韓 國 國 防 經 營 分 析 學 會 誌
第 27 券, 第 1 號, 2001. 7. 2.

수송문제에서 다수 퇴화 최적해와 민감도분석
(Multiple Degenerate Optimal Solutions and Sensitivity Analysis of Transportation Problem)

민계료*,김회**

Abstract

A transportation problem may have multiple optimal solutions, if an optimal solution to the problem is degenerate. This study derives a condition, under which multiple degenerate optimal solutions exist, from a current degenerate optimal transportation tableau by utilizing the homogeneous equation obtained from the closed loops connecting degenerate basic variable and non-basic variables, and discusses a method of generating alternative degenerate optimal solutions and their associated transportation tableaus.

Each degenerate optimal solution may not have the same range of feasibility in sensitivity analysis on supply and demand quantity due to different set of shadow prices which multiple degenerate solutions have.

* 국방대학교 교수, 운영분석

** 국방대학교 운영분석전공 졸업(2000년도)

1. 서　론

LP문제에서 다수 퇴화 최적해가 존재하면 각각의 퇴화 최적해에서 계수행렬과 기저행렬이 다르게 형성하므로, 각 최적해의 잠재가치와 우변항의 실행가능범위는 상이할 수 있다. 그러므로 수송문제가 다수 퇴화 최적해를 갖는다면, 잠재가치와 공급량과 수요량에 대한 민감도분석의 결과는 유일하지 않을 수 있다.

Charnes[2]와 Lee[4]는 3차원 공간에서 LP문제의 퇴화해는 3개의 독립 벡타로 구성된 두 개의 집합(기저벡타)으로 형성되는 2개의 인접된 삼각형의 경계선상을 우변 항이 통과하는 경우에 발생된다는 것을 그림으로 제시하였다. 그리고 Lee[4]는 LP문제의 최적해가 퇴화되는 경우에, 다수 퇴화 최적해가 존재하는 조건, 다른 퇴화 최적해를 도출하는 절차 그리고 각각의 퇴화 최적해에서 우변항의 민감도분석에 대하여 연구하였다.

본 연구에서는 ① 퇴화 최적해를 갖는 수송문제에서 퇴화 기저변수와 비기저 변수간의 폐쇄경로(closed loop)로부터 동차방정식(homogeneous equation)을 유도하고, 이를 이용하여 다수 퇴화 최적해가 존재하는 조건을 설정하고, ② 다수 퇴화 최적해가 존재하는 경우에 다른 최적해를 산출하는 절차를 제시한다. ③ 그리고 각각의 퇴화 최적해는 상이한 잠재가치의 값을 갖기 때문에, 공급량과 수요량에 대한 민감도분석에서 서로 다른 실행가능범위, 그리고 이에 따라 상이하게 변동되는 최적해 값과 목적함수 값을 가질 수 있음을 분석한다.

2. 수송문제에서 다수 퇴화 최적해

2.1 다수 퇴화 최적해의 존재조건

공급지 i ($i = 1, 2, \dots, m$)에서 수요지 j ($j = 1, 2, \dots, n$)까지 수송하는데 소요되는 비용을 $c_{i,j}$, 각공급지에서의 공급량을 s_i ,각수요지에서의 수요량을 d_j라고 하면 <표 1>과 같은 수송표를 작성할 수 있다.

<표 1> 수송표

수요지 / 공급지	1	2	…	n	공급량
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	s_m
수요량	d_1	d_2	…	d_n	

이를 선형계획문제로 표시하면 아래와 같이된다.

$$\text{Minimize } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{모든 } i, j$$

위에 (1)식에서 실행가능 기저해를 심플렉스방법으로 향상시키기 위해서는 비기저변수의 수정비용(reduced cost), $c_j - z_j$ 값을 알아야 한다. 이 값은 심플렉스표를 이용하여 구할 수도 있으나 수정배분법을 이용하면 용이하게 구할 수 있다.

i번째 공급지의 제약식에 해당하는 심플렉스 승

수(쌍대변수 또는 잠재가치)를 u_i 그리고 j번째 수요지의 제약식에 해당하는 승수(쌍대변수 또는 잠재가치)를 v_j라고 정의하면, 이들 쌍대변수의 값들을 먼저 구해야 한다.

