 10^4$ tf/m ²
Poisson ratio	$\nu = 0.3$
yield stress	$f_y = 40,000$ tf/m ²
mass density	$\rho = 0.801$ tf-sec ² /m ⁴
step distributed pressure	$q = 1.0$ tf/m ²
yield criterion	Von Mises

먼저 아치높이/아치지간(h/L)의 비에 따른 아치의 동적 거동을 알아보기 위하여 아치높이/아치지간의 비를 0.1~0.5로 변화시킨 경우 아치 중앙에서의 동적 거동은 Fig. 4와 같다.

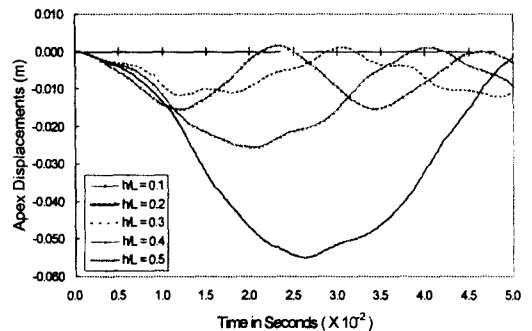


Fig. 4 Time response of vertical displacement at apex of arch due to arch rise to arch span ratio

아치높이/아치지간 비의 값이 0.2일 때 피크에서의 변위가 가장 작게 나타났으며 0.2보다 크거나 작은 경우 피크에서의 변위가 점차로 증가하였고 특히 0.3이상이면 피크에서의 변위의 증가가 현저하였고 0.5일 때(반원형 아치) 최대 변위는 5.5(cm)이었다. 그러나 아치의 진동주기는 아치높이/아치지간 비의 값이 증가함에 따라 지연되었다. 같은 지간을 갖는 보의 경우 최대 변위는 32.1(cm)로서 너무 과대한 변위 값을 나타냈다. 이들의 결과로부터 아치높이/아치지간의 비는 0.1~0.3 사이의 아치가 구조적으로 안정할 것으로 판단된다. 이는 문헌(7)의 포물선 아치 결과와도

일치된다.

아치지간에 따른 동적 거동을 알아보기 위하여 아치높이/아치지간의 비를 0.2로 하고 아치지간을 6m~14m로 변화시킨 경우 아치 중앙에서의 변위의 동적 거동은 Fig. 5와 같다. 그림에서 보는 바와 같이 아치지간이 작은 경우 진동주기가 짧게 나타났으며 아치지간이 길어짐에 따라 주기는 점차로 길어지고 변위의 값도 현저히 증가하였다.

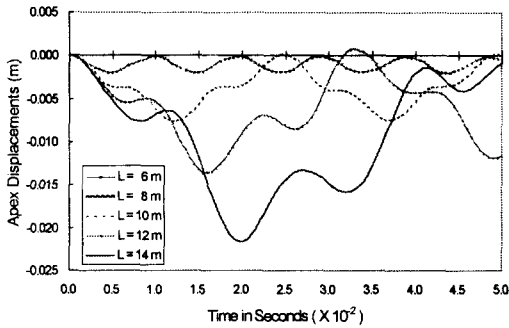


Fig. 5 Time response of vertical displacement at apex of arch due to arch span

작용하중의 크기가 아치의 동적 거동에 미치는 영향을 알아보기 위하여 하중의 값을 0.5t~4.0t까지 변화시킨 경우 아치 중앙에서의 동적 거동은 Fig. 6과 같다. 하중이 증가함에 따라 변위는 증가되었지만 진동주기나 변위 모드에 미치는 영향은 거의 없었다.

