기획 용어

대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.1, 185~213 March 2001

수학교육학 용어 해설(8)

김 연 식(전서울대학교), 우 정 호(서울대학교)
박 영 배(인천교육대학교), 박 교 식(인천교육대학교)

개념 이미지/concept image

개념 이미지는 어떤 개념에 대해서, 그 개념과 관련된 외연과 내포 및 그에 대한 나름대로의 심상으로 이루어진다. 심상(mental picture)이란, 그 개념과 관련하여 개인의 마음속에 형성된 모든 표상 즉, 그림, 기호, 다이어그램, 그래프 등의 집합을 의미한다. 다시 말해 개념 이미지는 의식적 또는 무의식적으로 그 개념에 대해 개인이 가지는 모든 관념들의 집합으로 이루어진다. 개념 이미지는 사람에 따라 다르며 여러 해에 걸쳐서 모든 종류의 경험을 통해 형성되며 개인이 새로운 자극을 만나거나 성숙해 짐에 따라 변화된다. 따라서 개념 이미지가 항상 논리적이어야 할 필요는 없으며, 공식적인 개념의 정의와도 상당히 다를 수 있다. 어떤 개념을 상기할 때, 모든 개념 이미지들이 다 함께 상기되는 것은 아니다. 상황에 따라서 각기 다른 개념 이미지가 상기될 수 있다. 특정 시기에 활성화된 개념 이미지를 환기된 개념 이미지(evoked concept image)라고 한다. ⇒ 개념 정의, 인지적 갈등 요인

(참고) [1] 박선화(1993). 개념 학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰: 개념 정의와 개념 이미지의 관계를 중심으로. 대한수학교육학회논문집 3(1). 185-194. [2] 권오남 · 조현정(1997). 극한(limit)에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집 7(1). 211-229. [3] 한대희(1998). 미분법 단원에서의 용어의 문제. 대한수학교육학회논문집 8(2). 495-507.

개념 정의/concept definition

개념 정의는 어떤 개념을 정확히 설명하기 위해 사용하는 언어적 정의를 의미한다. 개념 정의는 먼저 공식적인 수학 이론의 일부로서 개인에게 주어질 수 있는데, 이것을 공식적인 개념 정의(formal concept definition)라고 한다. 한편, 어떤 개념에 대해 그 공식적인 개념 정의를 배운 학생이 개인적으로 그 개념의 정의를 재구성할 수도 있다. 이렇게 학생에 의해

개인적으로 재구성된 개념 정의를 사적인 개념 정의(private concept definition)라고 한다. 사적인 개념 정의는 공식적인 개념 정의와 다를 수 있다. 또, 사적인 개념 정의는 명백히 개념 이미지의 일부이지만, 공식적인 개념 정의는 개념 이미지의 일부일 수도 있고 아닐 수도 있다. 이런 이유에서 보통 공식적인 개념 정의를 그냥 개념 정의한다. ⇒ 개념 이미지, 인지적 갈등 요인

(참고) [1] 박선화(1993). 개념 학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰: 개념 정의와 개념 이미지의 관계를 중심으로. 대한수학교육학회논문집 3(1). 185-194. [2] 권오남 · 조현정(1997). 극한(limit)에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집 7(1). 211-229. [3] 한대희(1998). 미분법 단원에서의 용어의 문제. 대한수학교육학회논문집 8(2). 495-507.

결론적 직관/conclusive intuition

결론적 직관은, 피시바인(Efraim Fischbein)이 직관을 그 역할과 관련해서 구분한 네 가지 중의 하나로서, 예상직관(anticipatory intuition)과 함께, 문제해결 직관(problem solving intuition)으로 묶을 수 있다. 결론적 직관은 이전에 애써서 해결해 놓은 문제의 풀이에서 사용된 기본적인 아이디어를 요약하는 전체적이고 구조화된 견해이다. ⇒ 단정적 직관, 추측 직관, 예상 직관

(참고) [1] 류희찬 · 류성림(1997). 수학교육에서의 직관에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 103-116. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부. [3] Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

교수학적 상황론/theory of didactical situations

교수학적 상황론은 수학 교과 내용 중심의 수학교육 이론으로 브루소(Guy Brousseau)가 제시한 것이다. 교수학적 상황은 교사가 학생들에게 제시한 문제를 가지고 그들과 상호 작용하는 시스템으로 된 게임에 참여하는 상황으로, 학생, 교사, 환경이라는 하위 요소로 구성된다. 교수학적 상황 속에서 교사와 학생의 의무적 관계는 교수학적 계약으로 설명된다. 교사와 학생이 파트너가 되어서 어떤 책임을 져야 하는지, 그리고 서로에게 해야할 의무가 무엇인지를 결정하는 관계로서의 상호 호혜적인 의무의 체계는 계약과 흡사하다. 그러나, 교수학적 계약은 다소 암묵적인 성질을 지닌다. 이 이론에서는 수학 개념이 실제로 기능하게 하는 상황을 정교화하는 것에 초점을 맞추고 있다. 교수학적 상황론에서는 수학 학습이 행

동 – 공식화 – 타당화 – 제도화의 네 단계를 밟아 이루어지도록 교수학적 상황을 구성할 것을 제안한다. 행동 단계에서는 여러 가지 관련성 또는 규칙에 따라 결론을 내리지만, 그러한 규칙을 의식하지는 못하는 단계이다. 공식화의 단계는 행동 속에서 암묵적으로 사용했던 규칙을 의식하고 표현하는 단계이다. 타당화 단계는 공식화 단계에서 의식되고 표현된 규칙이 타당한 것인지를 따져보는 단계이다. 이 단계에서는 규칙 자체가 사고의 대상 또는 탐구의 주제가 된다. 제도화 단계는 타당화된 규칙이 하나의 (사회적인) 관습으로 공고히 자리잡는 단계이다. 교사는 수학적 지식을 재조직하고 상황을 설정하며 그 상황의 안내자, 보조자, 중재자가 되어야 한다. 또, 제도화 과정에서 중심적인 역할을 해야 한다. 이러한 상황의 발전 과정은 원시수학적 개념 – 범수학적 개념 – 수학적 개념의 순서로 발달해 온 수학 개념의 역사적 발달 과정과 평행하다. 행동 단계는 원시수학적 개념 상태, 공식화 단계는 범수학적 개념 상태, 그리고 타당화와 제도화 단계는 수학적 개념 상태에 대응된다. 이렇게 보면 교수학적 상황론은 수학 개념의 역사발생적 메커니즘을 상황 구성에 반영한 역사발생적 원리의 일종이라고 할 수 있다.

(참고) [1] 윤나미 · 이종희 · 임재훈(1999). 교수학적 상황론의 이해와 측정 지도에의 적용. 수학교육학연구 9(2). 473-491. 대한수학교육학회. [2] 홍진곤(1999). 교수학적 상황론에 기초한 小數 지도 상황 분석. 학교수학 1(2). 417-431. 대한수학교육학회.

구조적 개념 작용/structural conception

스파드(Anna Sfard)는 수학적 개념 작용(mathematical conception)이 수학적 개념(mathematical concept)과 마찬가지로 그 본성이 이중적이라고 보고 있다. 즉, 개념 작용에는 개념의 조작적 본성에 상응하는 조작적 개념 작용(operational conception)과 개념의 구조적 본성에 상응하는 구조적 개념 작용이 있다. 구조적 개념 작용은 수학적 실재(entity)를 정적인 구조로, 그것이 마치 실제의 대상(real object)인 것처럼 생각하는 것이다. 그래서 구조적 개념 작용은 정적이고, 동시적(instantaneous)이며, 통합적이다. 구조적 개념 작용에서는 내적 표상이 시각적 형상(visual imagery)의 지원을 받는다. 또, 구조적 개념 작용은 조작적 개념 작용으로부터 진화하며, 모든 인지적 과정(학습, 문제해결)을 용이하게 한다. ⇒ 조작적 개념 작용

(참고) Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Process and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics 22(1). 1-36.

꼭두각시 변수/dummy variable

어시스킨(Zalman Usiskin)에 의하면, 꼭두각시 변수라는 용어는 집합 또는 한정 기호를 나타내는 언어에서 사용되어 왔다. 이를테면 집합 언어 $\{x| p(x)\}$에서 문자 x대신 다른 문자를 사용해도 된다. 이와 같은 문자 x가 꼭두각시 변수이다. 일차식 $y=mx+b$에서도 문자 x, y, m, k는 모두 꼭두각시 변수이다. 따라서 x, y, m, k가 아닌 임의의 다른 문자를 사용하는 것이 항상 가능하다. 그러나 학생들은 이와 같이 다른 문자를 사용할 수도 있다는 것을 잘 이해하지 못하는 경향이 있다.

(참고) [1] 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부. [2] Usiskin, Z.(1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (eds.). The Ideas of Algebra, K-12. pp. 8-19. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. [2] 김남희(1999). 학교 수학의 변수 개념 학습과 관련된 몇 가지 지도 문제에 대하여. 학교수학 1(1). 19-37. 대한수학교육학회.

