

입력 광파면 왜곡에 따른 광학계 성능

김연수[†] · 김현숙 · 최세철 · 김창우

국방과학연구소 기술연구본부-1-3

④ 305-600 대전시 유성우체국 사서함 35-5호

이윤우 · 송재봉

한국표준과학연구원 양자연구부

④ 305-340 대전시 유성구 도룡동 1번지

김병윤

한국과학기술원 물리학과

④ 305-701 대전시 유성구 구성동 373-1번지

(2001년 2월 19일 받음, 2001년 5월 14일 수정본 받음)

입력 광파면 왜곡에 따른 광학계의 성능을 Strehl 비로 분석하였다. 입력 광파면의 왜곡을 저주파 왜곡과 고주파 왜곡으로 구분하여 결상면에서의 Strehl 비를 구하고, 광학계의 성능을 저하시키지 않는 입력 광파면 왜곡의 광축상에서의 진폭을 정량적으로 구하였다.

분류코드 : SM.010, SM.020.

I. 서 론

광학장비의 결상성능은 diffraction MTF 나 Strehl 비로 표시할 수 있다.^[1] 광학 렌즈 또는 거울의 표면 형상오차등에 기인한 MTF 성능 저하는 이론적으로 알려져 있으며,^[2,3] 입사동에서의 위상변조를 통하여 초분해능 광학계를 개발하는 연구도 활발히 진행되고 있다.^[4]

헬기에 장착되어 야간 표적 획득 시스템으로 사용되고 있는 전방관측 적외선 열상장치는 볼 내부에 장착되며, 적외선 통과창으로서 이용되는 Ge 원도우를 통하여 외부 영상을 획득한다. 따라서 획득된 영상의 질은 원도우에 의해서도 영향을 받게 된다. 이와 같은 광학계는 대기에 의해 영향을 받는 대구경 적응 광학계와 마찬가지로 입사 광파면의 왜곡을 갖는 광학계로 근사할 수 있다.

본 논문에서는 입력 광파면 왜곡을 갖는 광학계의 성능을 Strehl 비로 분석하였다. 입력 광파면의 왜곡을 저주파 왜곡과 고주파 왜곡으로 구분하여 결상면에서의 Strehl 비를 구하고, 광학계의 성능을 저하시키지 않는 입력 광파면 왜곡의 광축상에서의 진폭을 정량적으로 구하였다.

II. 원도우 왜곡에 따른 광로차

그림 1과 같이 평면 파면을 갖는 평행광선이 왜곡된 원도우에 입사한다고 가정하자. 원도우의 왜곡에 의하여 경사변위가 일어난 P 지점에 입사한 광이 상대적으로 경사가 없는 기준

지점에 대하여 갖게 되는 광로차(OPD:optical path difference)는 다음과 같이 구해진다.

$$OPD = (n - 1)d \left(1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right) \quad (1)$$

여기서 n, d 는 원도우의 굴절율과 두께이다. θ 는 원도우 경사각인 입사각이며, 굴절각 θ' 는 $\sin \theta' = n \sin \theta$ 로 부터 구해진다. 원도우 통과 후, 출력 광파면은 원도우의 왜곡 주파수의 2배 주파수를 갖는 광파면 왜곡을 나타내며, 평행광선으로 진행하게 된다. 따라서 광선 추적에 의해 설계된 광학계의 설계성능은 변함이 없고, 광학성능의 저하는 광파면의 왜곡으로 인한 회절효과에 의해 야기된다. 회절효과에 의해 나타나는 결상면상의 점 Q 에서의 광 강도분포 $U(Q)$ 는 다음 식과 같이 표현된다.^[5]

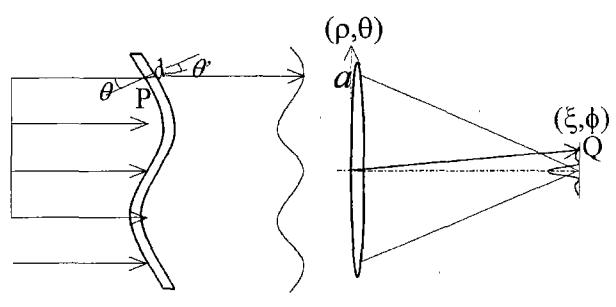


그림 1. 원도우 왜곡에 기인한 광파면 왜곡.

