

수학교육 연구 프로젝트 - 독일의 수학 교육과정 연구 -

정 영 옥 (진주교육대학교)

I. 들어가며

최근 수학교육 연구의 중요한 부분 중의 하나는 2000년대를 맞이하여 새로운 시대를 준비하는 일일 것이다. 이미 우리 나라는 제 7 차 교육과정을 준비하여 일부 시행하고 있으며, 미국에서는 2000년대를 향한 새로운 학교수학을 위한 원리와 기준(Principles and Standards for School Mathematics)을 발표하였고, 가까운 일본에서도 2002년부터 새롭게 시행될 교육과정을 준비하고 있다.

본 연구에서는 이러한 추세에 따라 독일의 수학 교육과정은 어떠한 변화를 겪고 있는지에 대해 살펴보고자 한다. 이를 위해 우선 독일의 학교 체제와 교사 교육에 대해 간략하게 살펴보고, 독일의 수학교육과정에 나타난 수학교육의 목표와 내용 및 그 동안의 수학교육과정의 변화에 대해 알아보며, 수학교육과정 관련된 여러 연구 중 최근 Dortmund 대학 IEM 연구소(Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts: 수학 수업의 발달과 연구를 위한 연구소)의 Wittmann을 중심으로 이루어져 온 "Mathe 2000" 프로젝트에 대해 고찰해 보고자 한다.

II. 독일의 학교 체제와 교사 교육

독일의 학교 체제는 우리 나라의 체제와는 다른 점이 많다. 또한 이러한 체제에 따른 교사 교육 과정도 차이점이 많다. 이 장에서는 이러한 점들에 대해 살펴보고자 한다(Vollrath, 1997).

1. 독일의 학교 체제

독일은 연방 공화국으로, 각 주는 자신의 교육 체제에 대한 책임을 맡고 있다. 따라서 학교 체제는 주마다 다르지만 몇 가지 공통점들이 있다. 모든 학교는 시 또는 주의 기관이며, 몇몇 사립학교들이 존재한다. 대부분 종교학교이지만 특별한 교육학적 의미를 가지는 학교들이 있는데, 예를 들면 발도르프(Waldorfschulen)학교나 몬테소리학교(Montessorischulen) 등이다.

독일의 학교 유형은 초등학교(Grundschule), 중등학교(Gymnasium, Realschule, Hauptschule, Gesamtschule), 직업학교(Berufsschule, Berufsfachschule), 전문학교(Fachoberschule, Fachschule) 및 장애아를 위한 학교(Sonderschule) 등이다. 그러나 이러한 유형도 주마다 약간의 차이가 있다. 각 학교별 특징을 살펴보면 다음과 같다.

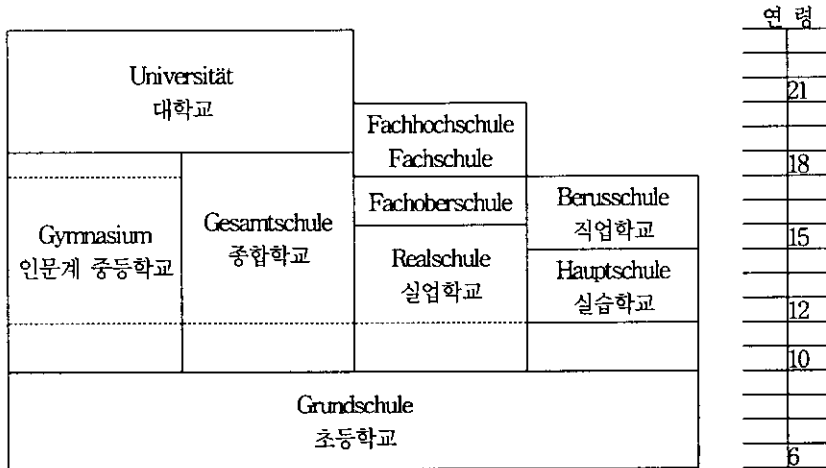
1) 초등학교

모든 아동들은 6살부터 4년 동안 초등학교에 다닌다. 이후의 일반교육에 대한 기초를 얻은 후에 학생들은 Gymnasium, Realschule, Hauptschule 또는 Gesamtschule의 여러 유형의 중등학교 중의 하나로 옮긴다. 일반적으로 초등학교는 4년제이지만 6년제의 초등학교도 존재한다.

2) 중등학교

실업학교(Hauptschule)는 좀더 실제적인 유형의 일에 적합한 능력을 가진 아동들이 입학한다. 실업학교(Realschule)는 상업과 산업 분야에서 중등 수준의 직업을 위한 학생들을 준비시킨다. 인문계 중등학교(Gymnasium)는 대학이나 이와 동등한 기관을 위한 학생들에게 자격을 주는 최종시험인 Abitur를 13학년에 제공한다.

종합학교(Gesamtschule)는 교육개혁의 결과로 지난 25년 동안 설립되어 온 새로운 유형의 학교이며 주에 따라 있는 주도 있고 없는 주도 있다. 이러한 학교가 탄생된 배경에는 서로 다른 유형의 학교에서 교육을 받은 학생들의 사회적 통합이 적절히 성공하지 못하였다는 것과 자신의 자녀들을 김나지움과 실업학교에 보내려는 학부모들의 수가 계속 증가하고 있다는 사실에 기인한 것이다. 중등학교의 선택은 학생들의 보고서를 근거로 하는데, 학교에서는 단지 권고만을 할 뿐 학부모가 최종 결정을 한다. 학부모들은 최근 새로운 유형의 종합학교에 보내는 것을 선호하고 있다. 대부분의 주에서 이러한 학교들은 아직은 실험 단



[그림 2] 독일의 학교 체제

계에 있다. 단지 한 지방 안에 세 가지의 전통적인 중등학교들이 모여 있는 종합학교를 운영하는 주도 있고, 단지 독일어, 외국어, 수학과 같은 주요 교과과정만 다른 수준에서 배우고 다른 교과들은 공동으로 배우는 통합된 형태로 운영하는 주도 있다(Griesel, 1995). 종합학교의 학생들은 세 가지 유형의 전통적인 학교에서 받게 되는 10학년의 여러 수준에 대응되는 자격증을 가지고 졸업한다.

반면 학생들은 한 유형의 학교에서 다른 유형의 학교로 바꿀 수 있는 기회를 가진다. 이러한 결정을 올바르게 하도록, 5학년과 6학년에는 교육과정이 조화롭게 운영된다.