다가명사(多價名詞)/polyvalent name

다가명사는 프로이덴탈(Hans Freudenthal)이 변수의 정적인 측면을 설명하기 위해 사용한 용어로서, 이를테면 '평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 AC≤AB + BC', '임의의 실수 a, b에 대해서 $a+b=b+a$ '에서의 A, B, C, a, b와 같은 문자를 의미한다. AC≤AB + BC'는 평면 위의 임의의 세 점에 대하여 성립하며, $a+b=b+a$는 모든 수의 쌍에 대하여 성립한다. 그래서 A, B, C, a, b는 다가명사가 된다. 다가명사는 일반적인 명제 즉, 그 다가명사가 지칭하는 모든 대상에 대해 성립하는 명제를 형식화하는 수단이다. 다가명사를 변수(variable)라고 부르는 수학적인 습관은 비교적 최근에 형성된 것이다. 우정호에 의하면, 알파벳으로 나타나는 수학 언어에서의 다가명사인 변수는 어떤 수학적인 대상도 의미할 수 있는 일반성이 있고, 기호를 임의로 바꿀 수 있는 유연성도 있어 훨씬 강력한 힘을 발휘한다. ⇒ 부정소

(참고) [1] 김남희(1995). 수학에서 나타나는 문자의 성질과 그 다양한 의미. 대한수학교육학회논문집 5(1). 187-201. [2] 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부. [3] 김남희(1999). 학교 수학의 변수 개념 학습과 관련된 몇 가지 지도 문제에 대하여. 학교수학 1(1). 19-37. 대한수학교육학회. [4] Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

단정적 직관/affirmatory intuition

단정적 직관은, 피시바인(Efraim Fischbein)이 직관을 그 역할과 관련해서 구분한 네 가지 중의 하나로서, 확실하고 자명하며 일관성이 있는 것으로 받아들여지는 여러 가지 사실에 대한 표상(representation) 또는 해석(interpretation)이다. 단정적 직관은 일반적이고 상식적인 상황에 대한 안정된 인지적 태도를 나타내는 것으로, 개인은 단정적 직관을 통해 어떤 것을 단정하고 주장한다. 단정적 직관은 한편으로는 의미 직관(semantic intuition), 관계 직관(relational intuition), 추론 직관(inferential intuition)으로 세분될 수 있다. 또, 다른 한편으로는 기초 직관(ground intuition)과 개별적 직관(individual intuition)으로 세분될 수 있다. 의미 직관은 개념의 의미에 관련된 것이다. 관계 직관은 관계나 진술(statement)의 의미에 관련된 것이다. 추론 직관은 연역적일 수도 있고 귀납적일 수도 있는 추론에 관련된 것이다. 기초 직관은, 일반적으로 아동기에 개인에게 자연적으로 발달하여 어떤 문화권의 모든 사람이 공유하게 되는 기본적인 표상과 해석 전부를 의미한다. 기초 직관을 공통 직관(common intuition) 또는 기본 직관(basic intuition)이라고 할 수도 있다. 한편, 개인은 자신들의 생활이나 활동과 관련된 개인적인 표상을 획득하게 된다. 이렇게 획득된 표상이 개별적 직관이다. 개별적 직관을 개인적 직관이라 하기도 한다. ⇒ 추측 직관, 예상 직관, 결론적 직관

(참고) [1] 류희찬 · 류성림(1997). 수학교육에서의 직관에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 103-116. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부. [3] Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

대수적인 원리/algebraic principle

대수적인 원리는 프로이덴탈(Hans Freudenthal)이 사용한 용어로, 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수와 연산 및 관계를 확장하는 것을 의미한다. 이를테면 수 체계는 유리수 체계, 실수 체계 등으로 확장된다. 우정호에 의하면, 이것은 대수적 형식불역의 원리로 수학을 창조하는 원리일 뿐만 아니라, 교수학적인 기능도 가지고 있다. 지수를 자연수 지수, 유리수 지수로 확장할 때 바로 이 원리가 이용된다. 수 및 그 연산과 관계의 이러한 확장은 좌표평면에서 도형으로의 확장과 그 관계의 대수적 기술의 단순성에 의해서 정당화되므로, 기하학적-대수적 형식불역의 원리라고 불릴 수 있다.

(참고) [1] 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부. [2] Freudenthal, H.(1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

대수 타일/algebra tile

대수 타일은 다항식의 전개나 인수분해 지도에 주로 사용되는 교구로 디엔에스 블록(Dienes Block)의 아이디어를 변형한 것이다. 대수 타일의 기본 세트는 1과 -1을 나타내는 정사각형 모양의 타일(1×1 크기), x와 $-x$를 나타내는 직사각형 모양의 타일(1×크기), x^2과 $-x^2$을 나타내는 정사각형 모양의 타일($x \times x$ 크기)의 세 가지 유형의 타일로 구성된다. 대수 타일에서 양수와 음수의 구분은 타일의 색에 기초한다. 기본적인 1을 나타내기 위한 색 x, x^2을 나타내기 위한 색, -1, $-x$, $-x^2$을 나타내기 위한 색의 3가지가 있다. 기본 세트는 하나의 변수만을 다룰 수 있다. 변수의 이름으로 문자 x를 사용하고 있지만, 그것이 실제 지도에서 반드시 문자 x를 사용해야 함을 의미하는 것은 아니다. 두 개의 변수 x, y를 취급하려면 y, y^2, xy를 나타내는 타일, 색을 달리한 같은 크기의 음수 타일이 더 필요하다. 다항식의 인수분해에서 같은 문제에 대해 서로 다른 답이 나오는 것을 방지하기 위해서는 1, x y를 나타내는 대수 타일의 길이의 비가 정수비가 되지 않도록 해야 한다. 대수 타일은 이차식까지 유용하다. 그런데 x^3, y^3, x^2y 등도 취급할 수 있도록 고안된 대수 막대(algeblock)도 있다. ⇒ 디엔에스 블록

(참고) [1] 김남희(2000). 교구 이용에 관한 교수학적 논의: 대수 모델의 활용 사례를 통한 교구의 효과 분석을 중심으로. 학교수학 2(1). 29-51. 대한수학교육학회. [2] 김남희(2000). 대수 타일을 이용한 수학 학습. 학교수학 2(1). 259-281. 대한수학교육학회.

디엔에스 효과/Dienes effect

디엔에스 효과는 수학 수업에서 교사가 자신의 노력과 무관한 심리학적 법칙이나 교수학의 효과에 의해 성공을 확신하면 할수록 수학 수업에서 실패할 가능성이 더 커지는 현상을 의미한다. 브루소(Guy Brousseau)가 이 현상의 원인을 디엔에스(Zoltan Paul Dienes)의 이론에서 찾을 수 있음을 빗대어 이렇게 불렀다. 디엔에스 이론은 학생들의 심리역학에 기초하고 있기에, 학생들은 교사가 제공한 구조화된 게임에서 구조의 유사성을 인식하고 추상화된 구조를 스스로 형식화해야 한다. 학생들의 심리역학 과정에 자신감을 갖는 교사일수록 학생들에게 활동지와 게임을 제공하는 것으로 만족하며, 예상한 효과, 일반화 혹은 바람직한 형식화가 일어날 때까지 기다린다. 그러나 실제로는 학생들에게 미치는 교사의 압력이 감소로 말미암아 예상한 효과, 일반화 혹은 바람직한 형식화는 나쁜 방향으로 일어나며, 결과적으로 교사는 수학 교수에 실패하게 된다. 그래서 수학 교수에서 교사의 노력이 반드시 필요한 것이다. 이러한 디엔에스 효과는 교사와 학생들 사이의 관계를 모든 수학 교수 이론

에서 통합할 필요성이 있다는 것을 말해 준다. ⇒ 심리역학

(참고) 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

디엔에스 블록/Dienes Block

디엔에스블록은 영국의 수학교육학자인 디엔에스(Zoltan Paul Dienes)가 기호를 사용하지 않고도 수학의 구조를 지도할 수 있도록 고안한 것으로, 현재 다양한 진법 체계를 구현할 수 있다는 의미에서 다진수블록(Multibase Arithmetic Block: MAB)이라 불리는 교구를 의미한다. 밑이 n인 n진수블록(base n block)은 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 단위블록(unit, 1), 단위블록 n개를 일렬로 연결하여 고장시킨 막대블록(long, $1\times n$), 막대블록 n개를 옆으로 붙인 정사각형 판 모양의 판 블록(flat, $n\times n$), 그리고 판 블록 n개를 쌓아올려 고정시킨 정육면체 모양의 블록(block, $n\times n\times n$)으로 구성된다. 초등학교에서 흔히 사용하는 것은 밑이 10인 십진수블록(base 10 block)이다. 딘즈블록은 위치적 기수법의 지도, 사칙계산의 기본 원리 지도, 십진법이외의 기수법에 대한 지도, 이차식의 완전제곱형 인수분해의 지도에 활용할 수 있다.

(참고). 김남희(1999). 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블럭. 학교수학 1(1). 305-324. 대한수학교육학회.

반영적 추상화/reflective abstraction, abstraction réfléchissante(프)

반영적 추상화는 피아제(Jean Piaget)가 논리·수학적 개념이 획득되는 과정을 나타내기 위해 사용한 용어이다. 피아제의 의하면 논리·수학적 개념은 대상으로부터의 단순 추상에 의한 정적인 이미지가 아니라, 대상에 대한 주체의 행동의 일반적인 조정으로부터 반영적 추상화에 의해 구성된 것이다. 반영적 추상화는 행동으로부터의 추상화로, 인식 주체로의 방향을 지향하고 있다. 반영적 추상화는 반사와 반성의 두 상보적인 과정으로 이루어진다. 인식 주체의 행동이나 조작인 '내용'을 상위의 수준으로 옮기는 것이 반사이고, 반사된 것을 '형식'으로 구성하는 것이 반성이다. 반성은 전단계에서 이전된 것을 새로운 면에서 재구성하거나 혹은 거기에 이미 놓여져 있는 것과 전단계의 요소를 관련짓는다는 의미이다. 반성에 의해 구성적으로 창조된 새로운 형식은 다음 단계의 반사 과정에서는 더 세련된 내용으로 기능하고, 그것이 다시 다음 단계의 반성 과정에서 더 새로운 형식으로 구성된다. 그리

고 결과적으로 끊임없는 반사와 반성의 순환이 이루어지게 된다. 반사의 과정은 내용에 대한 내면화에서 시작하여 주제화로 귀착된다. 주제화는 하위 단계에서 사고의 도구였던 것이 사고의 대상이 되는 것을 의미한다. 주제화가 이루어지기 위해서는 인식의 재료인 내용을 정신에 떠올리는 표상이 선행되어야 한다. 한편, 반성의 메커니즘은 반사로 인해 인지 체계가 맞이한 불균형 상태를 '동화-조절'과 '조작'을 통해 안정된 상태로 바꾸어 나가는 균형화이다. ⇒ 경험적 추상화

(참고) [1] 임재훈 · 홍진곤 (1998). 조작적 구성주의와 사회적 구성주의에서의 구성의 의미와 과정. 대한수학교육학회논문집 8(1). 299-312. [2] 우정호 · 홍진곤 (1999). 반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도. 수학교육학연구 9(2). 383-404. 대한수학교육학회. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부. [4] 김응태 · 박한식 · 우정호(2001). 수학교육학개론 (제2증보). 서울대학교출판부.