[†]E-mail: ykim@sunam.kreonet.re.kr

$$U(Q) = C \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{iOPD} e^{-ik\rho\xi \cos(\theta-\phi)} \rho d\rho d\theta \quad (2)$$

여기서 OPD 는 광파면의 왜곡으로 인한 광로차이다. ρ 와 θ 는 원도우 좌표에서의 반경 및 방위각 변수이며, ξ 와 ϕ 는 결상면 좌표에서의 반경 및 방위각 변수를 나타낸다. a 는 원도우 구경, $k = 2\pi/\lambda$ 이며 λ 는 적외선 광파장이다.

III. 광파면 왜곡에 따른 광학성능

3.1. 저주파 왜곡

광파면은 일반적으로 Zernike 함수들의 조합으로 나타낼 수 있다. defocus 형태의 경우, 광축에서의 진폭을 σ 라면 광파면은 $\sigma(2\rho^2 - 1)$ 으로 나타낼 수 있다. 이때 광학계의 Strehl 비는

$$SR = \frac{\left[\int_0^1 J_0(0) e^{ik\sigma(2\rho^2 - 1)} \rho d\rho \right]}{\left[\int_0^1 J_0(0) \rho d\rho \right]^2} \quad (3)$$

로 구해진다. 마찬가지로 3차 구면수차, 3차 코마, 3차 비점수차를 갖는 광파면일 경우, 광학계의 Strehl 비를 구하면 그림 2와 같다. 반경 ρ 만의 함수인 defocus나 구면수차 형태를 갖는 입력 광파면에 기인한 Strehl 비는 광축상에서의 광파면 진폭이 커짐에 따라 진동하며 감쇄하는 반면, 방향성 성분 θ 를 포함하고 있는 비점수차나 코마 형태의 입력 광파면의 경우는 단순 감쇄함을 알 수 있다. 광학계가 회절한계 성능을 가지려면 Strehl 비가 0.8 이상이어야 한다. 따라서 광학계의 성능을 저하시키지 않는 입력 광파면 왜곡의 광축상에서의 진폭의 크기는 defocus 형태일 경우 0.13λ , 3차 구면수차 형태일 경우 0.17λ , 3차 코마 형태일 때 0.21λ , 3차 비점수차 형태일 때 0.18λ 이하이어야 함을 알 수 있다. 또 그림 2에서 보면 Strehl 비 0.2 이상에서는 반경 ρ 의 성분을 포함하는 파면성이 주로 Strehl 비에 영향을 줄을 알 수 있다. 따라서 고주파 왜곡을 갖는 입력 광파면에 기인한 광학계의 Strehl 비를 구할 때, 고주파 왜곡의 광파면은 반경 ρ 만의 함수로 근사할 수 있다. 입력 광파면 왜곡이 반경에만 의존하는 회전대칭성

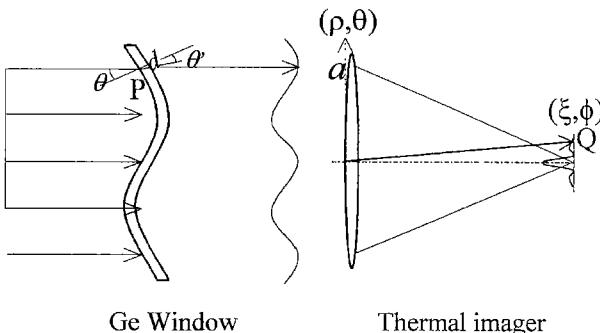


그림 2. 저주파 왜곡을 갖는 광파면에 기인한 광학계 Strehl 비.

을 가지는 함수이거나 직교 좌표계에 의존하는 공간주파수 함수로 나타낼 수 있는 경우, Strehl 비는 식 (2)로부터 비교적 간단히 계산할 수 있다.