그리고 이 쌍대변수 값들을 이용하여 비기저변수의 수정비용, $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - u_i - v_j$을 계산한다. 그리고 수송모형은 최소화문제이므로 계산된 수정비용 중에서 가장 큰 음수를 갖는 비기저변수가 도입변수가 된다.

그런데 도입변수에 수송량을 할당하려면 먼저 디딤돌방법(stepping stone method)을 이용하여 이 비기저변수와 기저변수로 구성되는 폐쇄경로를 찾아야 한다. 그리고 이 폐쇄경로에 있는 기저변수의 값들이 비음조건을 만족하는 범위에서 최대로 할당할 수 있는 량을 구한다. 이 값이 바로 도입변수에 할당되는 수송량이 된다. 이때에 수송량이 0이 되는 기저변수가 탈락변수가 된다.

이와 같은 방법을 반복적으로 사용하여 모든 비기저변수의 수정비용이 음이 되지 않으면(도입변수가 없으면), 현재의 실행가능 기저해가 최저해가 된다. 그런데 모든 비기저변수의 수정비용, $\overline{c_{ij}}$ 이 비음인 최적해에서 기저변수가 0값을 갖으면 퇴화 최적해가 된다.

어떠한 경우에 다수의 퇴화 최적해가 존재하는가를 분석한다. 퇴화 최적해가 있는 최적 수송표에서 각각의 비기저변수와 기저변수로 구성되는 폐쇄경로를 찾고, 이 폐쇄경로들에서 비기저변수와 퇴화변수, x_{pq} 와의 관계를 도출하여 동차방정식을 유도한다.

이 동차방정식은 심플렉스표에서 퇴화 기저해가 있는 행에서 구성되는 동차방정식과 동일하다. 이 동차방정식에서 비기저변수들의 계수, a_{ij} 가 음수인 경우에 아래와 같은 집합(set) I 를 정의할 수 있다.

$$I = \{(i,\ j) \mid a_{ij} < 0\} \tag{2}$$

여기에서 a_{ij}는 $-1,\ 0,\ 1$의 값을 갖는다.

집합 I 가 공집합이면, 수송문제는 유일한 퇴화 최적해를 갖고, 공집합이 아니면 둘 이상의 퇴화 최적해를 갖는다. 이때에 퇴화변수 대신에 기저변수가 되는 도입변수, x_{fg} 는 최적성 조건을 만족하기 위하여 (3)과 (4)식에 의하여 선택되어야 한다.

$$\overline{c_{fg}} = \min_{(i,j)\in I} \{\ \overline{c_{ij}}\} \tag{3}$$

$$\overline{c_{fg}} \le \overline{c_{ij}} \tag{4}$$

수송모형에서 최적해가 퇴화해이고, 이 퇴화 최적해로부터 유도된 동차방정식에서 (2)식을 만족하는 a_{ij}가 존재하고, (3)과 (4)식에 의하여 선택되는 도입변수가 있으면, 이 수송모형은 다수 퇴화 최적해를 가질 수 있다. 다음에는 다른 퇴화 최적해를 산출하는 절차를 설명한다.

2.2. 다른 퇴화 최적해의 산출

폐쇄경로는 현 기저변수에 대한 비기저변수의 한계변화를 나타낸다고 볼 수 있다. 이러한 변화는 수송표를 심플렉스표로 전환하면 확인할 수 있으나, 수송표에서 직접 구할 수 있다.

다른 퇴화 최적해의 존재여부를 확인하고, 그 해

를 산출하는 절차를 요약하면 아래와 같다.

<단계1> 최적 수송표에서 디딤돌방법을 이용하여 각각의 비기저변수로 구성되는 폐쇄경로들을 찾는다.

<단계2> 각각의 폐쇄경로들에서 비기저변수와 퇴화 기저변수, x_{pq} 의 관계식으로 부터 동차방정식을 도출한다.

<단계3> 도출된 동차방정식에서 (2), (3) 그리고 (4)식을 만족하는 비기저변수, x_{fg}를 선정하여 도입 기저변수로하고, 퇴화 기저변수, x_{pq}를 탈락변수로 하여 새로운 최적 수송표(다른 퇴화 최적해)를 산출한다.