3) 직업학교

18세 이전에 일반 학교를 졸업하는 학생들은 직업학교(Berufsschule) 또는 직업전문학교(Berufsfachschule)를 다녀야 한다. 직업학교는 파트타임으로 운영되며 직업 훈련을 받는 학생들이 다닌다. 그 목표는 직업훈련에서의 요구에 맞게 일반적인 지식과 전문적인 지식을 전달하는 것이다. 직업 전문학교는 정규 수업을 실시하며 학생들이 자신의 일반적인 지식을 개선함과 동시에 어떤 분야의 직업에 대해 준비한다.

4) 전문학교

전문학교는 Fachschule와 Fachoberschule를 포함하는데 학생들이 상업이나 공업분야에서 몇 몇 특별한 중간 수준의 직업을 위한 준비 과정이다. 예비조건은 학생들이 Fachschule에

입학하기 전에 약간의 일을 해 본 경험이 있어야 한다는 것이다. Fachoberschule에 입학하기 위해서는 Realschule를 졸업해야 한다.

2. 독일의 수학교사

1) 교사의 사회적 지위

독일의 수학교사는 다소 높은 사회적 지위를 지닌다. 이는 한편으로는 수학교과에 대한 사회적 평가에 의해, 다른 한편으로는 공무원으로서의 지위에 대한 인식 때문이다. 수학교사가 되기 위해서는 두 개의 국가 시험을 포함하여 교사 훈련의 첫 번째 단계인 대학에서의 5-6년 간의 예비 훈련과 두 번째 단계인 2년 간의 실습학교 기간을 거쳐, 자신이 선택하고 국가가 정한 한 가지 유형의 학교에 지원을 하여 취직하게 된다. 이때 수학교사는 어떤 유형의 학교에 근무하든지 아주 상당한 자율과 자유를 가진 전문직을 시작하게 된다. 현직교사는 국가의 고용원으로서 높은 보수를 받으며 정년을 보장받는다.

2) 교사의 근로 조건

수학교사는 국가가 정한 교수요목에 주의를 해야 하지만, 이러한 교수요목들은 주제와 관련된 규정 부분과 방법론적 접근이나 주제에 할당된 시간 등을 포함한 권고 부분으로 이루어지며 주로 교수를 위한 안내서의 역할만을 한다. 상업적으로 제작된 교과서들은 교수요목과 밀접한 관련을 가져야 하고 그것들을 구체화하고 이에 대한 설명을 제시해야 한다. 수학교사는 학교 동료들과 같이 여러 교과서 중학생들에게 가장 적합한 것을 선정하거나 교사 자신이나 동료들과 같이 직접 만든 교수자료들을 사용한다. 또한 수학교사는 자신의 교수 스타일, 숙제, 구두 또는 지필 학급 활동에 점수를 부여하는 방법뿐만 아니라 학생들의 학년 진급을 결정하며, 몇 몇 주)를 제외하고는 학생들의 수행과 성취를 평가하고 학교와 교사 중심의 평가 양식들로만 자신의 교수를 평가하는 책임을 가진다. 교수 시간은 인문계 중등학교에서는 1주일에 약 24시간, 실습학교와 초등학교와 같은 중등학교에서는 약 28시간으로 일반적으로 그 사이로 정해져 있다.

3) 예비교사들의 교육

1) Bavaria, Baden-Württemberg, Saxony와 같은 주에서는 졸업 년도에 주 정부가 주관하는 시험을 보고, 교사들의 교수나 채점에 많은 통제를 한다.

미래에 수학교사가 되기 위해서 학생들은 수학, 교육연구와 사회학, 수학교육학, 부전공 수업을 병행해야 한다. 교사교육의 또 다른 중요한 부분은 학교에서의 실습기간이다.

수학수업을 살펴보면 평균적으로 미래의 중등학교 수학교사를 위한 대학 학업은 미래의 수학자를 위해 설계된 과정과 다르지 않다. 이는 종종 수학자들의 관점에 의해 결정되기도 한다. 의무 수업 시간 45-72 아니면 학기 시간수의 10분의 9까지 수학을 배우는 데 할애된다. 초등교사들은 별도의 과정이 있는 경우에 “산술, 대수, 기하, 양, 사회적 산술 등에서 선택된 주제들”에 한정된 좀더 특수한 수학교육을 받으며, 수학교육학과 교육학에서 더 많은 과정들을 듣는다. 그 내용을 살펴보면 처음 4-5학기는 해석학(고급미적분), 선형대수, 수치해석 등의 기초를 학습한다. 이러한 것들을 이수한 다음 중간 시험을 치른 후에 주요 교육 과정을 시작하게 된다. 이 기간의 4-5학기 동안 학생들은 복소해석학, 대수와 수론, 논리, 기하학과 위상수학, 확률론, 컴퓨터 수학에의 입문에 대한 강의를 듣고 연습을 한다. 전공분야와 심화수업의 내용은 고급 복소해석학, 미분방정식, 함수해석, 미분기하학과 고급 위상수학, 확률과 통계 등이 될 수 있다. 전반적으로 순수수학이 응용수학보다 우세하다. 학생들은 강의와 연습 시간 외에 연구에 점진적인 참여를 유도하는 세미나에 참석하도록 기대된다. 거의 모든 대학에서 지필 시험은 수학적 주제에 대한 에세이 숙제 및 수학연습이 의무적이다. 또한 대부분 학교수학과는 거의 연결성이 없다.

교육학과 사회학의 수업은 일반적으로만 기술되어 있고 각 대학에서 완전히 다르게 구체화된다. 학점의 수도 20학점에서 32학점까지 상당히 다양하다. 교육학과는 보통 모든 교과 의 예비교사들에게 같은 교육과정, 세미나, 강의 등을 제공한다. 그 내용을 살펴보면 교육, 일반교육학, 방법론 지도 등이 있다. 그 외에도 교육학이론, 교육공학의 개념과 방법, 교육의 철학적·인류학적 기초, 인지심리학과 학습이론, 이주와 문화적 변화, 교육체계와 교육정책의 역사, 사회화와 사회적 제도로서의 학교, 일반교육학과 교과교육학, 교육과정 개발과 수업, 진단, 평가, 교수를 위한 특별 자료 등의 교과목이 있다. 일부 수업 프로그램은 실습 연구를 필요로 하는데, 즉 실습 단계의 방향을 안내하는 교육학자나 실습 단계의 직접적인 지도를 맡은 교수학자의 감독 하에 학교에서의 몇 기간 동안 관찰과 수업을 해야한다.

