

## GBAM 모델을 위한 새로운 설계방법

### A New Design Method for the GBAM (General Bidirectional Associative Memory) Model

박주영 · 임채환 · 김혜연\*

Joo-young Park, Chae-hwan Leem and Hye-yeon Kim\*

고려대학교 제어계측공학과

\* 삼성전자 소프트웨어센터 HCI 파트

#### 요 약

본 논문은 GBAM(general bidirectional associative memory) 모델을 위한 새로운 설계방법을 제시한다. GBAM 모델에 대한 이론적 고찰을 바탕으로, GBAM 기반 양방향 연상 메모리의 설계 문제가 GEVP(generalized eigenvalue problem)로 불리는 최적화 문제로 표현될 수 있음을 밝힌다. 설계 과정에서 등장하는 GEVP 문제들은 최근에 개발된 내부점 방법에 의하여 주어진 허용 오차 이내에서 효과적으로 풀릴 수 있으므로, 본 논문에서 확립된 설계 절차는 매우 실용적이다. 제안된 설계 절차에 대한 적용 가능성은 관련 연구에서 고려되었던 간단한 설계 예제를 통하여 예시된다.

#### Abstract

This paper proposes a new design method for the GBAM (general bidirectional associative memory) model. Based on theoretical investigations on the GBAM model, it is shown that the design of the GBAM-based bidirectional associative memories can be formulated as optimization problems called GEVPs (generalized eigenvalue problems). Since the GEVPs arising in the procedure can be efficiently solved within a given tolerance by the recently developed interior point methods, the design procedure established in this paper is very useful in practice. The applicability of the proposed design procedure is demonstrated by simple design examples considered in related studies.

**Key Words** : GBAM, GEVP, Associative memories, Optimization.

#### 1. 서 론

피드백 시스템(feedback system) 구조를 지닌 신경망의 상태 벡터(state vector)는, 시스템의 초기조건(initial condition vector)이 평형점(equilibrium point)의 흡인영역(domain of attraction) 내부에 존재할 경우, 시간이 경과함에 따라 그 평형점을 향해 수렴하게 되는 동적 특성을 지니게 된다. 이와 같은 특성은 정보의 처리 과정에서 매우 유용한 역할을 할 수 있으므로, 관련 분야에 활용하고자 하는 모색이 일찍부터 있어 왔다[1,2,3,4]. 신경망 기반 연상 메모리(neural associative memories)는, 이러한 모색 과정에서 가장 유망한 분야로 여겨져 온 연구 주제 중 하나이다[2,5]. 신경망에 기반을 둔 연상 메모리 시스템은, 기억시켜야 할 정보인 원형 패턴들(prototype patterns)을 특정한 주소를 갖는 메모리 공간에 저장하지 아니하고, 회상(recall) 과정에서 시스템이 이들을 올바르게 기억해낼 수 있도록 시스템의 파라미터(parameters)를 학습시키는 방법으로 시스템에 저장한

다. 학습이 완료된 연상 메모리에 잡음이 포함된 정보로 이루어지는 키 패턴(key pattern)이 초기조건으로 입력되면, 상태 벡터는 회상 과정을 통하여 키 패턴에 가장 가까운 원형 패턴으로 수렴하여야 한다. 실제 시스템에서 이러한 연상(association) 과정이 성공적으로 이루어지기 위해서는, 전체 연상 시스템이 효과적인 피드백 구조를 가져야 하고, 시스템의 파라미터들은 우수한 학습 알고리즘을 통하여 얻어져야 함은 물론이다. 본 논문에서는, 기존의 사례들보다 더욱 우수한 연상 능력을 보여줄 수 있는 신경망 기반 양방향 연상 메모리(bidirectional associative memories)를 제시하는 것을 목적으로 한다.

신경망을 기반으로 하는 양방향 연상 메모리에 관해서는 그동안 많은 연구가 있어왔다. Kosko[4]는 Hopfield의 연구 결과[3]를 기초로 하여, 두 개의 층(layers)으로 배열된 뉴론들(neurons)로 이루어진 BAM(bidirectional associative memory)을 이용하면 양방향 연상 기능이 가능함을 보였다. 하지만, Hebb 학습 규칙을 이용하는 Kosko의 BAM 모델은 기억시킬 수 있는 패턴 쌍의 개수가 작고, 의사 상태(spurious state)의 수가 많으며, 낮은 오차수정률(error correction ratio)을 갖는 등 개선되어야 할 많은 문제점을 갖고 있었다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여, 주어진 패턴 쌍을 BAM에 기억시키는 과정에 관한 기본 이론의 확립과 새로운 학습 방법론의 개발에 대한 여러 가지 연구가 꾸준히 수행되

접수일자 : 2001년 05월 19일

완료일자 : 2001년 07월 31일

감사의 글 : 이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2000-041-E00206).