3.2. 고주파 왜곡

앞에서 기술한 바와 같이 광학계의 Strehl 비가 반경의 성분을 갖는 입력 광파면 왜곡에 의해 주로 영향을 받는 점을 고려하면, 고주파 왜곡을 갖는 광파면은 왜곡을 반경이나 직교 좌표계만의 공간 주파수 함수로 근사적으로 나타낼 수 있다.

왜곡이 반경에만 의존하는 경우, 왜곡된 광파면을 반경 ρ 에 대한 cosine 함수로 표현하면, 식 (2)로부터 광 강도분포 $U(Q)$ 는

$$U(Q) = C \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-ik[\rho\xi \cos(\theta-\phi) + \sigma \cos(\kappa\rho)]} \rho d\rho d\theta \quad (4)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 σ 는 광장단위로 표시한 광파면 왜곡의 진폭을 나타내고, κ 는 공간주파수를 나타낸다. 다음의 Bessel 관계식

$$\int_0^{2\pi} e^{iu \cos \theta} d\theta = 2\pi J_0(u) \quad (5)$$

을 이용하여, 식 (4)를 다시 쓰면

$$U(Q) = 2\pi C \int_0^a J_0(k\rho\xi) e^{ik\sigma \cos(\kappa\rho)} \rho d\rho \quad (6)$$

이 된다. 여기서는 결상면에서의 회전 대칭성을 이용하여 $\phi = 0$ 으로 취하였다. 그림 3과 같은 광파면 모드를 가정하면 공간주파수 $\kappa = n\pi/2a$, ($n = 1, 2, 3, \dots$)가 된다.

식 (6)을 $\kappa = n\pi/2a$ 에 대하여 풀면

$$U(Q) = 2\pi C \int_0^a J_0(k\rho\xi) e^{ik\sigma \cos(n\pi\rho/2a)} \rho d\rho \quad (7)$$

이 된다. 따라서 cosine 함수를 갖는 광파면 왜곡으로 인하여 나타나는 광학적 성능을 Strehl 비로 표현하면

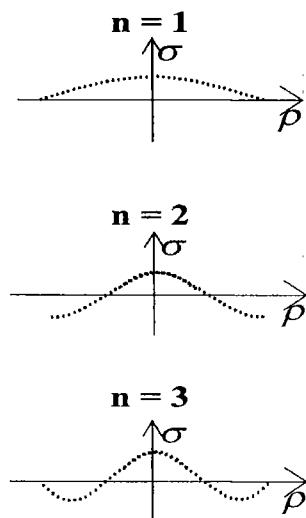


그림 3. 회전 대칭성(또는 직교 좌표계) 광파면 모드.

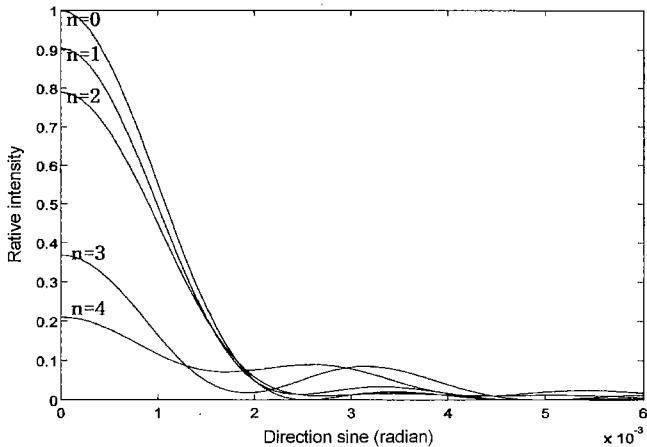


그림 4. 회전 대칭성 cosine 함수를 갖는 광파면에 기인한 광강도 분포.

$$SR(\sigma, n) = \frac{\left[\int_0^1 J_0(0) e^{ik\sigma \cos(n\pi\rho/2)} \rho d\rho \right]^2}{\left[\int_0^1 J_0(0) \rho d\rho \right]^2} \quad (8)$$

가 된다. 여기서 σ 는 광축상에서 광파면 왜곡의 진폭, n 은 cosine 함수의 공간주파수 모드 번호를 나타낸다. 식 (8)을 이용하면 광파면 왜곡의 진폭 및 주파수에 따라 Strehl 비를 구할 수 있다.