수학교육학 수업은 교사들을 위한 수업 프로그램에 포함되지 않을 수도 있고 일반적으로 시험을 요구하지 않는다. 몇몇 주에서는 어떤 수학교육학 수업도 의무적이지 않으며, 다른 주에서는 예비 수학교사들은 수학교육학에서 16학점까지 특권을 인정받는다. 수학교육학은 입문, 개론 강의, 또는 문제들에 대한 세미나/교과과정을 들은 후에 특별한 주제에 대한 기본 교과과정이 따른다. 이는 “학교에서의 대수”와 같이 교과 내용 지향적이거나 “교과서 사용법”, “학교에서의 수학 응용”과 같은 좀더 일반적인 내용들이다. 수학수업을 분석하고 계

획하는 세미나는 학생들에게 학교에서의 수업실습기간을 위한 준비를 시킨다. 주요 세미나, 이는 아마도 수학교육 분야에서의 연구에 참여하도록 하는 것인데, 학생들이 맡은 연구 과제들에 대한 지필 보고서를 요구하기도 한다. 가장 공통적인 주제들은 수학교육사, 학교교과로서의 수학, 수학교수학과 수학의 관계, 수학적 개념의 발달, 수학 교수 학습이론과 여러 측면, 수학교육에서의 평가, 수학의 선택된 주제에 대한 교수학 예를 들면 대수 교수학, 기하교수학, 확률과 통계교수학 등이 있다.

중등학교 예비교사들의 대부분 그리고 고등학교 예비교사들의 거의 모두가 부전공 수업을 들어야 하는데 그 시간은 수학과 거의 유사한 정도로 들어야 한다.

교사교육의 중요하고 핵심적인 부분은 수업 중에 해야 하는 몇몇 학교 실습 과정이다.

4) 교사들의 교육

교사들의 재교육은 예비 교사의 두 번째 교육 단계나 교사 재교육으로 이루어진다.

예비교사의 두 번째 교육 단계는 독일 교사 교육 체계의 가장 현저한 특징으로 모든 교사들을 위해 정해진 첫 번째 주 정부 시험 후에 이루어지는 실습 단계이다. 교사 지원자로서, 예비교사들은 의무시간이 얼마 되지 않는지만 한 학교에서 2년 동안 가르쳐야 하고, 적기는 하지만 주 정부가 봉급을 지급하며, 경험 많은 교사들의 지도 하에 3주마다 운영되는 세미나에 참석한다. 주 세미나는 모든 예비교사들에게 미래의 전문적인 상황에 대한 통합된 관점을 제공하려고 시도한다. 또한 학과와 관련된 세미나에서는 전문적인 수학교사들이 수학을 가르치는 것과 관련된 실제적인 문제들을 언급할 수 있다.

경험 많은 수학교사들은 성공적인 실습을 일반화하여 이론화함으로써 수학 교수가 무엇을 의미하는지에 대한 이해를 돕는다. 그들은 교수의 표준, 좀더 구체적으로 수업 모델을 제시함으로써 초보 수학교사들의 실제적인 태도와 수학적 개념의 이상적인 전달과 실제적인 전달을 이해하는 데 영향을 미친다.

한편 교사 재교육은 다양한 조직과 기관에서 제공하지만, 교사교육에 대한 실제적인 완성이라기보다는 보충 또는 보완의 역할을 한다. 교사들이 초빙되지만 그러나 일반적으로 재교육에 참석하도록 강요받지는 않는다. 여기서 얻은 이수 증명은 경력이나 봉급에 영향을 미치지 않는다. 재교육은 학교행정기관, 대학, 주 정부에 의해 운영되는 특별 교사 센터에 의해 제공되며 대부분 무료이다. 재교육 또는 그 이후의 훈련 과정에 참여하기를 원하는 교사들은 그 기간동안은 학교수업이 면제(집중코스나 세미나 등)되거나 그들의 연가 시간을 사용해야 한다.

교육과정 계획 및 개발과 관련된 “장기적인 개혁”에 대한 재교육 강의 과목을 위한 특별

한 기관들은 부분적으로 학교행정, 감독, 협의 등의 수준, 예를 들면 Berlin의 교육센터, Potsdam의 교육 주립연구소, Brandenburg PLIB, Soest의 학교와 재교육을 위한 주립연구소, Wiesbaden의 교육계획과 학교발전을 위한 Hessen 연구소 등에서 이루어진다.

Ⅲ. 독일의 수학 교육과정

대부분의 독일 학교는 시 또는 주의 기관이다. 각 학교 급별 교육과정은 주 정부에 소속된 교육부(Kultusminister)에서 주관하여 제시한다. 따라서 수학교육과정이나 수학교육체제는 각 주마다 차이점이 있을 수 있다. 이 장에서는 독일 수학교육과정의 몇 가지 특징 및 변화 과정을 살펴보고자 한다.

1. 수학교육 체제

수학교육과 관련해서는 교육과정에 나머지가 있는 나눗셈의 기호법과 같은 수업의 매우 상세한 측면에 대한 테스트의 수와 유형 아니면 사용되는 계산기 유형에 이르기까지 다양한 법령들이 제시되어 있다. 더욱이 학급에서 사용되는 교과서는 주의 인정을 받아야 한다.

반면, 교사들은 교육의 중요한 측면들에 대해서는 자유롭다. 교과서가 공식적인 교육과정보다 더 많은 영향을 미친다는 것은 아주 상식적인 것이다. 또한 시험은 자신의 학생들의 특별한 능력들에 적합하도록 교사가 스스로 출제한다. 최종 지필 시험도 Baden-Württemberg, Bayern, Brandenburg, Saarland를 제외하고는 모두 교사들이 출제한다. 따라서 학생들에 대한 교사의 지위는 매우 강력하다.

2. 수학교육의 목표

교육과정에는 다음과 같은 수학교육의 핵심적인 아이디어와 목표가 제시되어 있다.

- 이론으로서의 수학 그리고 모델링을 포함하여 자연과학과 사회과학의 문제들을 해결하기 위한 도구로서의 수학
- 일반화, 증명의 필요성, 구조적 측면, 알고리즘, 무한의 관념, 필연적 사고와 확률·통계의 우연적 사고
- 귀납적 추론과 연역적 추론, 증명 방법, 공리론, 형식화, 일반화/특수화, 발견 활동과 같

은 통찰 획득의 방법

- 수학교육의 모든 영역과 측면에서 다양한 논증 수준과 표상 수준
- 수학의 역사적 측면

또한 교육과정에는 수학교육의 새로운 방향이 제시되어 있는데, 그 기본 취지는 수학은 더 이상 재능 있는 사람들만을 위한 교과가 아니며, 만인을 위한 수학이 허용된다면, 그 목표에 대한 새로운 논의가 필요하다는 것이다. 이에 따라 수학교육에서 강조되어야 할 새로운 방향이 다음과 같이 제시되고 있다.