복제 장애/duplication obstacle

복제 장애는 두발(Raymond Duval)이 제시한 것으로, 어떤 교수 · 학습의 상황에서 한 요소가 이중으로 중복해서 나타나기 때문에 어려움을 겪는 현상을 의미한다. 이를테면, 두발은 12-13세의 학생들을 대상으로 자연수 전체의 집합과 짝수 전체의 집합을 비교하게 했다. 그리고 많은 학생들이 짝수 전체의 집합에 속하는 원소가 자연수 전체의 집합에도 속하는 것을 발견했다. 그런데 일부 학생들은 이러한 현상에 당혹해 했고, 결과적으로 그 비교를 할 수 없었다. 두발에 의하면, 비교를 하기 위해서는 똑같은 원소가 이중으로 존재할 수도 있다는 것을 인정해야 하기 때문에, 학생들은 자연수 전체의 집합과 짝수 전체의 집합 사이의 일대일대응을 받아들일 수 없는 것이다. 이러한 복제 장애는 특히 전조작기와 초기조작기의 아동에게 실제적인 직관적 어려움을 나타내며, 같은 유형의 장애가 형식적인 복잡한 과제와 관련하여 나이든 아동에게도 나타나는 것이다. 이러한 장애는 기하에서도 나타난다. 특히 증명을 할 때, 변, 각, 꼭지점 등 똑같은 요소를 한 번 이상 즉, 두 번, 세 번 존재하는 것처럼 고려하는데 있어서 곤란을 겪는 학생들이 있다. 나귀수는 이러한 현상이 학생들이 개념 학습에서 보여주는 개념의 고착화와 관련이 있는 것으로 보고 있다. 나귀수에 따르면, 학생들은 추상화하는 것의 어려움 때문에, 하나의 개념을 그 개념을 학습한 특정한 문맥에 고착시키며, 그로 인해 학생들이 획득한 개념은 그 범위가 매우 좁은 경향을 나타낸다. 그래서 나귀수의 입장에 서면, 결국은 학생들이 획득한 변, 각, 꼭지점 개념 등의 범위가 매우 좁아서, 그것을 한 번 이상 고려하는 것이 쉽지 않아 복제 장애가 나타나는 것이다.

(참고) [1] 나귀수(1997). 기하 개념의 이해와 적용에 관한 소고. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 349-358. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부. [3] Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

부정소(不定所)/indeterminate

부정소는 다가명사가 되는 문자 중에서 특별히 일반화된 패턴을 나타내는 문자를 의미한다. 이를테면 $(a+b)+c = a+(b+c)$에서의 a, b, c가 부정소이다. 방정식 $ax^2+bx+c = 0$, 함수 $y = ax^2+bx+c$에서 볼 수 있는 a, b, c도 부정소이다. 우정호(1998)에 의하면, 방정식 $ax^2+bx+c = 0$, 함수 $y = ax^2+bx+c$ 등에서 볼 수 있는 a, b, c를 상수(constant)라고 부르는 것은, 방정식의 미지수나 함수식, 일반적인 법칙이나 공식을 나타내는 부정소가 변수가 아니라는 오개념을 형성하게 할 수도 있다. 위의 식에서 a, b, c는 아직 정해지지 않은 상수를 일반적으로 나타내고 있는 부정소인 변수이며, 이것을 상수라고 지도하는 것은 잘못된 것이다. ⇒ 다가명사, 꼭두각시 변수

(참고) [1] 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부. [2] 김남희(1999). 학교 수학의 변수 개념 학습과 관련된 몇 가지 지도 문제에 대하여. 학교수학 1(1). 19-37. 대한수학교육학회.

사회수학적 규범/sociomathematical norms

사회수학적 규범(規範)은 수학적 이해에 영향을 주는 사회적 규범으로 '설명, 판단, 논쟁' 등에 대한 특수한 규범을 말한다. 사회수학적 규범은 교실의 사회적 과정과 개별 학생의 수학적 이해를 연결시켜준다. 사회수학적 규범은 수학적 교실 관행으로서, 일반적인 사회적 규범과는 다르다. 사회수학적 규범은 교실 문화 내에서의 수학적인 차이, 수학적인 세련성, 또는 수학적인 효율성을 구성하는 것에 대한 일관된 기대이다. 사회수학적 규범은 교실의 사회적 관행(social practices) 내에서 수학적 개념이 내포되는 과정을 이해하는데 도움이 된다. 교실에서의 사회수학적 규범의 개발은 성공적인 학생 중심의 수학 수업 실행에 결정적이다.

(참고) 전평국 · David Kirshner(1999). 초등학교 수학교실의 사회수학적 규범: 수학 지도에서의 개혁 상의 문제에 대한 한국과 미국의 관점 비교. 초등수학교육 3(2). 1-36. 한국수학교육학회.

상호 관찰/mutual observation

상호 관찰은 임상적 인터뷰(clinical interview)의 발전된 형태로 비참여 관찰, 참여 관찰을 넘어서, 연구자가 기록한 내용을 아동들에게 이야기하거나 아동들 스스로 읽도록 함으로써 연구자가 판단한 실제 내용이 실제 아동의 사고 과정과 일치하는지를 점검하는 형태의 관찰법이라 할 수 있다.

(참고) 정영옥(1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰: 초등학교의 알고리듬 학습을 중심으로. 수학교육학연구 9(1). 81-109. 대한수학교육학회.

생일문제/birthday problem

생일 문제는 직관과 전혀 다른 결과를 보이는 대표적인 문제이다. 이 문제는 대체로 다음과 같다. <1년은 365일이고, 생일은 그 365일 중의 하루이므로, 366명 이상의 학생이 있다고 하면, 그 중에는 반드시 생일이 같은 사람이 있을 것이다. 즉, 366 명 이상의 학생이 있을 때, 그 학생들 모두의 생일이 다를 확률은 0이며, 적어도 두 명 이상의 학생의 생일이 같을 확률은 1이다. 그러면, 두 명 이상의 생일이 같을 확률이 0.5가 되기 위해서는 적어도 몇 명의 학생을 조사해 보아야 하는가?> 언뜻 보면 상당히 많은 수의 학생을 조사해야 한다고 생각할 수 있다. 그러나, 실제로는 고작 23명 정도만 조사하면 된다. 만약, A, B 두 사람이 있다고 하자. 이 두 사람의 생일이 서로 다를 확률을 구해보자. 1년이 365일이므로, A의 생일은 365일 중의 어느 하루일 것이다. B의 생일이 A의 생일과 같지 않으려면, B의 생일은 A의 생일을 제외한 364일 중의 어느 하루이어야 한다. 그리고 그 확률은 364/365 ≒ 0.9973이다. A, B, C의 세 사람이 있다고 하다. 이 세 사람의 생일이 서로 다르기 위해서는, 먼저 B의 생일은 A의 생일을 제외한 364일 중의 어느 하루이어야 한다. C의 생일은 A, B의 생일을 제외한 363일 중의 어느 하루이어야 한다. 따라서, A, B, C 세 사람의 생일이 다를 확률은 (364/365)×(363/365) ≒ 0.9918이다. 같은 방법으로 4 사람, 5 사람, ...의 생일이 서로 다를 확률을 구할 수 있다. 특히, 23명의 사람이 있을 때, 그 23명 모두의 생일이 서로 다를 확률은 (364/365)×(363/365)×...×(343/365) ≒ 0.4917이다. 즉, 23명이 있는 경우, 23명 모두의 생일이 다를 확률은 0.5보다 약간 작다. 23명 모두의 생일이 다르다는 것의 여사건은, 적어도 2명의 생일이 같다는 것이다. 따라서, 적어도 23명 중 적어도 2명의 생일이 같을 확률은 0.5보다 약간 크다고 할 수 있다. 이것은 평균적으로 23명의 학생 중에는 적어도 2명 이상의 학생의 생일이 같을 확률이 약 0.5라는 것을 의미한다. 따라서, 23명 이상의 학생들이 있는 경우, 적어도 2명 이상의 생일이 같을 확률은 점점 더 커지게 된다. 30명의 학생들이 있는 경우, 30명 모두의 생일이 다를 확률은 (364/365)×(363/365)×...×(336/365) ≒

0.2682이다. 즉, 그 확률은 0.3보다 작다. 따라서, 30명 중 적어도 2명 이상의 생일이 같을 확률은 0.7보다 크다.

(참고) Higgins, P. M. (1998). Mathematics for the Curious. Oxford: Oxford University Press.

수학 영재(아)/mathematically gifted children

김홍원 등은 수학 영재를 수학 영역에서 뛰어난 업적을 이루었거나 이룰 것으로 예상되는 사람으로, 수학적 사고 능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성, 배경 지식의 요인에서 평균 이상의 높은 능력을 지닌 사람으로 정의하고 있다. 수학적 사고 능력은 수학 문제를 이해하고 해결하는데 기본적으로 요구되는 사고 능력으로 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 수학적 추론 능력(연역적 사고 능력, 귀납적 사고 능력), 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고 능력 등을 포함한다. 과제 집착력은 일정 시간 동안 끈기 있게 수학 문제에 몰두하는 능력이다. 이 능력은 수학에 대한 흥미와 태도, 인내심, 지속성, 집중성, 자기 신뢰감과 관련이 있다. 수학적 창의성은 수학적 문제 상황에서 고정된 사고 방식을 탈피하여 창의적으로 문제를 해결하는 능력이다. 이 능력에는 유창성, 융통성, 독창성, 정교성이 포함된다. 배경 지식은 수학 문제를 해결하는데 필요한 수학 지식과 다른 영역의 지식이다. 다른 영역의 지식은 수학 문제를 해결하는데 영향을 미치는 지식을 의미한다. ⇒ 수학적 창의력

(참고) [1] 김홍원 · 김명숙 · 송상헌(1996), 수학 영재 판별 도구 개발 연구(I): 기초 연구 편. 한국교육개발원. [2] 김홍원 · 김명숙 · 방승진 · 황동주(1997). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(II): 검사 제작 연구 편. 한국교육개발원. [3] 나귀수(1999). 수학 영재 교육에 대한 개관. 학교수학 1(2). 785-797. 대한수학교육학회. [4] 송상헌(2000). 수학 영재아들을 위한 행동 특성 검사지의 개발과 활용에 관한 연구. 학교수학 2(2). 427-457. 대한수학교육학회.