그림 4는 왜곡의 진폭이 $\lambda/4$ 일 때, 공간 주파수 모드 $n=1, 2, 3, 4$ 인 회전 대칭성 cosine 파면함수에 의한 결상면의 광강도 분포를 보여준다. 광축상에서의 상대적 광강도가 공간 주파수 모드가 커짐에 따라 크게 줄어듬을 알 수 있다.

그림 5는 광파면 왜곡의 진폭 및 공간 주파수에 따른 Strehl 비를 보여준다. 여기서 공간 주파수는 원도우의 반경에 대하여 정준화된 주파수이다. 동일 진폭의 왜곡에 대하여 주파수 모드 n 이 홀수인 모드가 짝수 모드보다 Strehl 비가 높게 나타나며, $n > 20$ 이상이면 두 모드가 동일해짐을 알 수 있다. Strehl 비가 0.8 이상인 조건은 $n=1$ 일 때 광파면 왜곡의 진폭은 0.26λ , $n=2$ 일 때 0.13λ , $n=3$ 일 때 0.16λ , $n=4$ 일 때 0.105λ , $n=5$ 일 때 0.11λ 이다. $n=1$ 일 때 광파면 왜곡은 0.13λ 만큼 하향 이동하면 $n=2$ 일 때의 광파면 왜곡형태와 유사하며 요구되는 진폭 또한 0.13λ 가 된다. 또 앞에서 구한

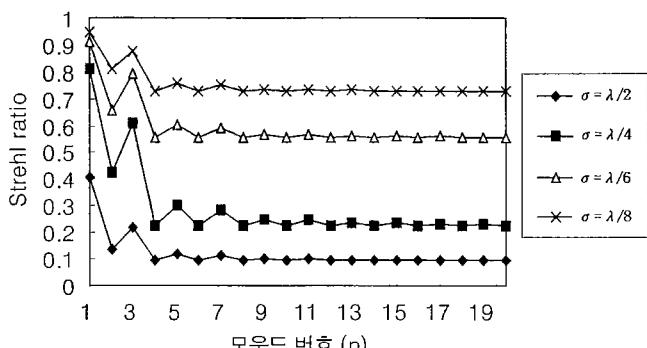
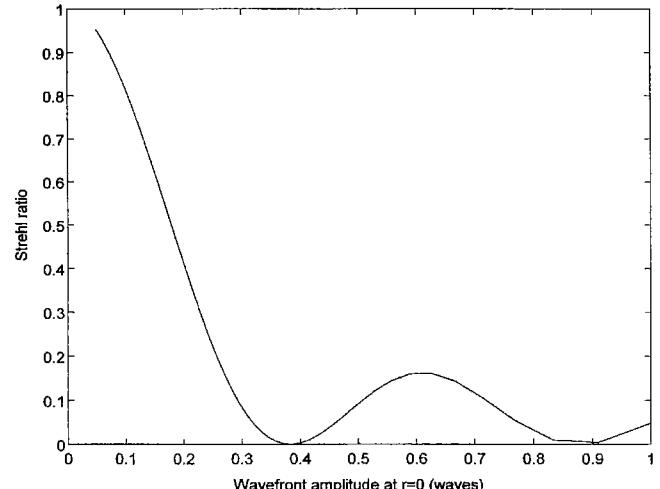


그림 5. 광파면 왜곡의 진폭 및 주파수 모드에 따른 Strehl 비.

그림 6. 고주파($n = 20$) 광파면 왜곡의 진폭에 따른 Strehl 비.

defocus와 3차 구면수차 형태의 광파면 왜곡은 $n=1$ 및 $n=3$ 일때의 광파면 왜곡과 형태가 유사하며 Strehl 비가 0.8 이상이 되기 위한 광파면 왜곡의 진폭도 비슷하다.