<단계4> 최적 수송표에서 각각의 쌍대변수(잠재가치)값들을 계산하고, 모든 비기저변수들의 수정비용을 계산하여 최적성을 검토하고 퇴화 최적해인가를 확인한다.

다른 퇴화 최적해에서 비기저변수의 수정비용, $\hat{c}_{ij}$ 와 목적함수 값, $\hat{z}$는 현재의 퇴화 최적해로부터 아래와 같이 계산될 수 있다.

$$\hat{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} - \bar{c}_{fg}\left(\frac{a_{ij}}{a_{fg}}\right) \tag{5}$$

$$\hat{z} = \bar{z} - \bar{c}_{fg}\left(\frac{x_{pq}}{a_{fg}}\right) \tag{6}$$

식(4)에 의하여 $\bar{c}_{ij} \geq \bar{c}_{fg}$ 이고, a_{ij} / a_{fg} 은 동차방정식의 계수이므로 $-1,\ 0,\ 1$ 값을 갖는다. 그러므로 식(5)의 값은 항상 $\hat{c}_{ij} \geq 0$이다. 따라서 다른 퇴화 최적해 역시 최적성 조건을 만족한다. 식(6)에서 $x_{pq} = 0$이기 때문에 $\hat{z} = \bar{z}$ 이다. 즉, 다수 퇴화해는 동일한 목적함수 값을 갖는 최적해이다.

3. 공급량과 수요량에 대한 민감도분석

수송모형에서 공급량 및 수요량에 대한 민감도분석 역시 선형계획모형에서의 우변 항에 대한 민감도분석과 동일하게 이루어진다.

두 개 이상의 퇴화 최적해가 존재하는 경우에는 위에서 분석한바와 같이 기저해가 변경되고 또한 잠재가치 값이 다르기 때문에 각각의 퇴화 최적해에서 공급 및 수요량에 대한 민감도분석을 해야 한다. 즉, 수송문제에서 다수 퇴화 최적해를 갖는 경우에는 각각의 최적해에서 기저변수 그리고 잠재가치의 값이 다르게 존재하므로 공급량 및 수요량의 실행가능범위(변화범위)는 달라진다.

그리고 최적해 값은, 수송비용이 가장 적게 증가하는 변수가 기저변수인 경우에 기저변수의 값은 할당을 받은 △만큼 변화하고, 기타의 기저변수 값은 변동이 없다. 또한 목적함수의 값은 {△×(최소 증가 수송비용)}만큼 증가한다.

한편 수송비용이 가장 적게 증가하는 변수가 비기저변수인 경우에 최적해는, 특정 공급지와 특정 수요지를 연결하는 폐쇄경로를 구성하는 기저변수들의 값은 △만큼 변화하고, 기타 기저변수 값은 변동이 없다. 그리고 목적함수의 값은 {△×(최소 증가 수송비용)}만큼 증가한다.

수송문제가 다수 퇴화 최적해를 갖는 경우에 공급량 및 수요량에 대한 민감도 분석은 각각의 퇴화 최적해에 대하여 공급량과 수요량의 실행가능범위, 최적해 값, 그리고 목적함수 값을 계산하고 비교하여야 올바른 분석이 된다고 볼 수 있다.

4. 수치예제

4.1. 다수 퇴화 최적해

3개의 공급지에서의 공급량, 4개의 수요지에서의 수요량, 그리고 각 공급지에서 각 수요지까지 수송하는데 소요되는 수송비용이 <표 2>과 같은 수송모형을 생각하자.

<표 2> 최초 수송표

수요지 / 공급지	1	2	3	4	공급량
1	[5]	[6]	[3]	[10]	96
2	[6]	[9]	[1]	[5]	70
3	[4]	[6]	[4]	[11]	74
수요량	74	60	50	56	240

<표 2>에 있는 수송문제의 최적해를 구하기 위하여 수정배분법을 이용하면 <표 3>과 같은 실행가능 기저해 즉, 최적해(수송표)를 얻는다.