- 수학이 필요하고 유용할 수 있다는 것을 학습하기 위한 수학과와 모델링
- 모든 수준의 학교에서 통합된 교수 학습이 가능하도록 수학과 다른 교과 교사들간의 협동
- 학생들이 수학이 우리의 문화에 공헌한 바를 의식할 수 있는 아이디어의 역사로서의 수학

이러한 경향은 수학적 기능과 연습의 훈련을 줄이고 강력한 수학적 도구들을 제공하는 휴대용 계산기나 컴퓨터 등의 고등 테크닉을 받아들이고 사용함으로써 뒷받침됨을 강조하고 있다.

3. 수학교육의 내용

교육과정에 제시된 학년별 수학 내용은 각 주마다 다르지만 대략적인 내용을 제시하면 다음과 같다.

- 1학년에서 2학년 : 여러 가지 물체와 그 속성(집합과 그 원소, 다이어그램), 산술, 100 보다 작은 수에 대한 기본 사칙 연산, 양(길이, 화폐, 시간), 기하학적 경험, 형태와 규칙성
- 3학년에서 4학년 : 집합들을 다루기(부분집합, 교집합, 합집합), 지필 계산을 포함하여 자연수 1에서 백만까지의 산술, 구체적 상황에서 간단한 양을 계산하기, 간단한 입체도형과 그 격자, 테셀레이션, 선대칭 아이디어
- 5학년에서 6학년 : 변수의 사용, 간단한 방정식, 양의 변환, 직사각형의 면적, 직육면체의 부피, 기본적인 기하 개념(점, 선, 평행, 기하학적 형태), 자리 수와 수 체계, 기본적인 수론(소수, 최대공약수, 최소공배수), 분수와 소수
- 7학년에서 8학년 : 관계와 함수, 상업산술(비례관계, 백분율), 합동변환, 합동 삼각형, 사각형, 각의 측정과 관련된 정리, 다각형의 넓이, 삼각기둥의 부피, 이항, 식 세우기,

일차방정식, 대수적 구조, 정수와 유리수

- 9학년에서 10학년 : 실수, 이차함수와 이차방정식, 닮음, 직각삼각형과 원에 관련된 정리, 역, 지수함수, 원의 넓이, 삼각기둥, 원기둥, 원뿔, 구의 부피, 삼각법
- 11학년에서 13학년까지 : 미적분, 벡터공간, 해석기하학, 기하변환, 원추곡선, 대수적 구조, 확률과 통계

4. 수학교육과정의 변화

독일에서의 수학교육과정의 변화는 세계적인 변화의 추세에 따라 수학교육개혁 운동, 현대화 운동, 기초 기본으로의 복귀 운동 등의 영향을 받아 이루어졌으나, 국가차원의 교수요목이 아니라 각 주마다 서로 다른 교육과정안을 제시하고 있다. 독일의 수학교육과정의 변화와 그 현황을 살펴보면 다음과 같다.

19세기에 김나지움에서의 수학교육은 “일반적인 인간교육”을 주된 목표로 하였다. 순수수학과 그 형식주의가 응용보다 훨씬 중요하였다. 반면, 산술은 그 응용의 실제적인 측면을 포함하여 독일어 교과와 더불어 국민학교(Volksschule)²⁾에서의 두 가지 핵심 주제였다.

Felix Klein의 영향을 받아 1905년에 Merano 회의에서는 수학교육 특히 함수적 사고, 발생적 교수 구조, 순수수학과 응용수학의 통합과 관련하여 몇 가지 새로운 안내지침을 설정하였다. 김나지움에서는 1925년의 교수요목에 부분적으로 구체화되었다.

1960년에 수학 수업은 “기독교식의 보수적” 교육을 강조하기 위하여 상당히 감소되었다. 동시에 미국에서는 스푸트니크 쇼크에 자극을 받아 수학 교수를 개선하기 위한 장기 프로그램을 시작하였다.

1961년과 1964년의 OECD 권고에 영향을 받아 학교수학을 강조하는 것에 관한 논의가 시작되었다.

교사들의 협회인 수학과 자연 과학 수업의 개선을 위한 독일 연합회가 1965년 Nürnberg 교수요목을 정하였다. 그 의도는 학교에 ‘현대수학’을 도입함으로써 학교와 대학 사이의 간격을 매우고자 하는 것이었다. 따라서 집합, 구조, 사상, 논리적 개념이 수학교수에 도입되었다. 동시에 실업학교의 목표가 논의되어서 산술과 실제적인 응용에 대한 교수가 좀더 수학적인 교육으로 대체되었다. 첫 번째 단계로 초등대수가 도입되었다.

2) 이 국민학교(Volksschule)가 1964년에 폐지되고 대신 앞에서 설명한 초등학교(Grundschule)로 대체되었다. 이는 국민학교는 주로 대중교육을 위한 실습학교였으나 그 이후로 시대에 맞는 학문적이고 지적인 교육을 실시해 나가기 위해 이러한 변화를 시도하였다.

수학교육에서 가장 중요한 변화가 1968년에 일어났다. 독일연방공화국 정부들의 교육 및 문화부 장관들의 상임 회의(KMK Standing Conference of Ministers of Education and Cultural Affairs of the states of the Federal Republic of Germany, Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland)는 “일반 교육 학교에서 수학교육의 현대화에 관한 권고안과 안내지침”을 통과시켰다. 다음 4년 동안, 각 주는 1968년의 안내지침에 따라 모든 유형의 학교의 교수요목을 개정해야 했다. 권고사항은 본질적으로 수학의 중요성에 관한 일반적인 진술이었다. 지난 수 십 년 간 수학에서의 진보와 과학, 경제학, 사회에 중요한 분야들에서 “현대 수학적 사고”의 적용은 수업의 현대화를 강요해왔다. 이러한 결과들 중의 하나로 집합, 사상, 구조들과 같은 개념이 모든 적절한 주제들 내에서 기본적인 아이디어들로 표현되어야 한다. Griesel(1995)에 따르면 이러한 변화가 수학교육과정의 변화에 가장 많은 영향을 미친 것이었다.

1976년에 이러한 특수한 결과들을 상당히 감소시킨 몇몇 개정안들이 만들어졌다. 1970년대 동안 각 주는 이러한 안내서들을 수학 교수요목으로 변환하려고 노력하였다. 각 주는 독립적으로 일하였기 때문에 10개의 주가 모두 다른 결과들을 가져왔다. 몇 가지 항목들은 각 주의 정부에 의해 인정되지 않았고 몇몇 주제들은 서로 다른 학년에 도입되었다.