어 왔다. Wang 등은, [6]에서 multiple training과 dummy augmentation을 이용하는 두 가지 학습 방법론을 제안하였고, [7]에서는 주어진 패턴 쌍의 올바른 연상을 보장하는 필요충분조건을 소개하였다. [8]에서는 Kang에 의해 다층 구조의 양방향 연상 메모리가 제안되었고, [9]에서는 BAM의 학습을 위하여 유전자 알고리즘을 사용하는 방법이 모색되었으며, [10]에서는 기울기 강하(gradient descent)를 이용한 학습 방법론이 제안되었다. [11]에서는 BAM을 위한 학습 과정에서, 패턴 공간을 dilation과 translation을 이용하여 적절하게 변환시킨 이후에 Hebb 규칙을 적용할 경우에 보다 우수한 성능이 얻어질 수 있음이 보여졌다. 그리고, Shi 등은 [12]에서, 기존의 Kosko BAM 모델의 하드리미터(hard limiters)를 일정한 형태의 최대 연산자(max operators)로 대체시키는 GBAM 모델을 제안하고 이 모델의 연결강도행렬의 학습을 위하여 퍼셉트론 규칙을 사용하는 방안을 제안하였다. 참고문헌 [12]의 시뮬레이션 부분에서 보여진 바와 같이, GBAM 모델은 지금까지 제안되어 온 여러 종류의 양방향 연상 메모리[4,13,14]보다 우수한 성능을 갖는다. 하지만, 참고문헌 [12]에서는 이미 [14] 등에서 제안되어 사용된 바 있는 퍼셉트론 규칙을 학습규칙으로 사용하고 있으므로, 실험 과정에서 관찰된 우수한 성능은 학습 방법에 기인한 것이기보다는 모델의 기본 구조 때문인 것으로 판단된다. 본 논문에서는 이러한 판단에 따라서, 기존의 GBAM 모델에 바이어스 항을 새롭게 추가하여 보다 우수한 성능을 가질 수 있도록 하고, 또한 GBAM 모델에 대한 이론적 고찰을 바탕으로 효과적인 학습 알고리즘을 제안하고자 한다. 제안된 알고리즘은 GEVP(generalized eigenvalue problems) 형태의 선형행렬부등식 기반 최적화 문제(linear matrix inequalities-based optimization problems)로 표현되는데, 이러한 종류의 문제는 최근에 개발된 내부점 방법(interior point methods) 관련 범용 소프트웨어에 의해 빠르고 편리하게 풀릴 수 있다. 따라서, 설계과정에서 특수한 알고리즘의 구현이 필요하지 않고, 범용 소프트웨어를 활용할 수 있는 장점을 가지게 된다.

본 논문에서 사용하는 주요 용어와 기호의 정의는 다음과 같다:  $R^n$ 과  $R^{n \times m}$ 은 각각,  $n$ 차원의 실수 벡터 공간과  $n \times m$  차원의 실수 행렬 집합을 나타낸다. 벡터  $x \in R^n$ 의  $i$ 번째 원소는  $x_i$ 로 표기된다. 0이 아닌 모든  $x \in R^n$ 에 대해서  $x^T A x > 0$ 이 성립하는 대칭 행렬  $A \in R^{n \times n}$ 는 양의 정부호 행렬이라 불리우며,  $A > 0$ 로 표기된다. 또한,  $A > B$ 은  $A - B$ 가 양의 정부호임을 의미한다.  $B^n$ 은  $n$ 차원 이진 벡터의 집합  $\{-1, +1\}^n$ 을 나타낸다.  $B^n$ 에 속한 두 이진 벡터  $x^*$ 와  $x$ 사이의 해밍거리(Hamming distance)는  $H(x^*, x)$ 로 표기된다. 그리고, 편의상 이진 벡터와 패턴은 같은 의미를 갖는 동의어로 사용한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 GBAM에 대한 기본적인 사항을 소개한 후, 본 논문에서 제안하는 학습방법론의 이론적 근거가 되는 기본 정리를 제시한다. 그리고, 제시된 기본 정리를 바탕으로 하여, 주어진 패턴 쌍들을 안정하고 오차수정이 잘 이루어지도록 저장하는 문제를, 제약조건을 갖는 최적화 문제로 공식화한 후, 이를 GEVP(generalized eigenvalue problem)으로 변환시키는 과정을 다룬다. 널리 알려진 바와 같이 GEVP 문제는 내부점 방법(interior point method)에 의하여 빠른 시간 내에 효과적으로 풀릴 수 있기 때문에, GEVP를 이용한 풀이는 매우 효과적인 설계 방법론이 될 수 있다. 3장에서는 기존의 관련 연

구에서 사용되었던 두 가지 예제에 대하여 제안된 방법론을 적용해보고, 기존의 방법론과의 성능 비교를 수행한다. 마지막으로, 4장에서는 결론을 제시한다.

## 2. 본 론

### 2.1 바이어스 항이 추가된 GBAM 모델

본 논문에서 제안하는 바이어스 항이 추가된 GBAM(general bidirectional associative memory) 모델은  $m$ 개의 뉴론  $(X_1, \dots, X_m)$ 으로 이루어진  $X$ 층과  $n$ 개의 뉴론  $(Y_1, \dots, Y_n)$ 으로 이루어진  $Y$ 층으로 이루어진다. 각 층을 이루는 뉴론의 활성화상태(firing state)는 이진수 “+1” 또는 “-1”로 표현되며, 이들은 각각 “활성화되었음” 또는 “활성화되지 않았음”을 의미한다.  $X$ 층에 있는 뉴론들의 활성화상태는  $X$ 층 활성화상태벡터( $X$ -layer firing state vector)  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)^T \in B^m$ 에 의해 표현된다. 여기에서  $x_i$ 는  $X$ 층에 있는  $i$ 번째 뉴론의 활성화상태를 나타내는 이진수이다. 마찬가지로,  $Y$ 층 뉴론들의 활성화상태는  $Y$ 층 활성화상태벡터  $y = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)^T \in B^n$ 로 표현된다. 같은 층 내에서는 뉴론끼리의 연결이 존재하지 않으며,  $X$ 층과  $Y$ 층 상호간에는 연결강도 행렬  $A = [a_{ij}] \in R^{m \times n}$ 과  $B = [b_{ji}] \in R^{n \times m}$ 을 통한 연결이 존재한다. 여기에서 연결강도  $a_{ij}$ 는  $X$ 층의  $j$ 번째 뉴론  $X_j$ 의 활성화상태가  $Y$ 층의  $i$ 번째 뉴론  $Y_i$ 의 활성화에 미치는 영향의 크기를 나타내며, 연결강도  $b_{ji}$ 는  $Y$ 층의  $i$ 번째 뉴론  $Y_i$ 의 활성화상태가  $X$ 층의  $j$ 번째 뉴론  $X_j$ 의 활성화에 미치는 영향의 크기를 나타낸다. Kosko의 BAM 등에서는 항상  $a_{ij} = b_{ji}$ 가 가정되지만, GBAM 모델에서는  $a_{ij}$ 와  $b_{ji}$ 가 서로 다른 값을 가질 수 있다.  $X$ 층의 뉴론들의 활성화상태  $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ 가  $Y$ 층의  $i$ 번째 뉴론  $Y_i$ 의 활성화에 미치는 영향은 다음과 같다:

$$q(i|x) = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + a_{i0}$$

여기에서  $a_{i0}$ 는 본 논문에서 새롭게 도입한 바이어스 항이다. 이들을 원소로 갖는 벡터  $q(x) = (q(1|x), \dots, q(n|x))^T$ 는  $X$ 층 활성화상태벡터  $x$ 가  $Y$ 층의 활성화에 주는 영향을 나타내게 된다.  $y \in B^n$ 가  $x \in B^m$ 로부터 받는 지지도(support)는,  $q(x)$ 와  $y$ 의 내적  $\langle y, q(x) \rangle$ 으로 정의되고 다음과 같이  $S(y|x)$ 로 표기된다:

$$S(y|x) = \langle y, q(x) \rangle = \sum_{i=1}^n y_i q(i|x)$$

마찬가지로,  $Y$ 층의 뉴론들의 활성화상태  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ 가  $X$ 층의  $j$ 번째 뉴론  $X_j$ 의 활성화에 미치는 영향은 다음과 같이 표현되며, 이 식에서  $b_{j0}$ 는 바이어스 항이다:

$$q(j|y) = \sum_{i=1}^n b_{ji} y_i + b_{j0}$$

$q(y) = (q(1|y), \dots, q(m|y))^T$ 는  $y$ 가  $X$ 층의 활성화에 미치는 영향의 크기 벡터가 되고,  $x \in B^m$ 가  $y \in B^n$ 로부터

받는 지지도  $S(x|y)$ 는 다음 식과 같이 표기된다:

$$S(x|y) = \langle x, q(y) \rangle = \sum_{j=1}^m x_j q(j|y).$$

키 패턴이 초기조건벡터로 주어진 경우에, GBAM 모델의 회상(recall) 과정에서 사용되는 업데이트(update) 규칙은 다음과 같다:

$$x^{s+1} = \arg \max_{x \in H_1(x^s)} S(x'|y^s),$$

$$y^{s+1} = \arg \max_{y \in H_1(y^s)} S(y'|x^{s+1}).$$

여기에서  $H_1(x^s)$ 는  $x^s \in B^m$ 로부터 해밍거리가 1 이내에 있는, 즉  $H(x, x^s) \leq 1$ 을 만족하는 모든 이진벡터  $x \in B^m$ 로 이루어지는 해밍 볼(Hamming ball)이고,  $H_1(y^s)$ 도 같은 방법으로 정의되는, 중심이  $y^s$ 에 있고 반경이 1인 해밍 볼  $\{y \in B^n | H(y, y^s) \leq 1\}$ 이다. 위의 식들로부터 알 수 있듯이, GBAM의 업데이트 규칙은 기본적으로 기존의 BAM[4], ABAM(asymmetric bidirectional associative memories)[13] 등과 유사하다. 통상적으로 쓰이는 시그넘 함수(signum function), 즉, 하드리미터(hardlimiter) 형태의 비선형 요소 대신 max 연산자가 쓰이는 점이 색다르다. 그리고, 초기조건으로  $x^0$  만이 주어지는 경우에는  $y^0$ 는 다음과 같은 방식으로 생성되고, 그 이후의  $x^s$  및  $y^s$  들은 위에서 설명된 업데이트 규칙에 따라 갱신되어진다(초기조건으로  $y^0$ 만 주어지는 경우에도 같은 원리가 적용됨은 물론이다):

$$y_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{if } q(i|x) > 0 \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

한 쌍의 이진 벡터  $x \in B^m$ 과  $y \in B^n$ 가 각각 다음 시간스텝에서 반대편 층의 이진 벡터로 상대방을 발생시키게 될 때, 우리는 이들 패턴 쌍  $(x, y) \in R^{m+n}$ 이 GBAM에 "안정하게 저장되었다"라고 하고, 이들을 안정한 패턴 쌍(stable pattern pair)이라고 부른다. 일정한 연결강도행렬  $A \in R^{n \times m}$ ,  $B \in R^{m \times n}$ 과 바이어스 항들에 의해 정의되는 GBAM이 주어진 패턴 쌍을 안정하게 저장할 수 있는지는 다음의 필요충분조건에 의하여 판별될 수 있다 [12]:

**보조정리 :** 다음의 두 부등식이 동시에 성립함과 패턴 쌍  $(x^*, y^*) \in R^{m+n}$ 가 바이어스 항이 추가된 GBAM에 안정한 상태로 저장되는 것은 동치이다:

$$y_i^* q(i|x^*) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_j^* q(j|y^*) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

참고문헌 [12]에서 제안한 GBAM 모델을 위한 학습 규칙은, 각 원형 패턴 쌍을 기억하고 원형 패턴 쌍에서 1비트 떨어진 벡터가 초기조건으로 주어질 때 이를 다음 시간스텝에서 원형 패턴 쌍으로 수렴시키기 위한 충분조건을 퍼셉트론 학습 규칙으로 풀어주는 형태로 이루어진다. 기억시켜야 할 원형 패턴 쌍들이  $(x^{(k)}, y^{(k)})$ ,  $k=1, \dots, K$ 일 때, 이 학습 규칙은 다음과 같은 부등식을 퍼셉트론 학습 규칙으로 푸는 형태가 된다[12]:

이러한 방법을 통하여 학습된 GBAM은, 참고문헌 [12]의 실험결과에서 보여진 바와 같이 일반적으로 기존의 양방향 연상 메모리보다 우수한 성능을 제공한다. 하지만, 학습 규칙만을 따로 분리하여 고찰하여 보면, 원형 패턴 쌍들 사이에

$$\left. \begin{aligned} & y_i^{(k)} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^{(k)} > 0 \\ & y_i^{(k)} \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^{(k)} - a_{ij} x_j^{(k)} \right) > 0 \\ & j = 1, \dots, m, k=1, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} & x_j^{(k)} \sum_{i=1}^n b_{ji} y_i^{(k)} > 0 \\ & x_j^{(k)} \left( \sum_{i=1}^n b_{ji} y_i^{(k)} - b_{ji} y_i^{(k)} \right) > 0 \\ & i = 1, \dots, n, k=1, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$H(x^{(p)}, x^{(q)}) \geq 3, \quad H(y^{(p)}, y^{(q)}) \geq 3, \quad \forall p \neq q$$

조건이 만족되지 않을 경우에는 적용할 수 없다는 점[12, Proposition 2] 등의 단점이 존재함을 알 수 있다. 이에 따라, 본 논문에서는 이러한 단점을 갖지 않고 우수한 오차 수정 능력을 보장할 수 있는 새로운 학습 방법론을, GBAM 모델에 대한 이론적 고찰을 바탕으로 제안하고자 한다.

### 2.2 GEVP 기반 학습 방법의 개발

본 논문에서는, 보다 우수한 오차 수정 능력을 갖는 GBAM의 설계를 위하여, GEVP로 불리는 최적화 문제를 이용하는 방법을 제안한다. 먼저, 바이어스 항이 추가된 GBAM에 관한 이론적 고찰을 바탕으로 하여, 주어진 원형 패턴 쌍을 안정하게 그리고 최대한 높은 오차수정율을 갖도록 저장시키는 방법을 제약조건이 있는 최적화 문제로 공식화한다. 그리고, 몇 가지 보조변수를 도입함으로써, 이 최적화 문제를 GEVP로 변환하여 내부점 방법을 구현한 범용 소프트웨어로 해를 구하는 전략을 제시한다. 먼저, 앞 절의 보조정리에 의하면, 활성상태 벡터  $(x, y) \in B^{m+n}$ 가 다음 조건을 만족하면 안정한 쌍으로 바이어스 항이 추가된 GBAM에 저장될 수 있다:

$$y_i q(i|x) > 0, \quad i=1, \dots, n,$$

$$x_j q(j|y) > 0, \quad j=1, \dots, m.$$

여기에서 소개한 조건에만 의존하여 메모리를 설계할 경우, 주어진 각각의 원형 패턴 쌍을 안정하게 저장할 수 있으므로 양방향 연상 작용을 어느 정도 성공적으로 수행할 수는 있다. 하지만 보다 우수한 연상능력을 소유하기 위해서는, 초기 조건으로 주어지는 입력 패턴에 잡음이 섞여서 들어오는 경우에 대해서도 효과적으로 대처할 수 있어야 한다. 즉,  $(x, y) \in B^{m+n}$ 가 안정한 원형 패턴 쌍으로 저장되어 있을 때,  $H(x, x+\delta x)$  값이 비교적 작은  $x+\delta x \in B^m$ 가  $X$ 층의 초기 패턴으로 주어지는 경우에 (혹은,  $H(y, y+\delta y)$  값이 비교적 작은  $y+\delta y \in B^n$ 가  $Y$ 층의 초기 패턴으로 주어지는 경우에), 시스템의 상태가 업데이트 과정을 거쳐서 최종적으로  $(x, y)$ 에 도달하는 것이 바람직하다. 이와 같은 능력은 일반적으로 오차 수정 능력(error correction capability)라고 불리며, 오차 수정이 성공적으로 수행될 수 있는 확률을 백분율로 표현한 값은 오차수정율로 정의된다. 본 논문에서는 오차수정율을 극대화시키기 위한 학습 방법론을 확립하기 위하여 다음의 정리를 제시한다:

**정리 :** 저장하고자 하는 패턴 쌍  $(x^*, y^*) \in B^{m+n}$ 이 주어졌을 때, 바이어스 항이 추가된 GBAM모델의 연결강도행렬  $A \in R^{n \times m}$ 과  $B \in R^{m \times n}$ 과 바이어스 항들이 일정한 양수  $d_j$ ,  $j=1, \dots, m$ 와  $g_i$ ,  $i=1, \dots, n$ 에 대하여 다음의 부등

식을 만족한다고 하자:

$$x_j^* (\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^* + b_{j0}) > 2d, \max_i |b_{ji}|, j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

$$y_i^* (\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^* + a_{i0}) > 2g_i \max_j |a_{ij}|, i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

이 같은 경우에, 바이어스 항이 추가된 GBAM은 반드시 다음과 같은 성질을 갖는다:

- ① 패턴 쌍  $(x^*, y^*)$  는 안정한 상태로 저장된다.
- ② 초기조건으로  $Y$  층이  $0 \leq H(y^0, y^*) \leq d_j$  를 만족하는 벡터  $y^0 \in B^n$  를 활성벡터로 가지면, 다음 시간 스텝에서  $X$  층의  $j$  번째 뉴런은 올바른 활성상태를 갖는다 (즉,  $x_j^1 = x_j^*$ ).
- ③ 초기조건으로  $X$  층이  $0 \leq H(x^0, x^*) \leq g_i$  를 만족하는 벡터  $x^0 \in B^m$  를 활성벡터로 가지면, 다음 시간 스텝에서  $Y$  층의  $i$  번째 뉴런은 올바른 활성상태를 갖는다 (즉,  $y_i^1 = y_i^*$ ).