수학과 수행평가/performance assessment in mathematics

성태제 · 권오남은 수학과 수행평가를 '수학적 사고 능력이나 문제해결 능력 등을 평가하기 위하여, 학습자가 지니고 있는 수학적 지식이나 수학과 관련된 기능을 얼마나 알고 있으며, 얼마나 잘 수행(performing)하는가와 어떻게 잘 수행할(how to perform) 것인가를 총체적으로 평가하는 방법'으로 정의하고 있다. 그리고 이러한 수학과 수행평가의 특징으로 다음 9가지를 들고 있다: (1) 수학적 지식과 방법을 사용하여 나타난 활동과 산출물로 평가한

다. (2) 문제해결의 과정이 드러나도록 하여 평가한다. (3). 창의력이나 논리적 사고 등과 같은 고차적 정신 능력을 평가한다. (4) 과정 중심적이고 평가 지향적인 채점 방법을 사용하여 평가한다. (5) 실제 생활과 밀접한 관련이 있는 문제 상황에서 평가한다. (6) 수행평가에서는 협동학습과 개별학습이 평가와 병행하여 이루어진다. (7) 평가가 수업의 과정 속에서 이루어진다. (8) 학생들은 수행평가를 위해 한두 시간에서 몇 일에 걸치는 프로젝트나 탐구 과제를 수행한다. (9) 자와 컴퍼스 등과 같은 교구, 컴퓨터와 계산기 등과 같은 실생활적인 도구(realistic tools), 구체적인 조작물(manipulative)을 사용할 수 있다.

(참고) [1] 박미숙 · 류희찬(1999). 중학교 2학년용 수학 수행평가 문항 개발 및 적용에 관한 연구: 서술형과 실험 · 실습형을 중심으로. 학교수학 1(1). 187-216. 대한수학교육학회. [2] 성태제 · 권오남(1999). 수학과 학업성취도 평가를 위한 수행평가의 과제와 전망. 학교수학 1(1). 217-234. 대한수학교육학회. [3] 임재훈(1999). 수행평가, 필요한가? 그리고 가능한가? 학교수학 1(1). 325-330. 대한수학교육학회. [4] 최승현(1999). 수학과 수행평가의 개관. 학교수학 1(1). 331-349. 대한수학교육학회. [5] 박경미 · 임재훈(1999). 수학과 수행평가 프로젝트법의 의의와 실제. 학교수학 1(2). 723-745. 대한수학교육학회. [6] 정영옥(2000). 초등수학과 수행평가 도구 개발: 1, 2학년 포트폴리오를 중심으로. 학교수학 2(2). 357-388. 대한수학교육학회.

수학적 모델링/mathematical modelling

디킨(M. Deakin)에 의하면, 수학적 모델링은 어떤 구체적인 문제(구체적인 상황을 포함하는)를 적절히 수학적으로 표현해 주는 수학적 모델을 만드는 일련의 과정을 의미하는 것으로 보인다. 구체적인 문제의 전형적인 한 예를 P(prototype)라 하고, 그것의 한 수학적 모델을 M(model)이라고 하면, P와 M사이에는 일종의 사상(mapping) 관계가 설정된다. 실생활적인 어떤 문제가 있을 때, 그것을 수학 문제로 바꿀 수 있다. 이 때 이 수학 문제가 수학적 모델이다. 그러나 이 단계에서 만들어진 모델은 사실상 가모델이다. 왜냐하면, 그 수학 문제를 풀어서 얻은 답을 다시 실생활적인 표현으로 바꾸고, 그리고 그 답이 실생활 맥락에서 합리적인지 점검하는 것이 필요하기 때문이다. 이 네 활동을 온전히 거쳐야 비로소 모델이라 할 수 있다. 이 네 활동을 각각 문제 제기하기(pose), 모델 만들기(model), 모델 분석하기(analyse), 결과 해석하기(interpret)라고 한다. 즉, 수학적 모델링은 이 네 활동이 이어지는 P에서 M으로의 사상 과정이라고 할 수 있다. 한편, 블룸과 베리(W. Blum & J. S. Berry)는 수학적 모델링의 특징으로 사상성(mapping property), 단축성(shortening property), 그리고 실용성(pragmatic property)의 세 가지를 들고 있다. 수학적 모델링이 P에서 M으로의 사상이기에 사상성을 그 특징으로 든 것이고, 또 이러한 사상의 과정에서 P의 요소 가운데 중요하지 않은 것을 배제하기에 단축성을 그 특징으로 든 것이다. 또한, 모

델은 여러 개가 만들어질 수 있고, 각각의 모델은 목적에 따라 유용하게 이용되기에 실용성을 특징으로 들고 있는 것이다. 수학적 모델링은 모델을 만들고자 하는 사람(즉, 실생활적인 문제를 해결하고자 하는 사람)의 경험과 능력에 따라 서로 다른 형태로 나타날 수 있다. 이러한 경험과 능력을 직관적 토대(intuitive base)라고 한다. 문제해결자의 직관적 토대에 따라 수학적 모델링의 방법이 달라지게 되는데, 그것은 다시 전문적인 수학적 복잡성의 정도에 따라 대상 모델링, 경험적 모델링, 이론적 모델링으로 구분된다.

(참고) 조완영 · 권성룡(1998). 열린수학교육과 모델링. 대한수학교육학회논문집 8(2). 663-677.

수학적 소양/mathematical literacy

박경미에 의하면, 경제협력개발기구(Organization for Economic Cooperation and Development; OECD)의 교육 분과가 주관하는 국제비교연구인 PISA 학생성취도 지표개발 연구(programme for development of student achievement indicators; Programme for International Student Assessment)에서는 수학적 소양을 '개인이 건설적이고 사려 깊고 반성적인 시민으로 현재와 미래의 삶을 살아가는데 요구되는 능력으로, 우리가 살아가는 세상에서 수학이 하는 역할을 확인하고 이해하고 수행하고 올바르게 판단할 수 있는 능력'으로 정의하고 있다. 박경미에 의하면, 이 정의에는 태도, 감정, 자신감, 호기심, 흥미, 관련성의 인식 등의 요소는 수학적 소양의 배경이 되므로 중요하게 취급된다. 여기서 소양(literacy)은 전통적인 학교수학 교육과정에서 찾아볼 수 있는 수학적 지식과 기능뿐만 아니라, 그 이상의 것을 추구한다는 측면에서 선택된 용어이다. 수학적 소양은 수학의 용어, 기호, 절차, 연산뿐만 아니라 다양한 상황을 배경으로 하며, 반성적 사고와 통찰이 요구되는 다차원적인 수학적 지식과 기능에 초점을 맞추고 있다.

(참고) 박경미(1999). OECD/PISA 학생성취도 지표 개발 연구의 소개. 학교수학 1(1). 367-382. 대한수학교육학회.

수학적 창의력/mathematical creativity

이대현 · 박배훈은 수학적 창의력을 '수학적인 문제 상황에서 학습자가 기지(旣知)의 사실이나 스스로 창안한 전략이나 방법을 이용하여 새롭고 가치 있는 결과(문제해결)로 산출해 내는 능력'이라고 정의하고 있다. 또 권오남 등은 '개방된 수학적 상황이나 문제에서 고착화되고 정형화된 사고로부터 벗어나 수학의 논리-연역적인 성격을 고려하면서 기발(奇拔)하

고 독창적인 방법으로 문제를 풀고 구조적으로 사고하는 능력'이라고 정의하고 있다. 그리고 유창성(fluency), 융통성(flexibility), 독창성(originality), 정교성(elaboration)을 그 하위 요소로 보고 있다. 유창성은 문제 상황에서 의미 있는 여러 가지 반응이나 아이디어를 산출하는 능력으로 의미 있는 반응의 개수로 판별될 수 있다. 융통성은 서로 다른 범주 및 유형의 아이디어를 산출하는 능력으로 반응의 유형별 가지 수로 판별될 수 있다. 독창성은 다른 사람들과는 다른 아이디어를 산출하는 능력으로 반응의 통계적 희소성(稀少性)으로 판별될 수 있다. 정교성은 산출된 결과를 보다 구체화하고 세밀하게 다듬어 내는 능력이다.

(참고) [1] 이대현 · 박배훈(1998), 수학적 창의력에 대한 소고, 대한수학교육학회논문집 8(2). 679-690. [2] 권오남 · 송상헌 · 박경미 · 임형 · 허라금(1998), 수학적 창의력에서의 성별 차이에 관한 연구: 다답형 문항에 대한 반응을 중심으로, 대한수학교육학회논문집 8(2). 723-743.

시각화/visualization

문광호 · 우정호에 의하면, 짐머만과 커닝엄((W. Zimmermann & S. Cunningham)은 시각화를 '손으로 그리든, 컴퓨터를 이용하든 관계없이 수학적 개념 · 원리 · 문제를 기하학적으로 또는 그래프로 표현하거나, 그렇게 표현된 것을 이용하는 것'으로 정의하고 있다. 문광호 · 우정호에 의하면, 시각화의 대표적인 유형으로는 기호로 나타내어진 수학적 내용을 도해의 형태로 제시한 정적인 것과 컴퓨터 소프트웨어나 영화를 이용한 동영상과 같은 동적인 것이 있다. 특히, 컴퓨터 소프트웨어는 학생들에게 역동적인 동영상을 통해 수학의 불변성을 보여줄 수 있다는 측면에서 수학의 시각화를 돕는 매우 뛰어난 도구이다. 그러나 컴퓨터 소프트웨어를 이용하는 상황에서 강렬한 시각적 자극으로 수학적 사고가 어렵게 되고, 학생들이 주어진 과제를 해결하기 위해 도입된 시각적 수단에 대한 조작에 몰입하게 되어 소위 메타 인지적 이동이 일어날 수도 있다.

(참고) 문광호 · 우정호(1999). 중 · 고등학교 수학의 시각화. 학교수학 1(1). 135-156. 대한수학교육학회.