그림 6은 모드 $n=20$ 일 때 광파면 왜곡의 진폭에 따른 Strehl 비를 보여준다. Strehl 비는 진폭에 따라 회절무늬 패턴을 보여주며 0.4λ 근처나 0.9λ 근처에서 0 값을 나타낸다. Strehl 비가 0.8 이상이려면 광파면 왜곡의 진폭은 0.11λ 이하이어야 한다.

광파면 왜곡을 회전 대칭성을 갖는 cosine 함수들로 근사할 경우, 즉 광파면 왜곡 $f(\rho)$ 를

$$f(\rho) \approx \sum_n a_n \cos(n\pi\rho/2) \quad (9)$$

로 근사하면, Strehl 비는

$$SR \approx \sum_n SR(a_n, n) \quad (10)$$

으로 나타낼 수 있다. 따라서 입력 광파면 왜곡이 광학계에 미치는 성능저하는 각 공간주파수 성분의 진폭과 주파수에 따른 Strehl 비의 합으로 나타낼 수 있다.

광파면 왜곡이 직교 좌표계에 의존하는 함수일 때, 광파면은 직교 좌표계의 공간주파수 함수로 나타낼 수 있다. 우선 원도우는 한변의 길이가 $2a$ 인 정사각형으로 가정하고, 정사각형안에서의 광파면을 그림 3과 같이 y 축의 공간주파수 모드를 갖는 cosine 함수로 나타내어 보자. 이때 결상면상의 점 Q 에서의 광강도진폭 $U(Q)$ 는

$$U(Q) = 2aC \int_{-a}^a e^{ik[y \sin \xi + \sigma \cos(\kappa y)]} dy \quad (11)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 σ 는 광장단위로 표시한 형상오차의 진폭을 나타내고, κ 는 y 축 방향으로 변길이 a 로 정준화된 공간주파수를 나타낸다. 식 (11)은

$$U(Q) = 2aC \int_{-a}^a e^{iky \sin \xi} [\cos\{k\sigma \cos(\kappa y)\} + i \sin\{k\sigma \cos(\kappa y)\}] dy \quad (12)$$

로 다시 쓸 수 있고, 다음의 Bessel 방정식

$$\cos\{k\sigma\cos(ky)\} = J_0(k\sigma) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_{2s}(k\sigma) \cos(2s\kappa y) \quad (13)$$

$$\sin\{k\sigma\cos(ky)\} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}(k\sigma) \cos\{(2s+1)\kappa y\} \quad (14)$$

을 써서 식 (12)를 다시 쓰면

$$U(Q) = 2aC \int_{-a}^a e^{iky\sin\xi} \left[J_0(k\sigma) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_{2s}(k\sigma) \cos(2s\kappa y) \right. \\ \left. + 2i \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}(k\sigma) \cos\{(2s+1)\kappa y\} \right] dy \quad (15)$$

이 된다. 식 (15)의 첫째항은

$$\int_{-a}^a e^{iky\sin\xi} J_0(k\sigma) dy = 2aJ_0(k\sigma) \frac{\sin\beta}{\beta} \quad (16)$$

이 되며, 둘째항의 팔호안의 적분은

$$\int_{-a}^a e^{iky\sin\xi} \cos(2s\kappa y) dy = \int_{-a}^a [\cos(ky\sin\xi) + i\sin(ky\sin\xi)] \cos(2s\kappa y) dy \\ = \frac{\sin(k\sin\xi - 2s\kappa)a}{(k\sin\xi - 2s\kappa)} + \frac{\sin(k\sin\xi + 2s\kappa)a}{(k\sin\xi + 2s\kappa)} \quad (17)$$