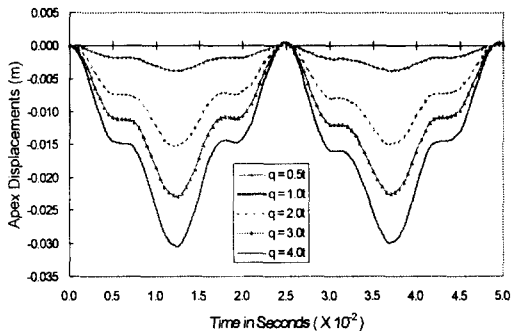
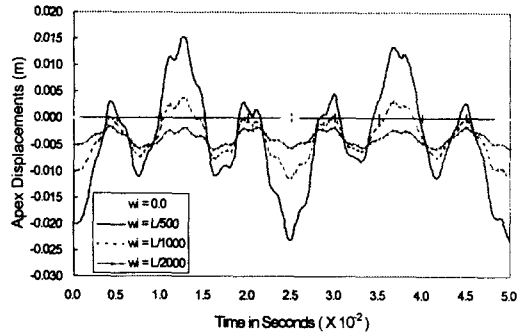
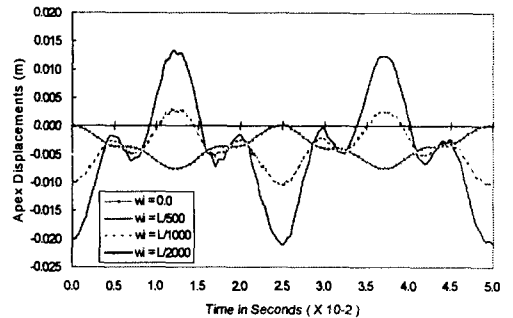


Fig. 6 Time response of vertical displacement at apex of arch due to load



(a) sinusoidal shape imperfections



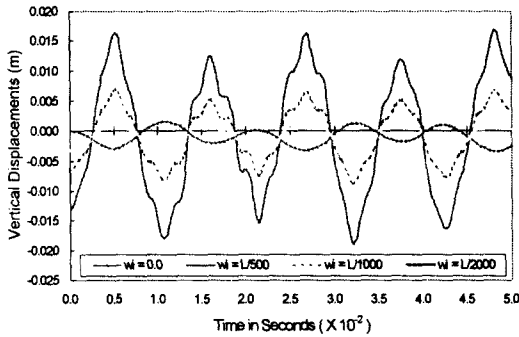
(b) higher degree polynomial shape imperfections

Fig. 7 Time response of vertical displacement at apex of arch due to symmetric shape imperfection

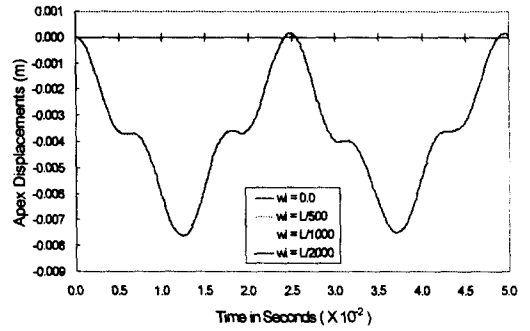
형상불완전에 따른 아치의 동적 거동을 알아보기 위하여 아치 중앙에서의 대칭 최대 형상불완전의 값을 $L/500$, $L/1,000$ 및 $L/2,000$ 으로 하여 해석한 결과를 그림으로 나타내면 Fig. 7과 같다.

Fig.7에서 보는 바와 같이 형상불완전을 갖는 경우 변위의 진폭은 현저히 증가하고 진동주기는 짧아졌다. 그러나 형상불완전의 크기를 달리 하였을 경우 최대 및 최소 변위의 크기는 차이가 낮지만 진동 주기는 거의 동일하였다. 즉 형상불완전의 값이 최대 및 최소 변위에 미치는 영향은 크게 나타났지만 진동 주기에 미치는 영향은 찾을 수 없었다. 특히 형상불완전의 값이 $L/2,000$ 인 경우 피크에서의 변위의 차가 현저히 감소되었다.

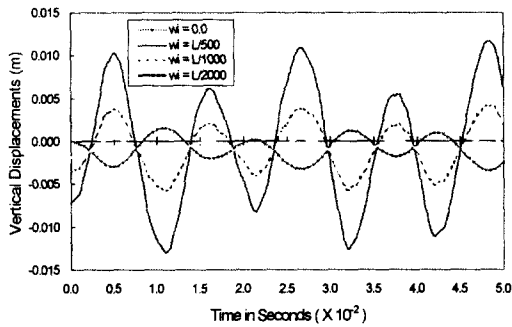
또 Fig. 7(a) 및 Fig. 7(b)를 서로 비교하면 형상불완전의 형태에 따른 동적거동은 응답곡선의 진동주기는 동일하였으나 피크에서의 변위의 크기