<표 3> 수정배분법에 의한 최적 수송표

($x_{32}=0$인 퇴화 최적해)

수요지 / 공급지	1	2	3	4	공급량	u_i
1	[5]	[6] 60	[3] 36	[10]	96	0
2	[6]	[9]	[1] 14	[5] 56	70	-2
3	[4] 74	[6] 0	[4]	[11]	74	0
수요량	74	60	50	56	240	
v_j	4	6	3	7		

<표 3>에서 비기저변수의 수정비용 ($\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$)을 계산하면 아래와 같이 된다.

$$\bar{c}_{11} = 5 - 0 - 4 = 1,$$
$$\bar{c}_{14} = 10 - 0 - 7 = 3,$$
$$\bar{c}_{21} = 6 - (-2) - 4 = 4,$$
$$\bar{c}_{22} = 9 - (-2) - 6 = 5,$$
$$\bar{c}_{33} = 4 - 0 - 3 = 1,$$
$$\bar{c}_{34} = 11 - 0 - 7 = 4$$

위에서 계산된 비기저변수의 수정비용이 모두 음수가 아니므로 즉, 도입변수가 없기 때문에 현재의 실행가능 기저해가 최적해이다. 최적해 값은,

$$x_{12} = 60,\ x_{13} = 36,\ x_{23} = 14,$$
$$x_{24} = 56,\ x_{31} = 74,\ x_{32} = 0,$$
$$x_{11} = x_{14} = x_{21} = x_{22} = x_{33} = x_{34} = 0$$

이고, 목적함수 값 $\bar{z} = 1058$이다. 그러나 기저변수 중에 $x_{32} = 0$ 이 있으므로 위의 해는 퇴화 최적해이다.

<표 2>의 수송문제가 다수의 퇴화 최적해를 가지고 있는가를 알아보기 위하여 <표 3>의 최적 수송표에 있는 각각의 비기저변수와 기저변수로 구성되는 폐쇄경로를 찾는다.

각각의 폐쇄경로에서 비기저변수와 퇴화 기저변수인 $x_{pq} = x_{32}$와의 관계를 도출하면 다음과 같이된다.

$\triangle x_{11} = 1\,(\triangle x_{32})$, $\triangle x_{14} = 0\,(\triangle x_{32})$,
$\triangle x_{21} = 1\,(\triangle x_{32})$, $\triangle x_{22} = 0\,(\triangle x_{32})$,
$\triangle x_{33} = -1\,(\triangle x_{32})$, $\triangle x_{34} = -1\,(\triangle x_{32})$

위의 관계를 이용하여 비기저변수와 퇴화 기저변수간의 동차방정식을 다음과 같이 생성한다.

$$\begin{aligned} x_{32} &= x_{11} + 0x_{14} + x_{21} + 0x_{22} - x_{33} - x_{34} \\ &- x_{11} - 0x_{14} - x_{21} - 0x_{22} + x_{32} \\ &+ x_{33} + x_{34} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

동차방정식에서 음의 계수를 갖는 비기저변수가 없고 그 비기저변수의 수정비용이 음수가 아니면, 수송문제는 유일한 퇴화 최적해를 갖는다. 그렇지 않으면 다수 최적해를 갖는다고 볼 수 있다.

(2)식을 이용하여, (7)식에서 비기저변수의 계수 (a_{ij})가 음수인 집합 I를 구성하면 아래와 같이된다.

$$I = \{(1,1), (2.1)\} \tag{8}$$

(7)식에서 음의 계수를 갖는 비기저변수가 2개이므로, 퇴화변수 대신에 기저변수로 되는 도입변수. x_{fg}을 결정하기 위하여 (2)식을 이용한다. 즉,

$$\bar{c}_{fg} = \min_{(i,j)\in I}\{\bar{c}_{11} = 1,\ \bar{c}_{21} = 4\} = \bar{c}_{11}$$

그리고 $\bar{c}_{11} = 1$은 (4)식에 의하여 <표 3>에 있는 모든 비기저변수들의 수정비용보다 적거나 같으므로 $x_{fg} = x_{11}$이 도입변수가 된다.