가 된다. 여기서 $\beta = k\sin\xi$ 이다. 공간 주파수 $\kappa = n\pi/2a$ 를 식 (17)에 대입하여 풀면, 둘째항과 셋째항은 각각

$$\int_{-a}^a e^{iky\sin\xi} [2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_{2s}(k\sigma) \cos(2s\kappa y)] dy \\ = 4a \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_{2s}(k\sigma) \frac{\beta \sin\beta \cos(sn\pi)}{[\beta^2 - (sn\pi)^2]} \quad (18)$$

$$\int_{-a}^a e^{iky\sin\xi} \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}(k\sigma) \cos\{(2s+1)\kappa y\} \right] dy \\ = 4a \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}(k\sigma) \frac{-\left(sn\pi + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\beta \sin\left(sn\pi + \frac{n\pi}{2}\right)}{\left[\beta^2 - \left(sn\pi + \frac{n\pi}{2}\right)^2\right]} \quad (19)$$

가 된다. 따라서 사각형 원도우의 회절무늬 패턴 식 (12)는 식 (16), (18), (19)로부터

$$U(Q, n) = (2a)^2 C \frac{\sin\beta}{\beta} \left[J_0(k\sigma) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_{2s}(k\sigma) \frac{\cos(sn\pi)}{[1 - (sn\pi/\beta)^2]} + \right. \\ \left. 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}(k\sigma) \frac{\left(\frac{\cot\beta}{\beta}\right) \sin\left(sn\pi + \frac{n\pi}{2}\right)}{\left[1 - \left(\frac{sn\pi + \frac{n\pi}{2}}{\beta}\right)^2\right]} \right] \quad (20)$$

로 얻어진다. 여기서 $U(Q, n)$ 은 정사각형내에서 직교 좌표계의 cosine 함수 모드 n 의 왜곡을 갖는 광파면에 의해 결상면상의 점 Q 에서의 광 강도분포를 나타낸다. 식 (20)의 $\sin\beta/\beta$ 은 사각형 입사동의 회절패턴을 나타내며, 팔호안은 내부의 파면왜곡에 의한 효과를 나타낸다. 따라서 팔호안의 파면왜곡 효과는 원형 입사동에 대하여도 유사하게 적용될 수 있다. 파면왜곡이 없을 경우, 사각형 입사동의 광 강도분포 $U(Q, 0)$ 는

$$U(Q, 0) = (2a)^2 C \frac{\sin\beta}{\beta} \quad (21)$$

이므로 광축상에서 Strehl 비는

$$SR = \left[\frac{U(0, n)}{U(0, 0)} \right]^2 \\ = \left\{ J_0(k\sigma) + 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+1}(k\sigma) \frac{\sin(sn\pi + n\pi/2)}{(sn\pi + n\pi/2)} \right\}^2 \quad (22)$$

가 된다. 식 (22)는 y 축만의 공간주파수 성분을 갖는 사각형원도우의 광파면 왜곡에 의한 Strehl 비를 나타낸다. 그럼 7은 광파면 왜곡의 진폭 및 공간 주파수에 따른 Strehl 비를 보여준다. 여기서 공간 주파수는 정원사각형 원도우의 직경에 대하여 정준화된 주파수이다. 맨 안쪽에 있는 그래프가 주파수 모드 n 이 짝수일 때의 Strehl 비를 나타내며, 이때 식 (22)의 팔호안 두 번째 항은 0° 된다. 모드가 홀수일 때는 모드 수가 증가할수록 그래프는 안쪽으로 향하게 되며, 식 (22)의 두 번째항의 영향이 약해진다. Strehl 비가 0.8 이상인 조건은 $n=1$ 일 때 광파면 왜곡의 진폭은 0.24λ , $n=2$ 이상일 때는 0.11λ 가 된다. 앞에서와 마찬가지로 $n=1$ 일 때 광파면 왜곡을 0.12λ 만큼 하향 이동하면 $n=2$ 일 때의 광파면 왜곡형태와 유사하며 요구되는 진폭 또한 0.12λ 가 된다. 따라서 Strehl 비가 0.8 이상이려면 직교 좌표계에 의존하는 광파면 왜곡의 진폭은 0.12λ 정도 이하이어야 함을 알 수 있다.