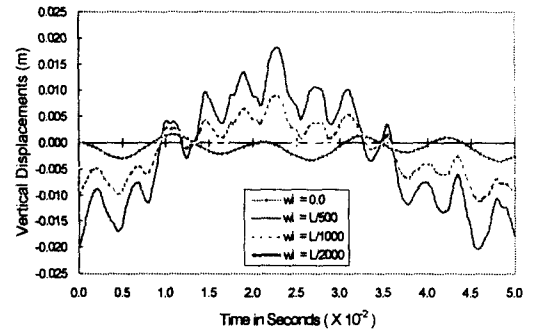
(a) sinusoidal shape imperfections



(a) at Apex



(b) higher degree polynomial shape imperfections



(b) at A

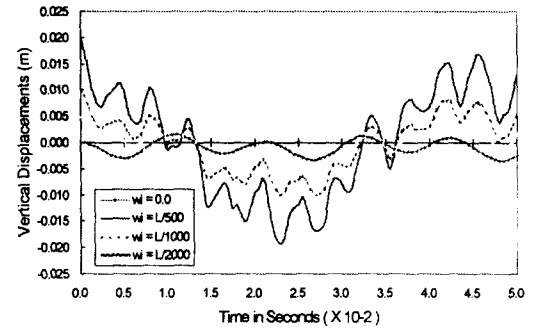
Fig. 8 Time response of vertical displacement at A of arch due to symmetric shape imperfections

는 형상불완전을 정현곡선으로 가정한 경우 변위의 최대값이 2.34cm이었고 고차다항식의 경우 2.11cm로서 정현곡선으로 가정한 경우 약간 크게 평가 되었다.

한편 아치의 4등분점에서의 변위의 동적 거동은 Fig. 8과 같다.

아치 중앙의 동적 거동과 마찬가지로 형상불완전의 값이 아치의 4등분점의 변위의 진폭에 미치는 영향은 크게 나타났지만 진동주기에 미치는 영향은 거의 없었다.

역대칭 형상불완전을 갖는 경우 아치의 동적 거동은 Fig.9와 같으며 아치 중앙에서의 거동은 형상 결함이 없는 경우와 완전하게 동일하게 나타났다.



(c) at B

Fig. 9 Time response of vertical displacement of arch due to antisymmetric shape imperfections

아치 중앙 좌우의 4등분점에서의 아치의 동적 거동은 서로 역으로 나타났으며 변위의 최대값은 최대 초기 형상결함을 갖는 4등분점에서 발생되었다. 대칭 형상결함을 갖는 경우와 종합하여 볼 때 아치의 동적 거동에서 변위의 최대값은 초기 최대

형상결함을 갖는 위치에서 발생하는 것을 알 수 있다. 구체적으로 대칭 형상결함(L/500)을 갖는 경우와 비교하면 대칭 형상 결함의 경우 0.0249초에서 최대값(절대치) 2.34cm이었으며 역대칭의 경우에는 0.0232초에서 1.95cm이었다. 즉 초기 형상불완전 값이 같을 때 대칭의 경우에 변위값이 크게 나타났지만 발생 시간은 약간 지연되었다.