**증명** 모든  $d_j$  와  $g_i$  가 양수인 경우에는, (3)과 (4)의 좌변은 항상 0 이상이 되므로, 보조정리에 의하여 ①의 명제는 참이 된다. ②를 보이기 위하여,  $0 \leq H(y^0, y^*) \leq d_j$  를 만족하는  $Y$  층의 초기조건  $y^0 \in B^n$  를 고려하자. 삼각 부등식 (triangle inequality)을 이용하면,  $\delta \triangleq y^0 - y^*$  는 항상

$$\left| \sum_{i=1}^n b_{ji} \delta_i \right| \leq |b_{j1} \delta_1| + \dots + |b_{jn} \delta_n| \leq 2d_j \max_i |b_{ji}|$$

를 만족함을 알 수 있다. 이 부등식과 정리의 조건 (3)을 이용하면 다음을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} x_j^* (\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^0 + b_{j0}) &= x_j^* (\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^* + b_{j0} + \sum_{i=1}^m b_{ji} \delta_i) \\ &= x_j^* (\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^* + b_{j0}) + x_j^* (\sum_{i=1}^m b_{ji} \delta_i) \\ &\geq x_j^* (\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^* + b_{j0}) - |\sum_{i=1}^m b_{ji} \delta_i| \\ &\geq x_j^* (\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^* + b_{j0}) - 2d_j \max_i |b_{ji}| \\ &> 0. \end{aligned}$$

위의 부등식으로부터,  $x_j^*$  와  $\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^0 + b_{j0}$  는 같은 부호를 갖게 됨을 알 수 있다. 따라서, GBAM의 업데이트 규칙으로부터,  $y^0$  가  $Y$  층의 초기 활성벡터일 때  $X$  층의  $j$  번째 뉴런은 다음 스텝에서  $x_j^*$  와 같은 값을 갖게됨을 알 수 있다. ③의 경우도, 위와 같은 과정을 이용하여 증명할 수 있다.  $\square$

위의 정리로부터, 각  $d_j$  와  $g_i$  를 최대화시키는  $A$  와  $B$  를 연결강도행렬로 갖는 GBAM은 주어진 패턴 쌍  $(x^*, y^*)$  을 안정하게 저장하고, 우수한 오차 수정 능력을 가질 수 있음을 알 수 있다. 따라서, 다음과 같은 최적화 문제로 표현되는 설계 전략을 도출해낼 수 있다:

**설계 문제** : 기억시켜야 할 원형 패턴 쌍  $\{(x^{(k)}, y^{(k)}) | k = 1, \dots, K\}$  이 주어졌을 때,

1) 각  $j \in \{1, \dots, m\}$  에 대하여

$$\max d_j (> 0)$$

$$\text{s.t. } x_j^{(k)} (\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i^{(k)} + b_{j0}) > 2d_j \max_i |b_{ji}| \\ k = 1, \dots, K$$

를 풀고,

2) 각  $i \in \{1, \dots, n\}$  에 대하여

$$\max g_i (> 0)$$

$$\text{s.t. } y_i^{(k)} (\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^{(k)} + a_{i0}) > 2g_i \max_j |a_{ij}| \\ k = 1, \dots, K$$

를 푼다. 이 문제들의 최적 해를 구성하는  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ji}]$  와  $a_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $b_{j0}$ ,  $j = 1, \dots, m$  이 각각 우리가 구하고자하는 연결강도 행렬과 바이어스 항이 된다.

위의 문제에 등장하는 제약조건들은, 추가적인 보조변수를 도입함으로써 선형행렬부등식(linear matrix inequalities, LMIs) 관련 부등식으로 변환될 수 있다. 이러한 과정은, 위에서 제시된 설계문제를 비교적 짧은 시간 내에 효과적으로 풀 수 있는 GEVP 형태의 문제로 치환할 수 있게 해준다. 선형행렬부등식이란, 다음과 같은 형태로 주어지는 제약 조건에 대한 일반적인 명칭이다[15].

$$A(z) = A_0 + z_1 A_1 + \dots + z_N A_N > 0.$$

여기에서,  $z \triangleq [z_1 \dots z_N]^T \in R^N$  는 변수이고,  $A_0, \dots, A_N$  는 상수들로 이루어진 대칭 행렬들이며, " $>$ " 는 위 부등식의 좌변이 양의 정부호(positive definite)임을 의미한다. 위 부등식의 좌변과 같은 형태를 우리는 보통 "변수  $z$  에 대하여 애파인 함수(affine function)인 대칭행렬"이라고 부른다. 다중의 선형 행렬 부등식  $A^{(1)}(z) > 0, \dots, A^{(p)}(z) > 0$  과  $\text{diag}(A^{(1)}(z), \dots, A^{(p)}(z)) > 0$  은 동치이므로, 여러 개의 선형 행렬 부등식 조건들은 하나의 선형 행렬 부등식으로 표현 가능하다. 선형 행렬 부등식과 관련된 최적화와 관련해서 중요한 주제 중 하나인 GEVP는, 다음과 같은 일반형을 갖는 최적화 문제를 의미한다[15]:

$$\min \lambda$$

$$\text{s.t. } \lambda B(z) > A(z)$$

$$B(z) > 0$$

$$C(z) > 0$$

여기에서,  $A(z)$ ,  $B(z)$  와  $C(z)$  는 변수  $z$  에 대하여 애파인 함수인 대칭행렬들이다. 따라서, GEVP의 제약조건들 중  $B(z) > 0$  과  $C(z) > 0$  는 선형 행렬 부등식 형태이며,  $\lambda B(z) > A(z)$  는, 변수  $\lambda \in R$ ,  $z \in R^N$  들 중 하나를 상수로 고정시킬 경우에는 나머지 변수에 대하여 선형 행렬 부등식 형태를 가지게 된다. GEVP 형태의 최적화 문제는 내부점 방법(interior point method)에 의하여 효과적으로 풀릴 수 있음은 널리 알려져 있으며[15,16], 최근에는 이를 풀 수 있는 MATLAB의 Toolbox[17]도 등장하였다. 앞에서 GBAM의 설계를 위하여 제시한 최적화 문제들 중 제약 조건 부분들은, 보조변수인  $q_j > 0$  와  $p_i > 0$  를 이용하면 다음과 같은 형태로 수정될 수 있다:

$$\left( \sum_{j=1}^m b_{ji} y_i^{(k)} + b_{j0} \right) x_j^{(k)} > 2d_j q_j > 2d, \max_{1 \leq i \leq n} |b_{ji}|, \\ j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K, \\ \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^{(k)} + a_{i0} \right) y_i^{(k)} > 2g_i p_i > 2g, \max_{1 \leq j \leq m} |a_{ij}|, \\ i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, K.$$