다음으로는 1988년에 제시된 권고안이다. 이 권고안은 세 가지 유형의 학교들 사이의 차이점 때문에 제안된 것이다. 몇몇 주(예 Hessen)는 모든 학교들을 위한 공통된 교수요목을 만들고 낮은 수준의 학교들은 그것을 약화시키도록 하는 몇 가지 암시만 포함하고 있다. 일반적으로 서로 다른 교수요목들이 개발되었다. 위에서 기술한 차이점이 교사들의 협회인 Deutscher Verein Zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts(MNU)에 의해 수학 수업을 위한 새로운 권고안의 개발을 시작하게 하였다. 이러한 MNU 1988 안내지침은 원래 모든 유형의 학교들을 위해 계획되었으나, 결국은 근본적으로는 김나지움을 위한 안내지침만 마련되었다. 권고안의 핵심 내용은 수학 교육을 위한 핵심적인 아이디어와 목표의 리스트였다. 최종적으로 몇 가지 일반적인 목표가 목록화되었다. 이 권고안은 학교교육의 5학년부터 최종학년까지의 교수요목을 낳았다. 1968년의 KMK 안내서 및 권고안과 비교해보면, 수학의 구조적 측면들이 현저하게 줄어들었다. 집합과 관계는 더 이상 언급되지 않는다. 1991년 독일의 통일 이후에 새로운 주들은 그들의 학교 체계를 조직하고 새로운 교육과정을 개발해야만 하였다. 그러나 수학교육에서 새로운 교수요목을 개발하는 것은 큰 문제가 아니었다. 그 이유는 내용상의 차이점은 신 정부와 구 정부 사이에 그다지 현저하지 않았기 때문이다. 이전의 동독에서 지도되지 않았던 것은 주로 확률과 통계였다.

독일 각 주에서 시행되고 있는 초등학교 관련 최근 수학교육과정들은 <표 1>과 같다 (Bussmann, Schbring & Thiemann, 2000).³⁾

<표 1> 독일의 수학교육과정(2000년 5월 기준)

주	발행년도	교육과정	
Baden-Württemberg	1994	Bildungsplan für die Grundschule. Mathematik	Neckar-Verlag
Bayern	1981	Mathematik. Einführung des Lehrplans für die bayerischen Grundschulen	München: Kommunalchriften-Verlag
Berlin	1987	Vorläufiger Rahmen für Unterricht und Erziehung in der Berliner Schule. Grundschule Klassen 1-6; Fach Mathematik	Berlin: Weinert
Brandenburg	1991	Vorläufiger Rahmen Mathematik Grundschule	Brandenburgische Universitätsdruckerei
Bremen	1985	Lehrplan Mathematik Grundschule	
Hamburg	1982	Mathematik, Lehrplan Grundschule	
Hessen	1995	Rahmenplan Grundschule	Frankfurt/Main: Diester Weg
Mecklenburg-Vorpommern	1991	Rahmenrichtlinien für die Grundschule Mathematik	Schwerin: Kultusministerium des Landes Mecklenburg-Vorpommern
	1996	Rahmenplan Grundschule Mathematik. Erprobungsfassung(실험용)	Schwerin: Obotritendruck
Niedersachsen	1984	Der Niedersächsische Kultusminister Mathematik. Rahmenrichtlinien für die Grundschule	Hannover: Schroedel
Nordrhein-Westfalen	1985	Mathematik. Richtlinien und Lehrpläne für Grundschule in Nordrhein-Westfalen	Köln: Greven
Rheinland-Pfalz	1984	Lehrplan Mathematik Grundschule	Grünstadt: E. Sommer
Saarland	1990	Lehrplan Mathematik. Grundschule Klassenstufen 1-4	Dillingen: Krüger
Sachsen	1992	Lehrplan Grundschule Mathematik Klassen 1-4	
Sachsen-Anhalt	1993	Rahmenrichtlinien Grundschule Mathematik	Magdeburg: Carloff
Schleswig-Holstein	1997	Lehrplan Grundschule	Glückstadt: Glückstädter Werkstätten
Thüringen	1993	Vorläufiger Lehrplan für die Grundschule Mathematik	Erfurt: Thüringer Kultusministerium


3) 독일에서도 현재 2000년대를 맞이하여 새로운 교육과정을 개정하기 위한 노력과 교과서를 개정하려는 노력이 이루어지고 있는데, 예를 들면 Bayern주는 1981년에 제시된 교육과정을 폐지하고 2001년에 새로운 교육과정을 제시하고 있다.

IV. 수학교육과정 프로젝트의 예: Mathe 2000

이 장에서는 독일의 수학교육과정에 대한 최근의 경향을 알아볼 수 있는 Mathe 2000 프로젝트(IEEM, 1997)를 살펴보고자 한다.

1. Mathe 2000의 연혁

Mathe 2000은 1987년 Dortmund 대학에서 시작된 전학년에 걸친 수학수업의 발달과 촉진을 위한 연구로 이는 수학을 학문의 전형으로 보는 관점과 수학교육을 “설계 과학”으로 보는 관점에 기초한다. 이 프로젝트는 수학교육학의 세부적인 문제들을 구체화하는 것과는 달리 교수 환경, 경험적 연구, 교사 양성 교육 및 재교육, 교육에 관한 조언 및 공공 활동에 대한 설계를 총체적인 과제로 간주한다. 이러한 “체계적-진화적”인 접근에서 중요한 부분 중의 하나는 이론과 실제의 관계망을 계속해서 구성하는 것이고, 이를 통해 모든 영역에 걸친 상호작용이 이루어질 것을 기대한다.

이 프로젝트의 최초 10년간의 활동은 주로 초등학교와 관련된 것이었고, 최근 중등학교로 확장되었다. 프로젝트의 로고로 삼각형 형태로 처음 4개의 숫자를 기하학적으로 표현한 이 선택되었다. 이 “4개의 수”는 피타고라스에게 있어서는 수의 조화 속에 우주의 조화가 반영됨을 나타낸다. 즉, 팽팽한 현을 1 : 2로 자르면 한 옥타브, 2 : 3으로 자르면 5도, 3 : 4로 자르면 4도의 소리가 울리기 때문이다.

2. Mathe 2000의 철학

앞 절에서 기술한 바와 같이 Mathe 2000 프로젝트는 수학교육학을 “설계 과학(design science)”으로 보는 Wittmann(1995)의 관점에 기초한다. 그의 관점은 1970년부터 수학교육학의 역할과 특성에 관한 논의가 있어왔음에도 불구하고, 수학교육학의 위상이 부상하지 못한 것에 대한 반성과 더불어 나름대로의 수학교육학의 특성과 역할을 이해하기 위한 것이다.

그에 따르면 수학교육학의 과제는 수학 교수의 전제, 목표 및 사회 환경을 포함하여 모든 학년의 수학 교수와 학습을 탐구하고 발전시키는 것이다. 다른 교과교육학과 마찬가지로 수학교육학은 여러 학문들 사이의 경계에 존재하며, 수학, 일반교육학, 교육학, 사회학, 심리

학, 과학사 및 다른 학문들을 포함한 다양한 영역들의 결과와 방법에 의존한다. 그러한 수학 교수와 학습에 대한 과학적 지식은 이러한 학문들의 결과들을 적절히 결합해서 얻을 수 있는 것이 아니며 오히려 이러한 다양한 측면들을 수학 교수와 학습의 일관적이고 통합적인 형태의 지식으로 통합하고 그것을 구성적인 방법으로 실제로 사용하도록 번역하는 특수한 교수학적 접근을 전제로 한다.