V. 결 론

본 연구에서는 동하중을 받는 강재 아치가 형상불완전을 갖는 경우 이를 고려하여 해석할 수 있는 프로그램이 개발되었다. 프로그램의 개발에 있어서 아치의 형상불완전은 $w_i = w_o(1 - (2x/L)^m)^n$ 으로 주어지는 고차다항식과 $w_i = w_o \sin(n\pi x/L)$ 으로 주어지는 정현곡선으로 가정하였다. 유한요소 정식화에서 탄-점소성 모델에 의해서 재료비선형 효과를 고려하고 기하학적 비선형 효과는 전체 라그랑지안 좌표계에 의해서 고려하였다. 또한 강재의 거동은 Von Mises 항복 기준을 적용하여 모델링 하였다. 개발된 프로그램을 중앙에 집중하중이 작용하는 양단 고정정보의 동적 해석에 적용하여 적용성을 검증하였다. 모델 케이스로 선정된 강재 아치가 형상불완전을 갖는 경우의 동적응답 해석에 적용한 몇 가지의 수치 예를 제시하였다. 수치 예에서 형상불완전의 값은 L/500, L/1,000 및 L/2,000으로 하였으며 형상불완전의 모드는 대칭 및 역대칭을 고려하였다. 이러한 수치 예를 통하여 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 아치높이/아치지간의 비는 0.1~0.3 사이의 아치가 구조적으로 바람직한 것으로 판단된다.
2. 작용하중의 크기가 아치의 진동주기 및 응답패턴에 미치는 영향은 거의 없었다.
3. 형상불완전이 있는 경우 아치 중앙단면에서 진동주기는 현저히 짧아졌으며 진폭은 크게 나타났다. 그러나 형상불완전의 크기가 응답곡선의 최대 및 최소 변위에 미치는 영향은 크게 나타났지만 진동주기에 미치는 영향은 거의 없었다.

4. 형상불완전의 형태를 정현곡선으로 가정한 경우와 고차다항식으로 가정한 경우 응답곡선의 진동주기는 동일하였으나 피크에서의 크기는 정현곡선으로 가정한 경우 약간 큰 것으로 평가되었지만 큰 차이는 없었다.

5. 역대칭 형상불완전을 갖는 경우 아치 중앙의 동적 거동은 완전 아치의 경우와 동일하였다. 그러나 대칭 형상불완전을 갖는 경우에 최대 변위값은 역대칭의 경우보다 크게 나타 났지만 최대값에 도달되는 시간은 약간 지연되었다.

이 논문은 2000년도 전남대 연구년교수 연구비 지원에 의하여 연구하였음

참 고 문 헌

1. 조진구, 1998, 초기처짐을 갖는 Spherical Shell의 동적 특성에 관한 연구(I), 한국농공학회지, 제40권 제3호, pp. 113-121.
2. 조진구, 1998, 초기처짐을 갖는 Spherical Shell의 동적 특성에 관한 연구(II), 한국농공학회지, 제40권 제5호, pp. 91-99.
3. 조진구, 1999, 초기결함을 갖는 철근 콘크리트 축대칭 셸의 동적 특성, 한국농공학회지, 제41권 제4호, pp. 77-85.
4. 최창근, 노혁천, 1999, 철근콘크리트 냉각탑의 바람하중에 의한 동적거동, 한국농공학회지, 제3권 제1호, 1999, pp. 99-109.
5. 허택녕, 오순택, 1994, 평면 원호 아치의 좌굴 해석을 위한 동적 비선형 해석 프로그램의 개발, 한국전산구조공학회지, 제7권, 제1호, pp. 69-80.
6. Austin, Walter J., et al., 1982, Numerical Bending Analysis of Arches, Journal of the structural division, ASCE, Vol 108, No. ST4, pp. 849-867.
7. Austin, Walter J. and Timothy J. Ross, 1976,

- Elastic Buckling of Arches under symmetric loading, Journal of the structural division, ASCE, Vol. 102, No. st5, pp. 1085-1095.
8. Howard B. Harrison, 1982, In-Plane Stability of Parabolic Arches, Journal of the structural division, ASCE, Vol. 108, No. ST1., pp. 195-205.
 9. Komatsu, Sadao and Tatsuro Sakimoto, 1977, Ultimate Load Carrying Capacity of Steel Arches, Journal of the structural division, ASCE, Vol. 103, No. ST12, pp. 2323-2336.
 10. Mondkar and G. H. Powell, 1977, Finite Element Analysis of Nonlinear Static and Dynamic Response, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 499-520.
 11. Owen, D. R. J. and E. Hinton, 1980, Finite elements in plasticity
 12. Robert Kao, 1978, Dynamic buckling of axisymmetric spherical caps with initial imperfections, Pergamon, Computer & Structures, vol.9, pp. 463-473.
 13. Robert Kao, 1980, Nonlinear dynamics buckling of spherical caps with initial imperfections, Pergamon, Computer & Structures, vol.12, pp. 49-63.
 14. Wood R.D. and O.C. Zienkiewicz, 1977, Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells, Pergamon, Computer & Structures, vol.7, pp. 725-735.