<표 3>에서 퇴화변수인 x_{32}를 탈락변수로 하고 x_{11}를 도입변수로 하는 새로운 다른 퇴화 최적해 (수송표)를 작성하면 <표 4>와 같이 된다.

<표 4> 다른 최적 수송표 ($x_{11} = 0$인 다른 퇴화 최적해)

수요지 / 공급지	1	2	3	4	공급량	u_i
1	[5] 0	[6] 60	[3] 36	[10]	96	0
2	[6]	[9]	[1] 14	[5] 56	70	-2
3	[4] 74	[6]	[4]	[11]	74	-1
수요량	74	60	50	56	240	
v_j	5	6	3	7		

<표 4>에서 비기저변수들의 수정비용을 계산하면 아래와 같이 된다.

$$\hat{c}_{14} = 10 - 0 - 7 = 3,$$
$$\hat{c}_{21} = 6 - (-2) - 5 = 3$$
$$\hat{c}_{22} = 9 - (-2) - 6 = 5,$$
$$\hat{c}_{32} = 6 - (-1) - 6 = 1$$
$$\hat{c}_{33} = 4 - (-1) - 3 = 2,$$
$$\hat{c}_{34} = 11 - (-1) - 7 = 5$$

위에서 계산된 비기저변수의 수정비용이 모두 비음이므로 역시 최적해가 된다. 즉, 다른 퇴화 최적해 값은

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 60,\ x_{13} = 36,\ x_{23} = 14,$$
$$x_{24} = 56,\ x_{31} = 74,$$
$$x_{14} = x_{21} = x_{22} = x_{32} = x_{33} = x_{34} = 0$$

이고, 목적함수 값 $\hat{z} = 1058$ 이다. 이 값은 <표 3>의 목적함수 값과 동일하다. 그러나 기저변수 $x_{11} = 0$이 있기 때문에 위의 최적해도 <표 3>과 동일하게 역시 퇴화 최적해이다.

$x_{11} = 0$인 퇴화 최적해를 가진 <표 4>에서 또 다른 퇴화 최적해가 있는가를 알아보기 위하여 <표 4>에 있는 각각의 비기저변수와 기저변수로 구성되는 폐쇄경로를 찾고, 각각의 폐쇄경로에서 비기저변수와 퇴화변수인 x_{11}과의 관계를 도출하여 동차방정식을 유도하면 아래와 같이 된다.

$$x_{11} - 0x_{14} + x_{21} - 0x_{22} - x_{32} - x_{33} - x_{34} = 0$$

그리고 (2)식을 이용하여 비기저변수의 계수가 음수인 집합 I을 구성하면

$$I = \{(3,2), (3,3), (3,4)\}$$

이 되고, 도입변수를 결정하기 위하여 (3)식을 이용하면

$$\hat{c}_{fg} = \min_{(i,j) \in I} \{ \hat{c}_{32} = 1, \ \hat{c}_{33} = 2, \ \hat{c}_{34} = 5 \} = \hat{c}_{32}$$

이 되고, $\hat{c}_{32} = 1$는 (4)식에 의하여 <표 4>에 있는 모든 비기저변수들의 수정비용보다 적거나 같으므로 x_{32}가 도입변수가 된다.

새로이 선정된 x_{32}을 도입변수로 하고 퇴화변수인 x_{11}을 탈락변수로 하여 작성되는 퇴화 최적해(수송표)는 <표 3>과 같이 된다. 즉, 예제의 수송문제는 2개의 퇴화 최적해를 갖는다.

4.2. 공급량과 수요량에 대한 민감도분석

<표 3>과 <표 4>에서 보는 바와 같이 2개의 다른(다수) 퇴화 최적해에서 기저변수가 변경되고, 또한 쌍대변수 즉, 잠재가치의 값이 다르다. 여기서 잠재가치는 공급량 및 수요량의 단위당 변화에 대한 목적함수 값(총 수송비용)의 상대적 변화량을 의미한다. 그러므로 동일한 수송문제에서 각각의 퇴화 최적해에서 갖는 공급량 및 수요량의 실행가능범위, 그에 따른 최적해의 값, 그리고 목적함수의 값이 달라질 수 있다.