수학 교수와 학습을 촉진하는 과제를 실행하기 위해서는 한편으로는 수학교육학에 관련된 학문에 대한 건전한 관계가 필수적이며 다른 한편으로는 학교 실제와 이론적인 접근 사이의 균형을 필요로 한다. 그는 이러한 두 가지 사항을 전제로 수학교육학에서의 연구와 발달은 수학교육학의 핵심에 있는 실제에 구체적으로 연결되고 이러한 실제의 개선이 그 분야의 연구의 진보에 통합될 때만 실행될 수 있다고 본다.

그가 제시하는 수학교육학의 핵심 영역은 수학적 활동과 수학적 사고 방법에 대한 분석, 수학과와 문제해결 및 증명 등의 국소적 이론의 개발, 학습자에게 접근 가능한 내용과 방법에 대한 연구, 수학 교육의 일반적 목표의 관점에서 여러 내용에 대한 비판적 검토와 정당화, 수학 학습의 전제 조건과 교수-학습 과정에 대한 연구, 실제적인 교수 단위 및 교육과정, 수업 계획, 교수, 관찰 및 분석을 위한 여러 가지 방법의 개발, 수학교육사에 대한 연구 등으로 이루어진다. 그러나 이러한 핵심분야에서의 연구는 실제적 문제에 대한 연구자의 관심과 접근을 필요로 한다. 또한 수학교육학의 관련 영역은 수학, 컴퓨터 공학, 수학사, 인식론, 논리학, 심리학, 사회학, 인류학, 교육학, 교육사, 일반 교수학 등이며, 응용 영역은 교사 교육과 실제이다.

그러나 수학교육학과 실제와의 관련성을 지나치게 즉각적이고 실제적인 응용에 한정하는 것은 위험하며, 교수에 대한 설계와 경험 연구와 관련된 이론이나 이론적인 틀을 제공하는 것이 핵심에서의 본질적인 부분임을 강조하고, Freudenthal을 중심으로 이루어진 네덜란드의 현실적 수학교육이나 Brousseau를 중심으로 이루어진 프랑스의 교수학적 상황론 등을 그 예로 제시하고 있다. 이러한 이론의 개발은 다양한 관련된 영역에 핵심 부분을 연결함으로써 이루어질 수 있다. 따라서 수학교육학의 전체적인 상을 탐색하기 위해서는 모든 수학교육학자들이 핵심 영역과 관련 영역 및 그것들 사이의 살아 있는 상호작용에 참여해야 한다.

그는 이러한 상호 작용에 관련하여 수학에 대해 다음과 같은 자신의 관점을 제안한다. 핵심 영역에서의 활동은 인간의 독창적이고 자연스러운 인지 요소로서의 수학적 활동으로 시작해야 한다. 단지 전문적인 수학을 다루는 것뿐만 아니라 좀더 광범위한 사회적 현상으로서의 수학을 다루어야 한다는 것이다.⁴⁾ 이는 과학, 공학, 경제학, 컴퓨터 과학, 통계학, 산

업, 상업, 기술, 예술, 일상 생활 등에서 각각의 맥락에 특유한 관습과 조건에 따라 발달되고 사용되는 수학을 포함한다. 전문적인 수학은 확실히 우리가 지도해야 할 수학의 본질적인 요소이고, 광범위한 수학은 전문가들의 활동 없이는 더 이상 발전할 수 없다. 역으로 전문적인 수학의 많은 부분은 광범위한 수학에 그 근원을 가지고 발전된 것이다. 따라서 수학 교육자들은 이러한 광범위한 수학과 살아 있는 상호작용을 할 필요가 있고, 더 나아가서는 아동, 학생, 예비교사들의 진정한 광범위한 수학적 활동을 자극, 관찰, 분석하는 데 많은 노력을 해야 한다. 한편 수학교육자들은 전문적인 수학을 광범위한 수학의 여러 관점과 균형을 이루어야 하는 한 가지 관점으로 고려해야 한다. 결국 학교 수학이 단순한 교수학적 변환에 의해 전문적인 수학에 이르게 되는 것이 아니라 광범위한 수학에 의해 제공되는 사회적 맥락에서 발달되는 전 수학적(pre-mathematical) 인간 능력의 확장으로 보아야 한다는 것이다.

이러한 관점에서 보면 중요하고 긴박한 문제는 수학교육학의 핵심을 위한, 즉 사회적 맥락에서의 수학적 활동을 포함한 수학 교수와 학습의 연구를 위한 독자적인 연구 방법과 기준들을 포함하는 과학적 틀을 마련하는 일일 것이다. 이러한 틀을 마련하는 방법은 이미 확고한 틀을 가지고 있는 다른 학문들로부터 방법과 기준들을 택하는 것일 수도 있으나 이러한 틀은 수학교육학의 핵심문제를 해결하기보다는 이러한 학과의 주변에 있는 문제들을 해결하는 데 더 적합하다.

이러한 문제점에 대한 대안으로 그가 제시하고 있는 것이 설계 과학(design science)으로서의 수학교육학이다. 그는 Simon의 말을 인용하여 설계 과학을 자연 과학과는 대비되는 의미로 설명하고 있다. 역사적으로 전통적으로 자연의 사물에 대해 가르치는 것이 과학의 과제일 것이다. 즉 그것들이 어떻게 작용하는지에 대하여 가르치는 것이다. 반면 기술과 관련된 일에 대해 가르치는 것은 공업학교의 과제였다. 즉 원하는 성질을 가지는 물품을 만드는 방법과 그것을 설계하는 방법을 가르치는 것이다. 따라서 설계란 모든 전문적인 훈련의 핵심이다. 공업대학뿐만 아니라 건축, 경영, 교육, 법률 및 의학과 관련된 대학들은 모두 핵심적으로 설계의 과정과 관련되어 있다. 이러한 설계의 중요성에 비추어 보면 금세기에 공업대학이 종합대학으로 흡수되는 과정에서 학문에 대한 경외심 때문에 자연과학을 지향하고 기술과학으로부터 이탈하려는 움직임은 잘못된 것이었다. 이러한 학과들은 그들이 설계 과학, 즉 설계 과정에 대해 지적으로 확고하고, 분석적이고, 부분적으로 형식화할 수 있고, 부분적으로는 경험적이며, 가르칠 수 있는 이론 체계를 발견할 수 있는 정도에 따라 그 전

4) Wittmann은 전문적인 수학 mathematics와 대비하여 광범위한 의미의 수학을 MATHEMATICS로 나타내고 있다.