위의 부등식들은 분할하여 다시 표현하면 다음과 같은 형태가 된다:

$$q_j > \max_{1 \leq i \leq n} |b_{ji}| \\ p_i > \max_{1 \leq j \leq m} |a_{ij}| \\ -2d_j q_j + \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} y_i^{(k)} + b_{j0} \right) x_j^{(k)} > 0, \\ -2g_i p_i + \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^{(k)} + a_{i0} \right) y_i^{(k)} > 0 \\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K.$$

이상에서 설명한 변환 과정을 이용하면, 앞에서 제시한 설계문제에 등장하는 1) 항 및 2) 항의 최적화 문제들은 각각 다음과 같은 GEVP 문제들로 치환될 수 있다:

1) 각  $j \in \{1, \dots, m\}$  에 대하여,

$$\min -d_j (< 0) \\ \text{s.t. } (-d_j)(2q_j) + \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} y_i^{(k)} + b_{j0} \right) x_j^{(k)} > 0, k = 1, \dots, K, \\ -q_j < b_{ji} < q_j, i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

2) 각  $i \in \{1, \dots, n\}$  에 대하여,

$$\min -g_i (< 0) \\ \text{s.t. } (-g_i)(2p_i) + \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^{(k)} + a_{i0} \right) y_i^{(k)} > 0, k = 1, \dots, K, \\ -p_i < a_{ij} < p_i, j = 1, \dots, m. \tag{6}$$

최적화를 이용하여 GBAM을 설계하는 과정에서 반드시 고려해야 할 추가적인 주의 사항 중 하나는, 연결 강도의 크기가 지나치게 큰 값을 갖지 않도록 상한선을 두는 것이 필요하다. 이러한 필요는, 위의 GEVP 문제들의 제약 조건 부분에 양의 상수  $L, U$ 를 이용하여 다음과 같은 선형 행렬 부등식 조건을 추가함으로써 충족시킬 수 있다:

$$L < q_j < U, j = 1, \dots, m, \tag{7} \\ L < p_i < U, i = 1, \dots, n. \tag{8}$$

조건 (7), (8)을 각각 GEVP 문제 (5), (6)에 추가한 경우에도, 위의 문제들은 여전히 GEVP 형태를 유지하게 된다. 이상의 과정을 통하여 본 논문에서 제시하는 바이어스 항이 추가된 GBAM을 위한 설계 방법론이,  $m + n$  개의 GEVP 문제를 푸는 형태로 확립된다.

### 3. 예 제

다음에서는, 제안된 설계 방법론의 성능을 평가하기 위하여 두 가지 설계 예제를 고려한다.

첫번째 예제에서는, 참고문헌 [11]에서 고려되어진 바 있는 그림 1의 패턴 쌍을 바이어스 항이 추가된 GBAM 모델에 저장하는 문제를 다룬다. 본 논문에서 제안된 방법에 따라,  $L = 1, U = 2$  로 고정시키고 MATLAB LMI Control

Toolbox의 함수 “gevp”를 이용하여 연결강도행렬  $A$  와  $B$ , 그리고 바이어스 항들을 구했다. 그리고, 이렇게 구해진 메모리의 성능을 평가하기 위한 비교대상으로, [12]의 방법으로 설계한 GBAM과 [11]의 방법에 따라 설계한 BAM을 고려하였다. 이 세 가지 양방향 연상 메모리의 오차 수정 능력을 비교하기 위하여, 각각의  $X$  층에 이진 벡터를 초기 조건으로 주고 이들이 최종적으로 어떠한 패턴 쌍으로 수렴하는지를 관찰하여 그림 2와 같은 평균 오차수정율을 구하였다. 여기에서 성능지수로 사용된 평균 오차수정율은 다음과 같이 정의된다. 우선, 각 원형 패턴  $x^{(k)}$  과 양의 정수(integer)  $r$  에 대하여, 오차수정율  $P(x^{(k)}, r)$  은  $x^{(k)}$  에서  $r$  비트 떨어진 해밍 볼(Hamming ball)에서 시작한 상태체적이 궁극적으로 패턴 쌍  $(x^{(k)}, y^{(k)})$  에 수렴하는 확률을 의미한다. 그리고, 평균 오차수정율  $Prob(r)$  은,  $P(x^{(k)}, r)$  을 모든  $x^{(k)}$  에 대해 평균한 값을 의미한다 (즉,  $Prob(r) = (\sum_{k=1}^K P(x^{(k)}, r))/K$ ). 그림 2에서 해밍거리가  $r = 0$  인 경우의  $Prob(r)$  값이 모두 100%임은, 우리가 고려하는 세 가지 메모리가 모두 주어진 패턴 쌍들을 안정하게 저장하고 있음을 보여준다.

두번째 예제에서는,  $X, Y$  층에 각각  $m = n = 9$  개의 뉴런을 갖는 GBAM에 다음에서 제시하는  $K = 3$  개의 패턴 쌍  $\{(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3)\}$  을 저장하는 문제를 다룬다:

$$x1 = [+1 -1 -1 +1 +1 +1 -1 -1 -1]^T \\ y1 = [+1 +1 +1 -1 -1 -1 -1 +1 -1]^T \\ x2 = [-1 +1 +1 +1 -1 -1 +1 +1 +1]^T \\ y2 = [+1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 +1]^T \\ x3 = [+1 -1 +1 -1 +1 +1 -1 +1 +1]^T \\ y3 = [-1 +1 -1 +1 -1 -1 +1 -1 +1]^T$$