실생활 프로젝트형 프로젝트

박경미 · 임재훈에 의하면, 실생활 문제해결형 프로젝트는 실생활에서 일상적으로 접하게 되는 상황을 수학적 개념과 방법을 이용하여 해결하는 프로젝트를 의미한다. 이 프로젝트는 수학 교과서에 제시된 문장제보다 풍부한 맥락 속에서 문제 상황이 설정되며, 그 해결에 수반되는 사고 과정도 복합적이다. 이 프로젝트는 개인적인 차원에서 수행할 수도 있지만, 여

러 명이 소집단을 이루어 협동학습을 통해 수행할 수도 있다. 하루 이틀의 단기간이 아니라 1주일 이상의 장시간을 요할 수도 있다. 또, 계산의 복잡성을 고려하여 계산기나 컴퓨터 등의 공학 도구를 이용할 수 있기 때문에 교과서 문제가 갖는 여러 제한에서 어느 정도 자유로울 수 있다. ⇒ 프로젝트법, 수학과 수행평가

(참고) 박경미 · 임재훈(1999). 수학과 수행평가 프로젝트법의 의의와 실제. 학교수학 1(2). 723-745. 대한수학교육학회.

실험 교수 방법/teaching experiment methodology

실험 교수 방법은 학생들의 머리 속에서 이루어지는 실제의 수학적인 작용의 과정(이하, 학생들의 수학)과 수학을 가르치는 환경에서 학생들이 수학을 구성하는 과정을 알기 위해 고안된 연구 방법이다. 이 방법은 구성주의자들이 주로 사용하는 방법으로 1970년대 초반부터 스테피(L. P. Steffe)를 중심으로 도입되기 시작했다. 실험이란 학생들의 수학을 연구하는 연구자가 학생들의 수학에 대하여 가정을 하고, 학생들과 직접 상호 작용을 통해 앞서 가정했던 것을 확인한다는 의미이다. 실험 교수에서 연구자가 학생들을 직접적으로 가르치는 것은 아니다. 학생들은 교수 · 학습의 과정에 능동적으로 참여하며 연구자와 함께 수학적인 의미를 만들어 나간다. 즉, 학생들은 나름대로의 수학을 만들어 가고 구성해 간다. 사실상, 연구자는 학생들의 수학 실체(實體)에 대해서 정확하게 알 수는 없고, 단지 연구자의 입장에서 보는 학생들의 수학을 말할 수 있다. 연구자가 생각하는 학생들의 수학은 학생들의 머리 속에서 이루어지는 실제의 수학과 맞아 들어가는 것일 뿐, 정확히 똑같은 것은 아니다. 연구자가 생각하는 학생들의 수학은 학생들의 머리 속에서 일어나는 수학 그 자체가 아니라, 하나의 준동형적(準同形的)인 함수 관계를 갖는 모델일 뿐이다. 따라서 더 잘 맞아 들어가는 모델을 만들기 위해서는 실험 교수를 계속하여 모델을 수정 · 보완해 가야 한다. 실험 교수의 단계는 크게 네 단계로 이루어진다. 첫째, 연구자는 면밀한 관찰과 상호 작용을 통해 가정한 학생들의 현재의 잠재 구성 영역(zone of potential construction)에 기초하여, 다음 실험 교수의 학습 상황과 학생들과 함께 하는 과제를 결정한다. 둘째, 연구자는 한 학생 또는 소그룹의 학생들과 교사로서 상호 작용하는 상황을 비디오로 녹화한다. 셋째, 연구자는 학생들과 상호 작용을 하는 바로 그 순간 그 장소에서 학생들이 쓰는 언어나 행동을 해석하고, 바로 그 순간에 어떠한 상황을 만들어가야 하고, 어떠한 결정적인 질문을 하여 학생들을 격려하고, 학생들에게 어떠한 인지적인 불균형 상황을 줄 것인가를 결정한다. 넷째, 연구자는 이전의 실험 교수의 상황에서 학생들의 언어나 행동에 근거한 연구팀의 종합

적인 해석에 기초하여 학생들의 현 지식에 관한 연구자의 지식을 역동적으로 조정하는 이차적 모델을 구축한다.

(참고) 박만구(1999). 구성주의자의 실험 교수. 학교수학 1(2). 513-528. 대한수학교육학회.

예상 직관/anticipatory intuition

예상 직관은, 피시바인(Efraim Fischbein)이 직관을 그 역할과 관련해서 구분한 네 가지 중의 하나로서, 결론적 직관(conclusive intuition)과 함께, 문제해결 직관(problem solving intuition)으로 묶을 수 있다. 예상 직관은 문제에 대한 분석적인 풀이에 앞선 예비적인 전체적 견해를 의미하는 것으로, 분석적 노력이 반드시 뒤따르는 문제해결 활동의 한 단계를 나타낸다. 그러나 추측 직관(conjectural intuition)은 체계적인 문제해결 활동에 포함되지 않는 활동이다. 문제해결 활동을 하는 동안에 계시적으로 떠오르는 확실하고 명백하며 참인 것으로 간주되는 추측이 예상 직관이다. 예상 직관은 특별한 문제에 대한 예비적인 해로서, 현존하는 단정적 직관에 의해서 고무되고 지시되고 자극되거나 방해를 받는다. ⇒ 단정적 직관, 추측 직관, 결론적 직관

(참고) [1] 류희찬 · 류성림(1997). 수학교육에서의 직관에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 103-116. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부. [3] Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

의사개념적 행동/pseudo conceptual behavior

의사개념적 행동은 비너(S. Vinner)가 제시한 것으로 의사지식의 사용으로 인해 나타날 수 있는 전형적인 행동이다. 의사개념적 행동은 수학 교수 · 학습의 과정에서 교사와 학생이 어떤 수학적 개념에 대해 논의하게 되는 상황에서 주로 발생하는 것으로, 학생이 그 개념에 걸 맞는 용어와 전형적인 문구를 사용하면서 마치 그 개념에 대해 잘 알고 있는 듯한 인상을 주는데 성공한 행동을 의미한다. 비너에 의하면, 이와 같이 가장된 행동은 잠재적 기만(potential deceit)이다. 또, 거짓 개념적 행동은 의사개념적 사고 양식(pseudo conceptual mode of thinking)에 의해 행해진다. 어떤 수학적 개념에 대해 논의할 때, 학생들이 그 개념에 대해 진정으로 잘 알고 있고, 그리고 그것에 근거해서 올바르게 논의한다면, 그러한 논의는 참 개념적 사고 양식(true conceptual mode of thinking)에 의한 것이다. 그렇지 않음에도 불구하고 학생들이 단지 외적으로만 올바르게 보이는 논의를 한다면, 그것은 의사개

념적 사고 양식에 의한 것이다. ⇒ 의사지식, 의사개념적 행동

(참고) 김남희(1997). Vinner 이론에 따른 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동에 관한 소고. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 337-348.

의사분석적 행동/pseudo analytical behavior

의사분석적 행동은 비너(S. Vinner)가 제시한 것으로 의사지식의 사용으로 인해 나타날 수 있는 전형적인 행동이다. 의사분석적 행동은 학생들이 틀에 박힌 일상적인 수학 문제를 해결하는 장면에서 주로 나타나는 것으로, 학생들이 문제의 유형과 구조를 올바르게 파악하고, 적절한 절차를 선택하여 문제를 해결하지 못했음에도 불구하고, 마치 그와 같은 사고 과정을 거쳐 문제를 해결하고 있는 듯한 인상을 주는데 성공한 행동을 의미한다. 비너에 의하면, 의사분석적 행동은 의사분석적 사고 양식(pseudo analytical mode of thinking)에 의해 행해진다. 문제의 유형과 구조를 올바르게 파악하고, 적절한 절차를 선택할 수 있다면, 그러한 문제해결은 참 분석적 사고 양식(true analytical mode of thinking)에 의한 것이다. 그렇지 않고, 참 분석적인 사고 과정에 따른 문제해결에 대한 어슴푸레한 기억, 서투른 단정, 모호한 절차에 따랐으면서도 올바른 답을 산출하고 있다면, 그것은 의사분석적 사고 양식에 의한 것이다. ⇒ 의사지식, 의사개념적 행동

(참고) 김남희(1997). Vinner 이론에 따른 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동에 관한 소고. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 337-348.

의사지식/pseudo-knowledge

의사지식은 비너(S. Vinner)가 제시한 개념으로, 수학 교수·학습의 과정에서 학생들은 어떤 것에 대해 실제로 참 지식(true knowledge)을 소유하고 있지 못하고 있음에도 불구하고, 교사 또는 다른 평가 체계로부터 참 지식을 가지고 있는 것으로 인정을 받을 수 있도록 하는데 사용된 지식이다. 즉, 교사는 의사지식에 바탕을 둔 학생들의 행동을 보고, 학생들이 참 지식을 가지고 있다고 인정하게 되는 것이다. 그러나 학생들이 보여주는 행동은 사실상 그들이 참 지식을 가지고 있음을 나타내는 징표가 아니다. 다만, 학생들은 자신들이 참 지식을 갖고 있는 것처럼 가장한 것이며, 교사가 거기에 속은 것이다. 이때 학생들이 교사를 의도적으로 속이는 경우도 있을 수 있지만, 그렇지 않은 경우도 있다. 비너는 참 지식에 의해 얻어져야 할 인정이 의사지식에 의해서도 얻어질 수 있다는 것이 교육 체계의 큰 문제

점의 하나라고 지적하고 있다. 비너에 따르면, 의사지식의 사용으로 인해 나타날 수 있는 전형적인 행동으로 의사개념적 행동(pseudo conceptual behavior)과 의사분석적 행동(pseudo analytical behavior)이 있다. ⇒ 의사개념적 행동, 의사분석적 행동

(참고) 김남희(1997). Vinner 이론에 따른 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동에 관한 소고. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 337-348.