문성이 보장될 것이다.

Wittmann에 따르면 이러한 설계 과학의 틀이 수학교육학의 과제를 충족시키고 수학교육자의 자아개념의 완성을 위한 유망한 관점을 제공해 준다는 것이다. 그 이유는 수학교육학의 핵심은 “기술적인 대상들”, 즉 일관적인 교수 단원과 교육과정을 구성하는 것뿐 아니라 여러 가지 교육적인 생태학 속에서의 가능한 효과들에 대해 탐구하는 것이기 때문이다. 교육과정 구성의 우수함은 설계자의 재능과 체계적 평가인데, 이는 모두 설계 과학에 전형적인 것이다. 따라서 수학교육학을 설계과학으로 개념화하는 것은 수학교육학의 전문적인 연구 과제를 잘 반영하는 것이다. 그러나 때로는 설계 과학이 전통적으로 기계적인 패러다임을 따라 왔기 때문에 수학교육학에 대한 잘못된 관점을 초래할 수도 있다. 이에 대해 Wittmann은 살아 있는 체계의 “체계적-진화적” 발달에 기초한, 체계들의 복잡성과 자기 조직화를 고려하는 설계 과학을 위한 새로운 패러다임이 존재하고 있음을 강조한다. 결국 설계 과학으로서의 수학교육학은 그 이론이 실제와 설계자의 근본적인 신념과의 상호작용에 의해 구성된다고 볼 수 있을 것이다.

이러한 관점에 기초해 볼 때 교사-학생, 이론가-실천가 사이의 관계는 전통적인 관점과 크게 다르다. 지식은 더 이상 교사에 의해 수동적인 학생에게로 전달되는 것이 아니라 다른 학생들과 교사들 간의 사회적 상호작용에 의해 이루어지는 학생의 생산적 성취의 결과로 생각된다. 따라서 수학교육자들이 개발한 자료들을 유용하게 사용할 수 있도록 교사들에게 스스로 선택할 자유를 부여해야 하며, 교사들은 단순히 연구 결과의 수용자가 아니라 연구와 발달에서의 동반자로 간주되고 그렇게 훈련되어야 한다.

Wittmann은 이러한 체계적-진화적 설계 과학으로서의 수학교육학은 여러 가지 경로를 따를 수 있으며, 자연과학에 대해 가정된 “단일 패러다임적(monoparadigmatic)” 형태로 개발하려고 하는 것은 합리적이지 않다고 본다.

또한 설계 과학으로서의 수학교육학을 발전시키기 위해서는 한편으로는 설계와 다른 한편으로는 경험적 연구가 서로 어떻게 연결될 수 있는지 그 방법들을 찾는 것이 중요하다. 그 중 가장 중요한 부분이 교수 단원의 설계라고 볼 수 있는데, 이와 관련된 대규모의 설계는 보통 특별 기관에서 책임을 맡아 실행되는 것이 보통이다. 이때 연구자와 교사들은 적절한 상호작용을 통해 그 책임을 능히 감당해야 한다. 그는 이때 본질적인 교수 단원의 설계, 특히 본질적인 교육과정의 설계는 그 분야의 전문가에 의해 실행되어야 하는 아주 어려운 과제이며, 비록 교사들이 중요한 공헌을 한다고 해도 이것은 교사가 아니라 전문가가 담당해야 할 일로 보고 있다. 반면 교수 단원을 각 학급에 맞게 적용하는 것인 소규모의 설계를 필요로 하는데, 교사는 이때 감독 또는 지휘자에 견줄 수 있는 역할을 담당해야 한다.

그는 이러한 교수 단원을 수업에서 다루는 과정에서 Piaget가 사용한 임상적 인터뷰의 방법에 유사한 임상적 교수 실험의 방법을 사용할 것을 제안한다. 즉 교수 단원에 제시된 핵심문제를 제외하고는 문제를 해결하려는 학생들의 아이디어를 알아내어야 한다는 것이다. 이렇게 수집된 자료는 교수-학습 과정, 개인적-사회적 학습의 결과, 아동의 생산적 사고, 아동의 어려움 등에 대해 알게 해주며, 이러한 것들은 그 교수 단원을 평가하고 교수-학습을 더 효율적으로 만들기 위해서 수정하는 데 도움을 준다. 비록 수학 교수-학습 결과가 학생과 교사에 의존된다는 것을 인정하지만 특수한 교수 단원의 수학적 내용과 관련된 규칙성을 찾아내는 것은 가능하다. 물론 이러한 규칙성은 모든 경우와 모든 개별 아동에게 발생한다고 기대할 수는 없지만 Piaget의 임상적 인터뷰의 결과와 마찬가지로 반복되는 내용-특유의 규칙성은 찾아낼 수 있다는 것이다. 따라서 수학교육학에서 가장 중요한 연구 결과들은 기본 이론에 기초하여 주의 깊게 설계되고 경험적으로 연구된 교수단원들이며, 이러한 것들이 교사교육의 전문적 훈련의 주요 부분이 되어야 한다.

3. Mathe 2000의 목표와 방향

“설계 과학”으로서의 수학교육학이라는 관점에 기초한 Mathem 2000 프로젝트 활동의 핵심은 모든 학년의 수업을 위한 이론적 개념화와 본질적인 학습환경을 개발하고 촉진하는 것이다. 이러한 관점에 기초한 주요 원리들은 다음과 같다.

1) 수학의 기본 아이디어에 집중

이 프로젝트는 “해박하되 산만하지 말지이다(multum, no multa)”하는 격언에 따라 초등 수학, 대수, 기하의 핵심 내용과 이를 주변 세계에 응용하는 데 중점을 둔다. 이에 대응되는 나선형 원리에 따라 전학년에 걸쳐 여러 가지 기본적인 아이디어로 선택된 내용 영역이 장기적으로 발달되어 간다.

이때 필연적으로 모든 수업은 수학이나 생활 세계 상황의 문제 제기에서 시작된다. 이와 병행하여 실물자료뿐만 아니라 그림 또는 기호적 표현 도구의 수가 제한된다. 실물 자료는 원칙적으로 그 자체를 말하는 것이 아니라 오히려 학생들이 이것을 통해 학습해야 할 주제를 말하는 것이다. 이를 위해서는 우선 이러한 자료에 친숙해져야 한다. 수학에서 표현 수단은 도입단계에서의 개념 형성에 도움이 될 뿐만 아니라 전체적인 학습 과정에 걸쳐 계산 방법과 규칙성에 대한 통찰을 제공하고 논증하는 데 도움이 된다.