이 예제에서는 본 논문에서 제시한 GEVP 기반 학습방법의 효과를 독립적으로 살펴보기 위하여, 바이어스 항이 도입되지 않은 원래의 GBAM 모델을 대상으로 (즉, 모든 바이어스 항을 0으로 둔 후) 본 논문에서 확립된 학습방법론을 적용해보았다. 앞의 예제에서와 마찬가지로,  $L = 1, U = 2$  를 고정시키고 본 논문의 방법론에 따라 GEVP를 풀어서 연결강도행렬  $A, B$  를 구하였다. 위의 패턴 쌍을 [12]의 방법론을 이용하여 GBAM에 저장할 경우에는, 본 논문의 2장에서 기술한 바와 같이 (1)과 (2)의 부등식을 만족하는 해를 퍼셉트론 학습규칙을 통하여 구해야 한다. 이를 실행하여 본 결과 퍼셉트론 학습이 수렴에 이르지 못함을 관찰하였는데, 이는 (1)과 (2)의 부등식을 모두 만족하는 해가 존재하지 않음에 기인한 것이었다(이러한 사실은 MATLAB LMI Control Toolbox의 함수 “feasp”를 이용하여 확인할 수 있음). 따라서, 이 예제의 경우에는 [12]에서 제시한 설계방법론은 적용이 불가능함이 확인되었다. 또 하나의 비교 대상으로, [2]의 5장에서 소개된 바 있는 Wang 등의 multiple training 기법[6]에 따라 설계된 BAM을 선택하였다. 이 두 메모리의 오차 수정 능력을 비교하기 위하여, 첫 번째 예제의 경우에 수행하였던 것과 비슷한 종류의 시뮬레이션을 수행하여 결과를 비교하였다. 즉, 각 메모리의  $X$  층에 대하여 가능한 모든 경우의 이진 벡터를 초기 조건으로 주고 이들이 최종적으로 어떠한 패턴 쌍으로 수렴하는지를 관찰한 후 그 결과를 토대로 평균 오차수정율  $Prob(r), r = 0, \dots, 3$  을 구하여 그림 3에 보였다. 이 그림으로부터, 본 논문의 방법론으로 설계된 GBAM이 multiple training으로 설계된 BAM보다 전반적으로 우수한 오차 수정 능력을 가짐을 알 수 있다.

따라서, 바이어스 항이 추가되지 않은 기존의 GBAM에 GEVP 기반 학습방법론을 적용시킬 경우에도 기존의 연구결과에 비해 우수한 결과가 얻어짐을 확인할 수 있었다.

#### 4. 결론

본 논문에서는, 바이어스 항이 추가된 GBAM 모델을 대상으로 주어진 패턴 쌍들을 높은 오차수정율을 가지고 안정하게 저장할 수 있는 양방향 연상 메모리를 설계하는 GEVP 기반 방법론을 제시하였다. 우선 설계 방법론의 주요한 기초가 되는 기본 정리를 제시한 후, 높은 오차 수정 능력을 갖는 메모리를 설계하는 문제를 제약조건이 있는 최적화 문제로 공식화하였다. 그리고, 보조변수의 도입을 통하여 이 최적화 문제를 GEVP 형태의 최적화 문제로 변환하였다. 기존의 관련연구에서 사용해 온 예제들 중 두 가지에 대하여 시뮬레이션을 수행해본 결과, 본 논문의 방법론을 통하여 설계된 메모리는 기존의 방법론에 의해 구해진 메모리보다 전반적으로 우수한 오차 수정 능력을 보여주었으며, 본 논문에서 새롭게 도입한 바이어스 항을 사용하지 않는 경우에도 본 논문의 GEVP 기반 학습방법론은 여전히 우수한 성능을 제공할 수 있음을 확인하였다. 양방향 연상 메모리의 설계를 GEVP와 같이 보편적인 형식의 최적화 문제를 통하여 풀 수 있다는 것은, 본 논문이 제시하는 설계 방법이 특수한 알고리즘의 구현을 요구하는 것이 아니라 MATLAB LMI Control Toolbox와 같이 내부점 방법을 구현한 보편적인 소프트웨어에 의해 이루어질 수 있음을 의미하므로 상당한 실용적 가치를 갖는다. 본 논문의 방법론은 여러 가지 형태의 변형된 GBAM을 위하여 손쉽게 수정·적용될 수 있다. 즉, 본 논문의 정리는, 자기 연상 메모리 기능을 하는 변형된 GBAM 구조, 혹은 셀룰라 신경망 구조 등을 다룰 수 있는 형태로 확장될 수 있으며, 이에 따라 각각의 경우를 고려할 수 있는 GEVP 기반 설계 방법론의 제시가 가능하다. 본 논문의 방법론과 관련한 향후 연구과제로는, 대규모 GBAM을 이용한 실용적인 문제에 대한 도전을 들 수 있다.

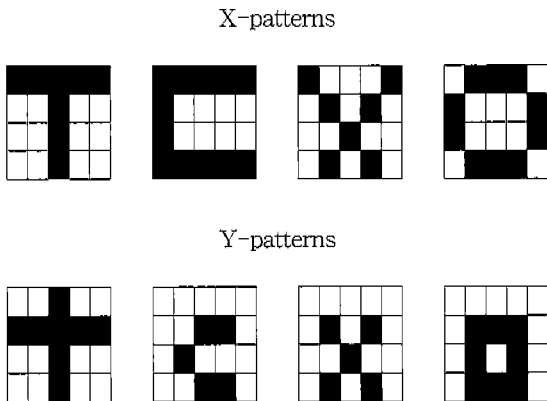


그림 1. 저장되어야 할 패턴 쌍  
Fig. 1 Pattern pairs to be associated

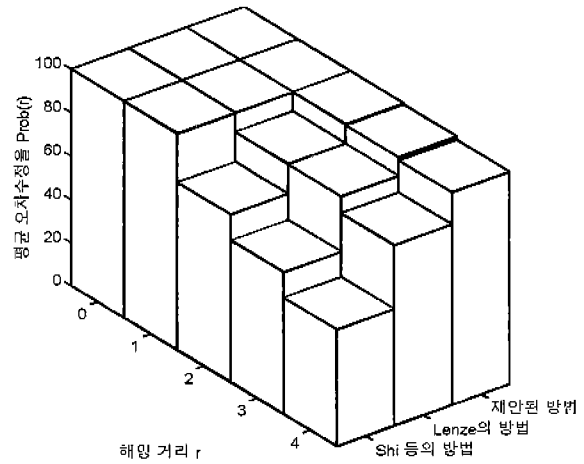


그림 2. 첫 번째 예제에 대한 평균 오차수정율 비교  
Fig. 2 Comparison of average error correction probabilities for the first example