이차적 직관/secondary intuition

초보적 직관은, 피시바인(Efraim Fischbein)이 직관을 그 기원과 관련해서 구분한 두 가지 중의 하나로서, 체계적인 교육의 영향으로 창안된 새로운 인지적 신념이다. 이차적 직관은 자연스런 경험이 아닌 교육적 간섭을 통해 획득된 개념으로부터 전환된 신념이다. 이차적 직관의 창안은, 각각의 인지가 필연적이고 예견적인, 그리고 나중에는, 확립된 표상(representation)의 역할을 하는 활동에서, 학습자가 개인적으로 관여할 때 일어난다. ⇒ 초보적 직관

(참고) [1] 류희찬 · 류성림(1997). 수학교육에서의 직관에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 103-116. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부. [3] Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

인식론적 장애/epistemological obstacle

인식론적 장애는 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용하였던 지식으로, 따라서 학생의 인지 구조의 일부가 되었지만, 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해 진 지식을 의미한다. 수학 학습에서의 인식론적 장애는 브루소(Guy Brousseau)가 제안한 것으로, 그의 교수학적 상황론의 핵심적인 개념의 하나이다. 인식론적 장애는 학습하고자 하는 지식의 본성에 기인하는 것이므로 피할 수 없는 것으로서, 새로운 지식이 성장 · 발달하기 위해서는 반드시 극복해야 하는 장애이다. 수학의 역사적 발생 과정에서 나타난 인식론적 장애가 학생들에게도 매우 유사하게 나타난다는 것이 확인되고 있다. 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인으로는 일상어, 직관, 과도한 일반화, 은유 등을 생각할 수 있다. 그러나 이 요인은 지식의 본질과 밀접히 관련된 불가피한 것으로 피할 수도 없고, 피해서도 안 되는 것이다. 대신 이를 조절하고 제어하는 능력을 개발하는 것이 필요하다.

(참고) [1] 이종희(1999). 함수 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. 수학교육학연구 9(1). 133-150. 대한수학교육학회. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부. [3] Brousseau, Guy(1997). Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield (ed. & trans). Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématique, 1970-1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

인지적 갈등 요인/cognitive conflict factor

학생들이 이미 배운 개념을 사용할 때, 대부분의 경우, 개념 정의에 근거하기보다는 개념 이미지에 근거한다. 따라서 개념 정의가 학생들의 개념 이미지가 되지 못했다면, 이들 사이에 갈등이 생겨날 수밖에 없다. 그리고 이러한 갈등의 일부는 개인이 의식하지 못할 수도 있어서 공식적인 수학 이론을 학습하는데 혼란을 야기할 수도 있다. 특히, 개념 이미지나 개념 정의의 일부 요인이 다른 쪽과 갈등을 일으킬 수 있는 경우, 그러한 요인을 잠재적 갈등 요인(potentially conflict factor)이라고 한다. 또, 그러한 요인이 어떤 특정한 시기에 활성화될 때, 그것을 인지적 갈등 요인(cognitive conflict factor)라고 한다. 개념의 올바른 학습을 위해서는 잠재적 갈등 요인을 확인하고, 그리고 그것이 인지적 갈등 요인으로 나타나지 않도록 주의를 기울이게 하는 것이 필요하다. 특히, 잠재적 갈등 요인 중에서 가장 심각한 유형은 개념 정의 그 자체와 갈등을 일으키는 요인이다. 사실 개념 정의 그 자체와 갈등을 일으키는 요인이 학생들의 개념 이미지에게 잠재해 있을 가능성이 높다, 왜냐하면, 공식적인 개념 정의가 개인에 의해 내면화되고, 자신의 인지 구조와 동화 조절을 거치지 않은 채 그대로 남아 있게 되면, 시간이 흐른 후에 그 개념 정의가 잊혀지거나, 또는 개념 이미지의 영향으로 왜곡·변형될 수 있기 때문이다. ⇒ 개념 이미지, 개념 정의

(참고) [1] 박선화(1993). 개념 학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰: 개념 정의와 개념 이미지의 관계를 중심으로. 대한수학교육학회논문집 3(1). 185-194. [2] 권오남·조현정(1997). 극한(limit)에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집 7(1). 211-229.

자기 평가/self assessment

학생들이 자신의 수학적 지식, 과정 및 태도를 학습하고, 이해하고, 그리고 조사하는데 있어서 자신의 진보를 능동적으로 모니터(monitor)하는 과정이 흔히 자기 평가라고 불린다. 케니와 실버(Patricia Ann Kenny & Edward A. Silver)에 의하면, 자기 평가는 자기 자각(self awareness)과 self evaluation의 두 요소로 이루어진다. 자기 자각은 자신이 알고 있는 것에 관해 아는 것으로, 자신의 수학적 지식, 과정, 전략 및 태도의 레퍼토리를 자세히 살펴

보는 것을 포함한다. self evaluation은 자신이 무엇인가를 할 때 자기가 하고 있는 것을 통제하고 모니터하는 것으로, 자기 자각을 넘어 자신의 수학적 지식, 과정 및 성향을 비판적으로 보는 것을 포함한다. (self evaluation은 번역하기가 어렵다. evaluation 역시 '평가'로 번역되어 왔기 때문이다. 최승현은 이것을 '자신 평가'라고 번역하고 있다.)

(참고) [1] 최승현(1999). 수학교과에서의 자기 평가. 학교수학 1(1). 123-133. 대한수학교육학회. [2] Kenny P. A. & Silver, E. A. (1993). Student Self-Assessment in Mathematics. In N. L. Webb & A. F. Coxford (Eds.). Assessment in the Mathematics Classroom. 229-238. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics..

자르고 붙이는 기하/cut-and paste geometry

고대 바빌로니아 사람들이 방정식을 풀 때는 기하학적인 개념을 부차적으로 사용한 것으로 알려져 있다. 노이게바우어(O. Neugebauer)의 이러한 주장에 대해, 최근에 호이럽(J. Høyrup)은 그렇지 않다는 주장을 하고 있다. 호이럽에 의하면, 고대 바빌로니아에서의 방정식 풀이 과정이나 그 배경에는 비연역적인 기하학이 있다. 유클리드가 확립한 연역적인 기하학을 이용한 것이 아니라, 단지 도형을 적당히 자르고, 또 그것을 도형의 다른 부분에 적당히 옮겨 붙이는 소박한 기하학을 이용한 것이다. 이를테면 바빌로니아 점토판에서 정사각형과 그것의 한 변의 길이의 합이 3/4이라는 문제와 그것의 해결 과정을 볼 수 있다. 호이럽에 의하면, 바빌로니아 사람들은 주어진 정사각형(한 변의 길이가 x라고 하자)에 $1\times x$의 직사각형을 붙이고, 그것을 반으로 자른 직사각형(즉, $x\times ½$)을 정사각형의 다른 한 변에 붙였다. 다시 그것에 $½\times½$인 정사각형을 덧붙여 정사각형을 만들면 전체는 1×1인 정사각형이 된다. 따라서 x의 값은 ½이 된다. 이 과정에서 도형을 자르고 붙이기 때문에 '자르고 붙이는 기하(cut-and-paste geometry)'라고 한다. 유현주(1999)에 의하면, 자르고 붙이는 기하는 방정식을 지도하는 초기 단계에서 그 나름대로 장점을 가질 수 있다.

(참고) [1] 유현주(1999). 수학사와 수학교육. 학교수학 1(1). 245-259. 대한수학교육학회. [2] Radford, Luis(1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. N. Bednarz, C. Kieran. & L. Lee (eds.). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

재스퍼 시리즈/Jasper series

재스퍼 시리즈는 미국 Vandertbilt 대학교의 LTC(Learning Technology Center)가 구성

주의적 입장에서 학생들로 하여금 실제 상황에 처해진 모험을 통해, 문제해결력을 계발·향상시켜 논리적인 추론을 하도록 동기 유발시키기 위하여 제작한 비디오디스크 포맷의 멀티미디어 프로그램이다. 재스퍼 시리즈의 정식 이름은 Adventures of Jasper Woodbury이다. 재스퍼 시리즈는 초등학교 5학년 이상의 학생들을 위하여 제작되었으며, ① 거리·비율·시간, ② 통계와 확률, ③ 기하, ④ 대수의 4개 영역에 3개씩 총 12개의 모험으로 구성되어 있다. 각 모험은 15분 내지 20분 가량의 이야기 형식으로 구성되며, 이야기 끝 부분에서 주인공이 직면한 문제를 학생들이 해결하도록 유도하고 있다.

(참고). 김민경(2000). 수학교육용 멀티미디어 개발에 관한 연구: Jasper 시리즈 사례를 중심으로. 수학교육 39(1). 59-69. 한국수학교육학회.

전형식적 증명/preformal proof

류성림에 의하면, 전형식적 증명은 블룸과 커시(W. Blum & K. Kirsh)가 사용한 언어로, 올바른 증명이지만 형식적으로 표현되지 않는 일련의 추론을 의미한다. 이러한 추론에서 결론은 타당한 것이긴 하지만, 비형식적 전제를 기반으로 한다. 이를테면, 구체적으로 주어진 실생활의 대상, 기하적-직관적 사실, 실생활과 관련된 기본적인 아이디어, 또는 직관적으로 분명한 것으로 '공통적으로 이해할 수 있다', '심리적으로 분명하다'와 같은 언어 표현 등이 포함된다. 수학적 귀납법과 간접적 증명(' ...라고 가정하면', ' ...라면 어떻게 될 것인가')도 포함된다. 한편, 류성림(1998)에 따르면, 전형식적 증명은 적절한 조작적, 기하적 표현을 이용하여 이것을 일반적인 근거로 받아들이는 증명이다. 또, 적절한 예 또는 모델 내에서 이루어지는 증명으로, 형식적 증명을 생성하거나 확신시키기도 하고, 정리의 의미를 더욱 명확히 이해하도록 도우며, 학생들이 심리적으로 자연스럽게 할 수 있는 증명이다. 이러한 전형식적 증명은 조작적 증명(action proof), 기하적-시각적 증명(geometric-intuitive proof), 실생활과 관련된 증명(reality oriented proof), 범례에 의한 증명(proof by generalization from paradigm)의 네 가지가 있다. 전형식적 증명 대신 전수학적 증명, 조작적 증명, 구체적 증명, 내용적-직관적 증명이라고 할 때도 있다.

(참고) 류성림(1998). 전형식적 증명의 의미와 교수학적 의의에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집 8(1). 313-326.