(1) <표 3>의 퇴화 최적해에서 공급지 1의 공급량 (s_1)이 △만큼 증가되는 경우

공급지 1에서 공급량이 △만큼 증가되는 경우 수요지 3에서 △만큼 증가하는 것이 수송비용을 가장 적게 증가시킬 수 있다. 즉, x_{13}에 △만큼 증가하는 것이 가장 경제적이다.

그런데 x_{13}은 기저변수이고, 기저변수의 값이 비음이어야 하므로 △의 변화 범위는 $-36 \le \Delta$ $(36 + \Delta \ge 0)$이 된다. 따라서 공급지 1의 공급량 (s_1)의 실행가능범위는 $60 \le s_1 \le \infty$이 된다. 이때 최적해에서 다른 기저변수의 값은 변동이 없고, x_{13}만이 $x_{13} = 36 + \Delta$으로 변동된다. 또한 목적함수 값은 $1058 + 3\Delta$이 된다.

(2) <표 4>의 퇴화 최적해에서 공급지 1의 공급량 (s_1)이 △만큼 증가되는 경우

공급지 1에서 공급량이 △만큼 증가되는 경우 수요지 3에서 △만큼 증가하는 것이 수송비용을 가장 적게 증가시킬 수 있다. 즉, x_{13}에 △만큼 증가하는 것이 가장 경제적이다.

그런데 x_{13}은 기저변수이고, 기저변수의 값이 비음이어야 하므로 △의 변화 범위는 $-36 \leq \triangle$ ($36 + \triangle \geq 0$)이 된다. 따라서 공급지 1의 공급량 (s_1)의 실행가능범위는 $60 \leq s_1 \leq \infty$이 된다. 이때 최적해에서 다른 기저변수의 값은 변동이 없고, x_{13}만이 $x_{13} = 36 + \triangle$으로 변동된다. 또한 목적함수 값은 $1058 + 3\triangle$이 된다.

(1)과 (2)에서 분석된 바와 같이 공급지 1의 공급량이 △만큼 증가하는 경우에는 <표 3>과 <표 4>의 실행가능범위, 변동되는 최적해의 값, 그리고 변동되는 목적함수 값은 동일하다.

(3) <표 3>의 퇴화 최적해에서 수요지 1의 수요량 (d_1)이 △만큼 증가되는 경우

수요지 1에서 수요량이 △만큼 증가되는 경우 공급지 2에서 △만큼 증가하는 것이 수송비용을 가장 적게 증가시킬 수 있다. 즉, x_{21}에 △만큼 증가하는 것이 가장 경제적이다.

그런데 x_{21}은 비기저변수이므로 x_{21}에 직접 수송량을 증가시킬 수 없다. 이러한 경우에는 디딤돌방법을 이용하여 <표 5>과 같이 수요지 1에서 공급지 2까지의 폐쇄경로를 구성하여 기저변수에 수송량을 증가시킬 수 있다. <표 5>에서 증감 할당을 받은 기저변수의 값은 비음이어야 하므로 아래와 같은 조건을 만족해야 한다.

$$74 + \triangle \geq 0,\ 0 - \triangle \geq 0,$$
$$60 + \triangle \geq 0,\ 36 - \triangle \geq 0,$$
$$14 + \triangle \geq 0$$

<표 5> 수요지 1의 수요량(d_1)이 △만큼 증가한 경우에 폐쇄경로 구성($x_{32} = 0$인 퇴화 최적해)

수요지 공급지	1	2	3	4	공급량	u_i
1	5	6 60+△	3 36-△	10	96	0
2	6	9	1 14+△	5 56	70+△	-2
3	4 74+△	6 0-△	4	11	74	0
수요량	74+△	60	50	56	240+△	
v_j	4	6	3	7		

그러므로 △의 변화 범위는 $-14 \leq \triangle \leq 0$이 된다. 즉, 수요지 1의 수요량($d_1$)의 실행가능범위는 $60 \leq d_1 \leq 74$이 된다. 이때 최적해는

$$x_{12} = 60 + \triangle,\quad x_{13} = 36 - \triangle,$$
$$x_{23} = 14 + \triangle,\quad x_{24} = 56,$$
$$x_{31} = 74 + \triangle,\quad x_{32} = 0 - \triangle$$

이 되고, 목적함수 값은 $1058 + 2\triangle$이 된다.