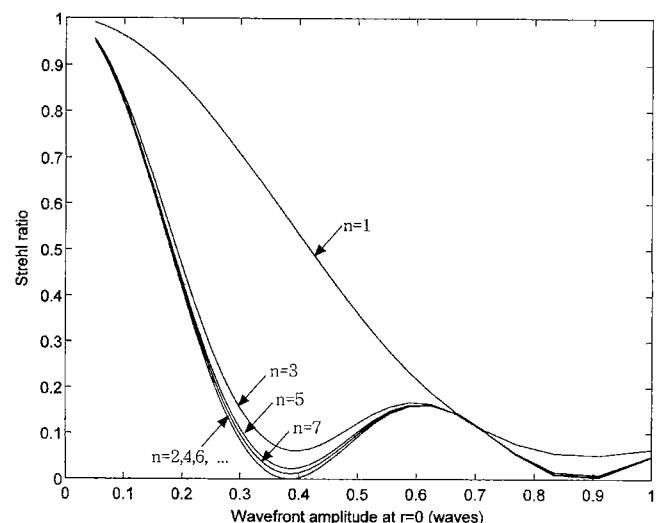


그림 7. 광파면 왜곡의 진폭 및 주파수 모드에 따른 Strehl 비.

IV. 결 론

입력 광파면 왜곡에 따른 광학계의 성능을 Strehl 비를 통하여 분석하였다. 광학계의 성능을 저하시키지 않는 입력 광파면의 왜곡은 저주파 왜곡일 경우, 광축상에서의 광파면 왜곡의 진폭의 크기는 광파면이 defocus 형태일 경우 0.13λ , 3차 구면수차 형태일 경우 0.17λ , 3차 코마 형태일 때 0.21λ , 3차 비점수차 형태일 때 0.18λ [9]하 이어야 한다. 반경에 의존하는 고주파 왜곡에 의한 Strehl 비는 공간주파수 모드에 따라 다르며, 공간 주파수 모드 수 $n > 20$ 이상에서는 거의 변화가 없음을 알 수 있다. 또 직교 좌표계에 의존하는 왜곡의 경우, 광학계 성능저하에 영향을 주지 않는 Strehl 비 0.8 근처의 광축상에서의 왜곡의 진폭은 0.11λ 정도로 공간 주파수 모드 수에 거의 무관함을 알 수 있었다. 이를 고려하면 광파면 형상왜곡에 의한 광학성능의 분석 및 측정은 공간 주파수 모드

$n=20$ 정도까지로 제한해도 무리가 없음을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon press, 1975).
- [2] R. Bhatia and A. Ciani, "Defining mirror quality: a global approach," *Proc. SPIE*, vol. 2199, 1994.
- [3] J. W. Figoski, "Design and tolerance specification of a wide field, three mirror, unobscured, high resolution sensor," *Proc. SPIE*, vol. 1049, 1989.
- [4] 이영철, 정창섭, 박성종, 이윤우, "광학계의 위상변조 조건에 따른 중심강도 변화," *한국광학회지*, vol. 11, no. 2, 2000.
- [5] M. Daniel and M. Zacarias, *Handbook of Lens Design* (Optical Engineering, vol. 44), Marcel Dekker, 1994.

Optical performance depending on the input wavefront distortion

Yeon Soo Kim[†], Hyun Sook Kim, Se Chol Choi, and Chang Woo Kim

Agency for Defence Development, Taejon 305-600, KOREA

[†]E-mail: ykim@sunam.kreonet.re.kr

Yun Woo Lee and Jae Bong Song

Korea Research Institute of Standards and Science, Taejon 305-600, KOREA

Byoung Yoon Kim

Department of Physics, Korea Institute of Science and Technology, Taejon 305-600, KOREA

(Received February 19, 2001 ; Revised manuscript received May 14, 2001)

Optical performance depending on the input wavefront distortion is analyzed in terms of Strehl ratio. The amplitude of wavefront distortion at the optic axis that gives the system diffraction limited optical performance is described quantitatively from the analysis of the Strehl ratio, which is obtained at the image plane using the input wavefront that is characterized by low and high spatial frequency.

Classification codes : SM.010, SM.020.