제3차 수학·과학 성취도 국제 비교 반복 연구/TIMSS-R

제3차 수학·과학 성취도 국제 비교 반복 연구(Third International Mathematics and Science Study-Repeat)는 국제 교육 성취도 평가 협회(International Association for the Evaluation of Educational Achievement: IEA)가 주관하고, 우리 나라를 비롯한 40개국이 참여하는 교육 성취도 국제 비교 연구이다. 이 연구에서는 제3차 수학·과학 성취도 국제비교 연구(TIMSS)의 본 검사가 실시된 1994년의 13세 학생의 성취도와 TIMSS-R의 본 검사가 실시된 1999년 2월의 13세 학생의 성취도 추이를 비교·분석한다. 우리 나라에서는 TIMSS-R 본 검사를 위해 150개 학교의 150 학급에서 학생 6500명이 표집되었다.

(참고) 임형(1999). 제3차 수학·과학 성취도 국제 비교 반복 연구의 개요. 학교수학 1(1). 383-389. 대한수학교육학회.

조작적 개념 작용/operational conception

스파드(Anna Sfard)는 수학적 개념(mathematical concept)이 한편으로는 조작적이고, 다른 한 편으로는 구조적(structural)이라고 보고 있다. 또, 수학적 개념에 상응하는 사람들의 내적 표상(representation)을 수학적 개념 작용(mathematical conception)이라 하고 있다. 개념과 마찬가지로 개념 작용도 이중적이다. 그래서 그는 개념의 조작적 본성과 구조적 본성에 대한 표상을 각각 조작적 개념 작용, 구조적 개념 작용(structural conception)이라 하고 있다. 이 두 가지 개념 작용은 수학의 역사적 발달과 개인의 개념 형성 과정 모두에 개재된다. 조작적 개념 작용은 수학적 실재(entity)를 어떤 과정(process)의 산물(product)로 생각하거나, 또는 과정 그 자체와 동일시하는 것이다. 그래서 조작적 개념 작용은 동적이고, 계열적이며, 상세하다(detailed). 조작적 개념 작용에서는 내적 표상이 언어적(verbal) 표상의 지원을 받는다. 또, 조작적 개념 작용은 개념 형성의 첫 단계에서 전개되는 것으로, 문제해결과 학습을 위해 필요하지만, 문제해결과 학습에서 그것만으로 충분하지는 않다. ⇒ 구조적 개념 작용

(참고) Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Process and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics 22(1). 1-36.

초보적 직관/primary intuition

초보적 직관은, 피시바인(Efraim Fischbein)이 직관을 그 기원과 관련해서 구분한 두 가지 중의 하나로서, 체계적인 교육과 무관하게 개인적인, 그러나 문화 변인에 종속되는 정상

적인 일상 경험의 결과로 발달하는 인지적 신념이다. 초보적 직관을 기초직관(ground intuition)과 개별적 직관(individual intuition)을 모두 포함된다. 초보적 직관은 전조작적 직관(preoperational intuition)과 조작적 직관(operational intuition)으로 세분될 수 있다. 전조작적 직관은 형태(configuration)에 바탕을 두며, 조작적 직관은 조작(operation)에 바탕을 둔다. 구체적 조작기 동안에 발달하는 조작적 직관은 전생애동안 안정된 획득물로 남게 된다. ⇒ 이차적 직관

(참고) [1] 류희찬·류성림 (1997). 수학교육에서의 직관에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 103-116. [2] 우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부. [3] Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

추측 직관/conjectural intuition

추측 직관은, 피시바인(Efraim Fischbein)이 직관을 그 역할과 관련해서 구분한 네 가지 중의 하나로서, 미래의 사건, 어떤 현상의 코스 등에 대한 자신감과 연합된 가정(assumption)이다. 추측 직관을 통해 개인은 어떤 것을 추측하고 가정한다. 추측 직관은 보통 사람의 직관(lay intuition)과 전문가의 직관(expert intuition)으로 세분될 수 있다. 보통 사람의 직관은 전문적인 지식에 바탕을 둔 것이 아니라 매일 매일의 경험에 바탕을 둔 것이다. 전문가의 직관은 전문적인 지식에 바탕을 둔 것이다. 전문가는 최소한의 정보를 바탕으로 가장 적절한 측면을 파악하고, 정보의 중요성을 결정하며, 여러 가지 가능한 해석을 가늠하여 의미 있는 결론을 내린다. ⇒ 단정적 직관, 예상 직관, 결론적 직관

(참고) [1] 류희찬·류성림(1997). 수학교육에서의 직관에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집 7(2). 103-116. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부. [3] Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

타교과 연계형 프로젝트

박경미·임재훈에 의하면, 타교과 연계형 프로젝트는 수학이 물리, 경제, 예술 등 여러 학문 분야의 발달과 어떠한 관련이 있는지, 또 여러 인접 학문에 스며 있는 수학적 원리에는 어떠한 것이 있는지 탐색해 보는 프로젝트를 의미한다.

(참고). 박경미·임재훈(1999). 수학과 수행평가 프로젝트법의 의의와 실제. 학교수학 1(2). 723-745. 대한수학교육학회.

탐색적 자료 분석/exploratory data analysis(EDA)

우정호에 의하면, 탐색적 자료 분석은 대체로 기술통계학에서 더 나아가 새로운 분석 도구를 이용하여, 자료의 드러나지 않는 특성을 분석하여 그 구조를 그대로 더욱 명확히 하는 것이라 할 수 있다. 탐색적 자료 분석에서는 일부 자료의 특이한 변동에 따른 영향을 적게 받는 저항성이 있는 대표값인 중앙값을 선호하고, 지배적인 패턴과 이상적(異常的)인 형태를 분석하고, 자료와 지배적인 패턴의 차인 잔차(殘差)를 면밀히 검토하여, 자료의 숨겨져 있는 특성을 보다 명확히 밝히려고 한다. 또, 자료를 로그나 제곱근으로 변환하여 자료의 분석과 해석을 용이하게 하고, 줄기-잎 그림이나 상자-수염 그림과 같은 그래프 기법을 중시하면서, 자료에 대한 탐색 작업을 통해 자료의 구조적 특성을 보다 명확히 드러내고자 한다. 이러한 탐색적 자료 분석의 목표는 자료의 구조와 특징을 있는 그대로 제한 없이 탐색하는 것이며, 결론은 자료에서 관찰된 것에 기초한 비형식적인 것이다.

(참고) 우정호(2000). 통계교육의 개선 방향 탐색. 학교수학 2(1). 1-27. 대한수학교육학회.

프로젝트법

프로젝트법은 수학과 수행평가 방법의 하나이다. 박경미 · 임재훈은 프로젝트법을 프로젝트를 매개로 하여 이루어지는 평가 방법으로 정의하고 있다. 프로젝트법에서는 학생들이 특정한 주제나 문제에 대해서 일정한 기간동안 나름대로 자료를 수집하고 분석, 종합, 해결하여 연구 보고서를 작성 · 제출하도록 하고, 이 보고서를 매개로 학생들의 탐구 과정을 평가하게 된다. 프로젝트에 포함될 수 있는 내용으로 실생활 문제 상황의 해결, 수학과 인접 교과의 내용 연계, 주어진 자료의 해석, 수학적 상황에 대한 찬반 토론, 수학적 모델링을 통한 문제의 해결, 주어진 수학적 주제의 탐구, 수학사에 나타난 아이디어의 적용, 게임의 수행이나 패러독스의 탐구, 신문 활용 교육의 이용 등을 생각할 수 있다. 프로젝트법은 수학과 교육과정과 교과서에 명시되어 있는 내용을 다룰 수도 있지만, 그 범위를 넘어설 수도 있다. 박경미 · 임재훈은 프로젝트의 유형을 실생활 문제해결형, 타교과 연계형, 수학사 활용형, 신문 활용 교육형, 패러독스형, 찬반토론형, 자료해석형, 수학적 모델링형, 주제탐구형, 게임형의 10가지로 분류하고 있다. 이러한 분류는 하나의 준거에 의한 것은 아니며, 서로 배타적인 것도 아니다. 그러나, 각각의 유형은 적어도 개념상 서로 구분될 수 있는 고유한 측면을 가지고 있다. ⇒ 수학과 수행평가

(참고) 박경미 · 임재훈(1999). 수학과 수행평가 프로젝트법의 의의와 실제. 학교수학 1(2). 723-745. 대한수학교육학회.

CMP(Connected Mathematics Project)

CMP(Connected Mathematics Project; 1991-1997)는 학생들과 교사들을 위한 중등수학 교육과정으로, 이전에 있었던 미국과학재단(NSF: National Science Foundation)의 Middle Grades School Mathematics Project의 연장이다. CMP의 포괄적인 목표는 학생들과 교사들에게 풍부한 연결성과 깊은 이해력 및 숙달된 기능이 가능한 수학 지식을 개발하는데 있다. CMP는 학생들의 이해와 성장을 뒷받침하는데 필요한 교실 담화(談話)의 본질에 대해 직접적으로 초점을 맞추고 있는 것으로, 수학적 탐구, 추론, 연결성, 테크놀로지라는 다섯 가지를 핵심 주제로 하고 있다. 또, CMP는 6-8학년에 걸쳐 수, 기하와 측정, 확률, 통계, 대수의 5가지 수학 영역을 취급하고 있다. CMP는 문제중심 교육과정으로, 중요한 수학적 아이디어가 흥미로운 문제들, 실제적인 응용, 즉흥적인 세팅(setting)이나 수학적인 문제 상황 등의 문맥에 삽입되어 있다. 학생들은 일련의 연결된 문제를 탐구하면서, 기능을 숙달하고 그 문제에 삽입된 중요한 수학적 개념을 깊이 이해하게 된다.

(참고) 정영옥(1999). 수학교육 연구 프로젝트. 학교수학 1(1). 351-365. 대한수학교육학회.

CPMP(Core-Plus Mathematics Project)

CPMP는 고등학교 수학 교육과정과 수업 자료를 개발하는 프로젝트로 미국과학재단(NSF)의 후원을 받고 있다. CPMP 교육과정에서는 수학에 대한 이해를 중시하며, 여러 가지 상황과 문제에 대한 학생들의 비형식적 지식을 인정하고, 가치 있게 생각하며, 그것을 확장한다. 이 교육과정은 대수와 함수, 통계와 확률, 기하와 삼각법, 이산수학으로 구성되어 있다. 또, CPMP 수업 자료는 학급에서는 소집단 활동으로, 교실 밖에서는 개별적인 활동을 하도록 설계되어 있다. 특히, 학급 활동은 시작, 탐구, 의견 교환과 점검 및 홀로 서기의 네 단계로 이루어진다. 학급 밖의 활동에서는 학급에서의 탐구 외에 수학적 지식의 모델링, 조직, 반성, 확장 활동을 위한 과제들을 제공한다. 이러한 활동은 각 수업의 활동 목표에 핵심적이며, 주로 개인적인 활동을 위해 의도된 것이다.