(4) <표 4>의 퇴화 최적해에서 수요지 1의 수요량 (d_1)이 △만큼 증가되는 경우

수요지 1에서 수요량이 △만큼 증가되는 경우 공급지 2에서 △만큼 증가하는 것이 수송비용을 가장 적게 증가시킬 수 있다. 즉, x_{21}에 △만큼 증가하는 것이 가장 경제적이다.

그런데 x_{21}은 비기저변수이므로 x_{21}에 직접 수송량을 증가시킬 수 없다. 이러한 경우에는 디딤돌 방법을 이용하여 <표 6>과 같이 수요지 1에서 공급지 2까지의 폐쇄경로를 구성하여 기저변수에 수송량을 증가시킬 수 있다.

<표 6> 수요지 1의 수요량(d_1)이 △만큼 증가한 경우에 폐쇄경로 구성 ($x_{11} = 0$인 퇴화 최적해)

수요지 \ 공급지	1	2	3	4	공급량	u_i
1	[5] 0+ △	[6] 60	[3] 36- △	[10]	96	0
2	[6]	[9]	[1] 14+ △	[5] 56	70+△	-2
3	[4] 74	[6]	[4]	[11]	74	-1
수요량	74+△	60	50	56	240+△	
v_j	5	6	3	7		

<표 6>에서 증감 할당을 받은 기저변수의 값은 비음이어야 하므로 아래와 같은 조건을 만족해야 한다.

$$0 + \triangle \geq 0,\ 36 - \triangle \geq 0,\ 14 + \triangle \geq 0$$

그러므로 △의 변화 범위는 $0 \leq \triangle \leq 36$이 된다. 즉, 수요지 1의 수요량(d_1)의 실행가능범위는 $74 \leq d_1 \leq 110$ 이 된다. 이때 최적해는

$$x_{11} = 0 + \triangle,\quad x_{12} = 60,$$
$$x_{13} = 36 - \triangle,\quad x_{23} = 14 + \triangle,$$
$$x_{24} = 56,\quad x_{31} = 74,$$

이 되고, 목적함수 값은 $1058 + 3\triangle$이 된다.

(3)과 (4)에서 분석된 바와 같이 수요지 2의 수요량이 △만큼 증가되는 경우에는 <표 3>과 <표 4>의 퇴화 최적해에서 실행가능범위, 변동되는 최적해의 값 그리고 변동되는 목적함수의 값이 서로 다르다.

위와 같은 방법으로 <표 3>($x_{32} = 0$인 경우)과 <표 4>($x_{11} = 0$인 경우)의 최적 수송표에 있는 각각의 공급지와 수요지에서 공급량과 수요량이 △만큼 증가되는 경우에 실행가능범위와 목적함수의 값을 계산하면 <표 7>과 같이 정리된다.

<표 7>에서 보는 바와 같이 예제의 수송문제에서 공급지 3의 공급량(s_3)과 수요지 1의 수요량(d_1)이 △만큼 증가하는 경우에 <표 3>($x_{32} = 0$)과 <표 4>($x_{11} = 0$)의 퇴화 최적해가 갖는 실행가능범위 그리고 그에 따른 목적함수의 값이 서로 다르다.

<표 7> 공급량과 수요량의 실행가능범위와 목적함수 값의 비교

최적해 및 종류 / 공급 및 수요량	$x_{32}=0$인 퇴화 최적해		$x_{11}=0$인 퇴화 최적해	
	실행가능 범위	목적 함수 값	실행가능 범위	목적 함수 값
공급량 1 (s_1)	$60 \le s_1 \le \infty$	$1058+3\Delta$	$60 \le s_1 \le \infty$	$1058+3\Delta$
공급량 2 (s_2)	$56 \le s_2 \le \infty$	$1058+1\Delta$	$56 \le s_2 \le \infty$	$1058+1\Delta$
공급량 3 (s_3)	$74 \le s_3 \le 134$	$1058+3\Delta$	$38 \le s_3 \le 74$	$1058+2\Delta$
수요량 1 (d_1)	$60 \le d_1 \le 74$	$1058+2\Delta$	$74 \le d_1 \le 110$	$1058+3\Delta$
수요량 2 (d_2)	$46 \le d_2 \le 96$	$1058+4\Delta$	$46 \le d_2 \le 96$	$1058+4\Delta$
수요량 3 (d_3)	$36 \le d_3 \le \infty$	$1058+1\Delta$	$36 \le d_3 \le \infty$	$1058+1\Delta$
수요량 4 (d_4)	$0 \le d_4 \le \infty$	$1058+5\Delta$	$0 \le d_4 \le \infty$	$1058+5\Delta$