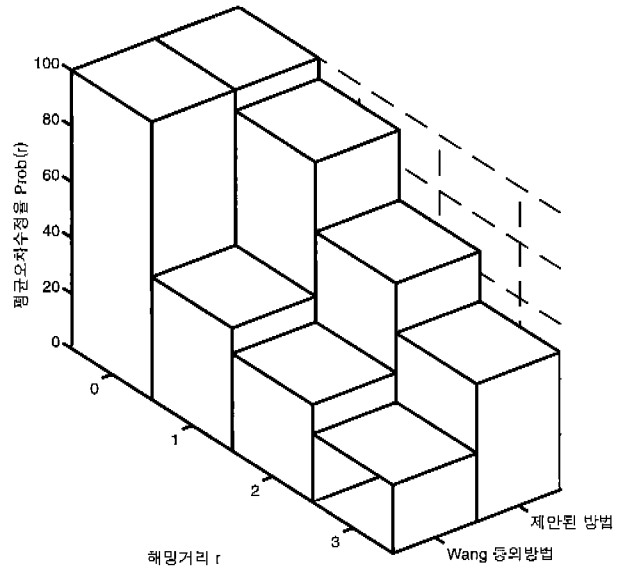


그림 3. 두 번째 예제에 대한 평균 오차수정율 비교  
Fig. 3 Comparison of average error correction probabilities for the second example

#### 참고 문헌

- [1] J. A. Anderson, J. W. Silverstein, S. A. Ritz, and R. S. Jones, "Distinctive features, categorical perception, and probability learning: Some applications of a neural model," in *Neurocomputing: Foundations of Research*, J. A. Anderson and E. Rosenfeld, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.
- [2] M. H. Hassoun, *Fundamentals of Artificial neural networks*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1995.
- [3] J. J. Hopfield, "Neural networks and physical sys-

- tems with emergent collective computational abilities," in *Proc. Nat. Acad. Sciences*, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.
- [4] B. Kosko, "Bidirectional Associative Memories," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern.*, vol. 18, pp. 49-60, 1988.
- [5] A. N. Michel and J. A. Farrell, "Associative Memories via Artificial Neural Networks," *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 10, pp. 6-17, 1990.
- [6] Y. F. Wang, J. B. Cruz, and J. H. Mulligan, "Two coding strategies for bidirectional associative memory," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 1, pp. 81-92, 1990.
- [7] Y. F. Wang, J. B. Cruz, and J. H. Mulligan, "Guaranteed recall of all training pairs for bidirectional associative memory," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 2, pp. 559-567, 1991.
- [8] H. Kang, "Multilayer associative neural networks (MANN's): Storage capacity versus perfect recall," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 5, pp.812-822, 1994.
- [9] G. Shi, "Genetic approach to the design of bidirectional associative memory," *International J. Syst. Science*, vol. 28, pp. 133-140, 1997.
- [10] T. Wang, X. Zhuang and X. Xing, "Designing bidirectional associative memories with optimal stability," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 24, pp. 778-790, 1994.
- [11] B. Lenze, "Complexity preserving increase of the capacity of bidirectional associative memories by dilation and translation," *Neural Networks*, vol. 10, pp. 1041-1048, 1998.
- [12] H. Shi, Y. Zhao, and X. Zhuang, "A general model for bidirectional associative memories," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.-Part B*, vol. 28, pp. 511-519, 1998.
- [13] Z.-B. Xu, Y. Leung, and X.-W. He, "Asymmetric bidirectional associative memories," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* vol. 45, pp. 1171-1179, 1996.
- [14] X. Zhuang, Y. Huang, and S.-S. Chen, "Better learning for bidirectional associative memory," *Neural Networks*, vol. 6, pp. 1131-1146, 1993.
- [15] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in systems and control theory*, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [16] L. Vandenberghe and V. Balakrishnan, "Algorithms and software for LMI problems in control," *IEEE Control Syst. Magazine*, vol. 17, pp. 89-95, 1997.
- [17] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Natick, MA: The Mathworks Inc., 1994.

## 저 자 소 개

### 박 주 영 (Joo-young Park)

1983년 : 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사)  
 1985년 : 한국과학기술원 졸업(공학석사)  
 1992년 : University of Texas at Austin 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공학박사)  
 1985년3월~1988년7월 : 한국전력 월성원자력발전소 근무  
 1992년8월 1993년2월 : 한국전력 전력경제연구소 근무  
 1993년3월~현재 : 고려대 서캠퍼스 제어계측공학과 부교수

관심분야 : 신경망, 제어이론, 지능시스템  
 E-mail : jpark@tiger.korea.ac.kr

### 임 채 환 (Chae-hwan Leem)

2000년 : 고려대학교 제어계측공학과 졸업(공학사)  
 2000년~현재 : 고려대학교 대학원 제어계측공학과 석사과정

관심분야 : 신경망, 지능시스템, 퍼지제어  
 E-mail : mirage@cie01.korea.ac.kr

### 김 혜 연 (Hye-yeon Kim)

1997년 : 이화여자대학교 물리학과 졸업(공학사)  
 2001년 : 고려대학교 대학원 영상정보처리학과 졸업(공학석사)  
 2001년~현재 : 삼성전자 소프트웨어 센터HCI 파트 근무

관심분야 : 신경망, 연상메모리, 영상처리  
 E-mail : hykim0@samsung.co.kr