(참고) 정영옥(1999). 수학교육 연구 프로젝트. 학교수학 1(2). 747-764. 대한수학교육학회.

EIS 이론

EIS 이론은, 어느 분야의 지식이든 어떤 문제이든 적절한 일련의 행동에 의해(행동적 표현, enactive representation), 어떤 개념을 완전히 정의하지는 않았지만 그것을 나타내는 일단의 대략적인 이미지나 그림에 의해(영상적 표현, iconic representation), 명제를 형성하고 변형하는 규칙과 법칙에 의해서 지배되는 어떤 상징 체계로부터 이끌어낸 일단의 상징적 혹은 논리적 명제에 의해(상징적 표현, symbolic representation) 세 가지 방식으로 표현될 수 있고, 그리고 이 각각의 표현 방식은 연령, 배경, 학습 양식에 따라 그 어려움과 유용성이 변한다는 것이다. EIS 이론은 브루너(Jerome Seymour Bruner)에 기인하는 것으로 알려져 있지만, 김응태 · 박한식 · 우정호(1985) 및 우정호(2000)에 의하면, 그것은 본래 피아제(Jean Piaget)의 제자인 에이블리(H. Aebli)가 행동의 내면화를 촉진하기 위한 전략으로 도입한 것으로, 제네바(Genéva) 학파의 착상으로 볼 수 있다. 한편, 홍진곤에 의하면, 교육과정의 설계는 아동의 발달 단계에 맞게 처방되어야 한다는 브루너의 주장은 피아제의 주장과 맥을 같이 하는 것으로 알려져 있으나, 사실상 브루너의 EIS 이론은 피아제의 이론과 '구조' 개념과 '수학적 인식'의 인식론적인 입장에서 차이가 있다.

(참고) [1] 홍진곤(1998). Bruner의 EIS 이론에 대한 비판적 고찰. 대한수학교육학회논문집 8(2). 553-563. [2] 우정호(2000). 수학 학습 지도-원리와 방법. 서울대학교 출판부. [1] 김응태 · 박한식 · 우정호(2001). 수학교육학 개론 (제 2 증보). 서울대학교출판부.

EM(Everyday Mathematics)

EM(Everyday Mathematics)은 미국 시카고대학 학교수학 프로젝트(UCSMP: University of Chicago School mathematics Project)에서 만들어진 K-6교육과정으로, 여러 가지 기능과 개념이 장기간에 걸쳐서 개발되고 다양한 문맥 속에서 반복되는 나선형 교육과정이다. 1983년부터 UCSMP에서는 미국 수학교육의 변화를 위한 광범위한 영역의 내용을 포함하고, 현실 세계의 응용을 강조하는 미국 전역의 초등과 중등수학교육을 위한 교육과정을 개발해 왔다. EM에서는 알고리즘적 사고와 절차적 사고, 어림과 수 감각, 암산 기하와 검산, 문제해결과 수학적 모델링을 포함하는 수학적 주제를 다루고 왔다. 주제란 학생들이 그들의 수학 학습 경험을 통해서 발달시켜야 할 필요가 있는 중요한 아이디어 또는 사고 습관을 말한다. EM에서는 여러 가지 토픽이나 영역을 고립적으로 가르치지 않는다. 여러 가지 개념이 계속 되풀이되고 다양한 응용을 통해서 얽혀 있다. EM의 기초가 되는 핵심적인 원리는 다음과 같다: (1) 수학은 그것이 일상 생활의 문제와 상황에 뿌리박고 있을 때 더 많은

것을 의미할 수 있다. 즉, 어린이들의 수학적 지식은 그들의 경험으로부터 자라 나와야 한다. (2) 어린이들은 보통 일반적으로 사람들이 기대하는 것보다 더 많은 것을 배울 수 있다. 경험은 어린이들에게 수학적 통찰, 추론, 창조성을 개발할 수 있는 풍부한 원천을 제공한다. (3) 교사들은 여러 가지 도구와 테크놀로지를 이용하여 어린이들을 지도하여야 한다. (4) 교사들은 수학교육의 진보적이고 지속적인 개혁의 단 하나의 가장 중요한 근원이다.

(참고) 정영옥(1999). 수학교육 연구 프로젝트. 학교수학 1(1). 351-365. 대한수학교육학회.

IMP(Interactive Mathematics Project)

IMP는 고등학교 수학 교육과정과 수업 자료를 개발하는 프로젝트로 미국과학재단(NSF)의 후원을 받고 있다. IMP에서는 미국수학교사협의회(NCTM)의 스탠더드(Standards)가 요구하는 교육과정 개혁을 구체화하는 프로그램을 만들어 왔다. IMP 교육과정에서는 주요 토픽이 의미 풍부한 수학 문제 맥락에서 통합된 형태로 다루어지며, 일반적으로 한 학년에 제시된 토픽은 그 다음 학년의 교육과정에서 반복되고 확장된다. 이 교육과정은 또한 학생들이 갖추어야 할 문제해결 기능과 집단 활동 기능을 제시하고 있다. 문제해결 기능은 장기적인 문제를 연구하기, 문제를 해결하기 위해 다양한 지식과 방법을 구사하기, 문제해결에 적절한 테크놀로지 활용하기, 한 문제에 관련된 문제를 제기하기, 문제를 일반화하기 등이다. 집단 활동 기능은 다른 사람들과 협동하기, 아이디어를 공유하기, 도움을 요청하기, 과제를 분해해서 그것의 여러 부분을 독립적으로 연구할 수 있도록 하기 등이다.

(참고) 정영옥(1999). 수학교육 연구 프로젝트. 학교수학 1(2). 747-764. 대한수학교육학회.

KWDL 기법/KWDL technique

KWDL 기법은 수학 문제해결 활동에서 소집단 협동 학습을 실시할 때, 이 소집단의 문제해결 활동을 조직하고 기록하기 위한 실천적이고 효과적인 기법으로 쇼, 샘블즈, 세신, 프리이스, 비어데인(Jean Shaw, Martha Chambless, Debby Chessin, Vernetta Price, Gayle Beardain)이 제시한 것이다. 이것은 오글(Donna Ogle)이 독해 능력을 개선하기 위해 개발한 KWL 모델을 수학 문제해결 학습에 맞도록 수정한 것이다. K는 what I Know(내가 알고 있는 것)를, W는 what I Want to find out(내가 알아내기를 바라는 것), D는 what I Did(내가 했던 것), L은 what I Learned(내가 배웠던 것)를 의미한다. K-단계에서는 학생

들이 문제에서 어떤 정보가 주어졌는지 알아보기 위해 그 문제를 읽거나, 의역하거나, 또는 그 문제에 관해 토론하게 된다. 이 이외에 문제를 실연해 보거나, 그림을 그리거나 또는 차트를 만드는 것과 같은 전략을 사용해서 문제를 이해하거나 또는 자신들이 이미 알고 있는 것이 무엇인지 인지하게 된다. W-단계에서는 문제에서 무엇을 묻고 있는지에 관해 소집단 내에서 동의가 이루어진다. 문제를 해결하기 위한 계획을 결정하는 것이 이 단계에서 이루어진다. 이 단계에서 학생들은 그 계획에 관해 소집단 내에서 서로의 의견을 조사하거나, 서로 토론하게 된다. 문제를 해결하기 위해 측정을 하거나, 실험을 하거나 또는 참고 서적을 보는 것도 이 단계에서 이루어진다. D-단계에서는 기록지를 사용해서 집단 구성원이 함께 문제를 해결할 때의 구체적인 행동 과정 과정을 기록하게 된다. 이 기록은 학생들이 문제를 함께 해결하는 과정에서 사용한 계획과 과정에 관해 의식적으로 생각해 보도록 도움을 준다. L-단계에서는 문제의 답을 진술하고 변호하며, 또 어떻게 그 문제의 해결에 착수했는지를 기술하게 된다. 이 단계에서 자신들이 한 것을 입증하거나 또는 답의 합리성에 관해 말하게 된다.

(참고) Jean Shaw, Martha Chambless, Debby Chessin, Vernetta Price, Gayle Beardain(1997), Cooperative Problem Solving: Using K-W-D-L as an Organizational Technique. Teaching Children Mathematics (1997, May). 482-486. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

PISA 학생 성취도 지표 개발 연구/programme for development of student achievement indicators; Programme for International Student Assessment

PISA 학생 성취도 지표 개발 연구는 경제 협력 개발 기구(Organization for Economic Cooperation and Development: OECD) 교육 분과가 주관하는 국제비교연구로, 건전한 민주 시민으로 생활을 영위하는데 필요한 읽기 소양(reading literacy), 수학적 소양(mathematical literacy), 과학적 소양(scientific literacy)의 측정을 목적으로 한다. PISA는 이 세 영역에 대한 성취도 검사와 더불어 학생 설문 조사, 학교 설문 조사 등을 실시하여 정의적인 영역의 태도나 가치관 및 학교의 배경 등을 종합적으로 고려한다. 평가 대상은 만 15세 학생들이다. PISA는 정책지향적인 연구로 3년을 주기로 하여 3차에 걸쳐 총 9년 동안 이루어진다. PISA의 결과는 학생의 능력, 기능, 지식과 관련된 기본 자료로 기초 지표(basic indicators), 학생의 능력, 기능, 지식이 가족 상황 및 사회적, 경제적, 교육적 변수와 어떻게 관련되는지

밝히는 상황 지표(context indicators), 9년에 걸친 시계열 자료인 경향 지표(trend indicators)의 세 가지를 제공하게 된다. 수학적 소양에서의 평가는 수학적 능력(mathematical competencies)과 핵심 아이디어(mathematical big ideas)라는 축과 내용 요소(curricular strands)와 상황과 맥락(situations and contexts)이라는 축을 중심으로 구성된다.

(참고) 박경미(1999). OECD/PISA 학생 성취도 지표 개발 연구의 소개. 학교수학 1(1). 367-382. 대한수학교육학회.