그러므로 수송문제가 퇴화 최적해를 가지면 최적 수송표에서 다수 퇴화 최적해가 존재하는지 확인할 필요가 있으며, 다수 퇴화 최적해가 존재하는 경우에는 잠재가치(쌍대변수)의 값이 동일하지 않고, 따라서 각각의 퇴화 최적해에서 공급량과 수요량에 대한 민감도분석에서 실행가능범위, 그리고 그에 따라 변동되는 최적해의 값과 목적함수 값이 서로 다를 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 수송문제에서 최적해가 퇴화해일 경우에 최적 수송표에서 다수 퇴화 최적해가 존재하는 조건을 설정하고, 다수 퇴화 최적해가 존재하는 경우에 다른 최적해를 유도하는 절차를 제시하였다. 그리고 각각의 퇴화 최적해는 상이한 잠재가치를 갖기 때문에 수요량 및 공급량에 대한 민감도분석에서 서로 다른 실행가능 범위를 가질 수 있고, 이에 따라 상이하게 변동되는 최적해 값과 목적함수 값을 가질 수 있음을 분석하였다.

퇴화 최적해를 갖는 수송문제가 다수 퇴화 최적해를 갖는지의 여부를 판단하기 위하여, 우선 퇴화 최적해가 있는 최적 수송표에서 각각의 비기저변수와 기저변수로 구성되는 폐쇄경로를 찾고, 이 폐쇄경로들로부터 비기저변수와 퇴화변수와의 관계를 도출하여 동차방정식을 유도한다. 이 동차방정식에서 음의 계수를 갖는 비기저변수가 존재하면 둘 이상의 퇴화 최적해를 가질 수 있다. 한편 이 동차방정식에서 음의 계수를 갖는 비기저변수가 없으면 유일한 퇴화 최적해를 갖는다.

유도된 동차방정식에서 음의 계수를 갖는 비기저변수가 다수 존재하는 경우에 최소의 수정비용 값을 갖는 비기저변수를 도입변수로 하고 퇴화변수를 탈락변수로 하여 다른 퇴화 최적해를 산출할 수 있다.

수송문제가 다수 퇴화 최적해를 갖는 경우에 각각의 퇴화 최적해는 상이한 기저변수를 갖고 따라서 잠재가치의 값이 서로 다르다. 각각의 퇴화 최적해의 공급량 및 수요량에 대한 민감도분석에서 실행가능 범위, 그리고 그에 따라 변동되는 최적해의 값과 목적함수의 값은 상이할 수 있다.

수치예제에서 수송문제의 최적해가 퇴화된 경우에 다른 퇴화 최적해의 존재여부를 확인하고, 그 퇴화 최적해를 산출하였다. 그리고 2개의 퇴화 최적해가 있는 경우에 공급량과 수요량의 민감도분석에서 실행가능범위, 그에 따라 변동되는 최적해의 값과 목적함수 값이 서로 상이할 수 있다 것을 예시하였다.

參 考 文 獻

[1] 김 회, "수송문제에서 다수 퇴화 최적해와 민감도분석에 관한 연구", 석사학위논문, 국방대학교, 2000.

[2] Charnes, A., " Optimality and Degeneracy in Linear Programming ", *Econometrica*, Vol. No. 20, April, 1952, pp.160-170

[3] Dantzig, George B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963, pp.160-166

[4] Lee, K. S., " Degenerate Optimal Solutions and the Range of Feasibility," INFORMS Philadelphia 1999 Meeting, 1999.

[5] Winston, Wayne L., *Operations Research*, Duxbury Press, 1994, pp.160-163