2) 능동적 발견 학습과 사회적 학습

최근의 관점에 따르면, 지식은 교사가 학습자에게 전달할 수 있는 기성의 산물이 아니라 자신의 사전 지식을 기초로 학습자 스스로 교사와 다른 학습자와의 사회적 상호작용에 의해 이루어야 하는 구성적 성취의 결과이다. 따라서 교사의 과제는 촉진적인 동기를 발견하여 제공하고, 효과적인 활동수단과 생산적인 연습 문제를 준비하고 무엇보다도 모든 학생들에게 도움이 되는 의사소통을 촉진하고 유지하는 것이다.

3) 학습 과정의 조직으로서의 교수

교사는 학생들이 학문의 기초적이고 확실한 영역을 만들어 내도록 학생들을 도우며, 그 영역 내에서 그들은 계속 자율적으로 활동하고, 스스로 책임을 가지며, 사회적으로 학습하고 더욱이 자신의 학습을 스스로 조직하는 경험을 할 수 있도록 돕는다. 교사의 중요한 과제는 또한 학생들에게 내용을 전달하는 역할은 점점 더 줄어들고, 오히려 내용과 학생 사이를 중재하는 역할이 더 증대되고 있다. 주제를 위해 학생들의 마음을 열어 줄뿐만 아니라 학생들을 위해 주제를 열어 놓는 것이 가치 있는 일이다.

4) 실제와의 협력 활동

프로젝트 활동의 본질적인 요소는 실제와의 밀접한 협력 활동이다. 이러한 이론과 실제의 관계망은 교육적 조언, 교사교육의 두 번째 단계와의 협력, 실천가와의 협동 활동, 교사의 재교육, 수업 연구에서 학교와의 협력 등으로 이루어진다. 이러한 이론과 실제의 관계망을 확고히 하기 위해서 매년 “심포지움 mathe 2000”을 개최하여 강연과 활동 그룹을 통해 새로 개발된 내용이나 실제 경험에 관련된 이야기를 주고받는다. 이 심포지움은 매년 가을이 시작되는 첫 번째 금요일에 개최되며, 이론과 실제를 이어주는 중요한 매개체이다.

4. Mathe 2000의 구체화

Mathe 2000 프로젝트의 기본 관점에 따라 만들어진 교과서가 Zahlenbuch(수 책)시리즈이다. 교과서 개발에 참여한 사람들은 Erich Ch. Wittmann, Gerhard N. Müller, Albert Berger, Ute Birmstengel Höft, Marlene Fischer, Marlies Hoffman, Marja Jüttemerer, Ute Müller 등이다. 교과서 구성의 기본 관점은 Mathe 2000 프로젝트 활동의 주요 원리와 유사하다. 이 시리즈는 1994년에서 1997년에 만들어졌다가 최근 몇 년 동안 일부 수정되어 2001

년에 1학년에서 4학년까지의 수정본이 모두 출판될 예정이다.

1) Zahlenbuch의 기본 원리

능동적 발견 학습과 사회적 학습 : 학습은 학문의 여러 가지 요소와 기능의 유연한 망을 결합하고 그 망의 구조를 구성하는 것으로 이루어진다. 이때 그 지식의 망을 사회적 상호작용 속에서 능동적으로 발견하여 결합하는 것은 학습자 자신이다. 학습자는 자신의 길을 따라 자신의 속도를 결정할 수 있게 될 때, 최선으로 진보한다. Zahlenbuch는 학생들에게 그들이 개별적으로 인지할 수 있는 학습을 제공하는 고유의 길을 따라 여러 가지 다양한 경로를 통해 주제영역을 다룸으로써 어떤 아동도 탈락되지 않도록 세심한 주의를 기울이고 있다. 모든 아동의 의무과정인 “자동적 연습 과정(Blitzrechnkurs)”은 기초 기능의 학습을 보장한다.

수학의 기본 아이디어에 집중 : 산술, 기하, 측정의 기본 아이디어에 집중한다. 이는 세계를 이해하고 학문의 구조를 이해하기 위해 필수불가결하며 초등수학뿐만 아니라 그 이상과 연결될 수 있는 아이디어이다. 모든 기본 아이디어는 1학년부터 나선형 원리에 따라 전개되는데, 즉 수학수업은 이러한 기본 아이디어를 항상 다시 파악하고, 심화하고, 발전시킨다. 예를 들면 기수법 체계는 1학년의 “10 배열표”, 2학년의 “100 배열표”, 3학년과 4학년의 “1000배열책”과 “백만 배열책”으로 구체화되고 확장된다.

수학은 규칙성의 학문이라 볼 수 있다. 이러한 관점에 비추어 “산술과 기하에서의 규칙성과 패턴”이라는 아이디어는 핵심적인 역할을 한다. Zahlenbuch는 수와 규칙성에 관한 책이다. 아동들은 아름다운 규칙성을 통해서 수학의 심미성을 경험하고, 놀이를 통해 의미 있게 수학을 알게 되는 경험을 한다.

기본적이고 의미 있는 자료의 제한적 선택 : 오늘날 실물 교수는 직접적인 역할이나 명백한 역할을 하는 것이 아니라는 사실이 인정되고 있다. 더욱이 아동들은 그것에 익숙해져야 하고 이는 많은 시간을 필요로 한다. 따라서 부족한 시간을 고려한다면 수학적 기본 아이디어를 최선으로 구체화하는 실물들을 제한적으로 선택하는 것이 좋다. 이러한 이유로 Zahlenbuch는 기본적이고 계속해서 의미를 갖는 실물 및 그림과 표현을 선택한다.

생산적인 연습 : 수학 수업에서 연습은 중요한 의미를 가지며 이에 많은 여지를 주는 것이 필요하다. 이러한 의미에서 Zahlenbuch는 주로 연습을 위한 책이다. 전통적인 연습 형태는 일부분만을 차지하며, 그보다는 ‘생산적인 연습’을 강조한다. 이는 도입 형태의 연습에서 구조화된 연습을 거쳐 자동적 연습에 이르기까지 다양하다.

모든 아동의 개별적 촉진 : 초등학교는 계속해서 아동의 입학 당시의 전제 조건의 이

질성이 증가하고 있으며 이에 대비할 필요성 또한 증가하고 있다. 문제는 것이 어떤 것이 최선인가 하는 것이다. 전통적인 방법은 “원점”에서 시작해서 아동의 지식 획득을 같은 속도로 맞추는 것이다. 최근의 인식론에 따르면 이러한 방법은 좋은 방법이 아니다. 아동들은 자신의 전제조건과 가능성에 따라 풍부한 학습의 기회를 가져야 한다. Zahlenbuch에서는 이러한 방식으로 모든 학생들이 공동의 주제를 공유하면서도 다양한 학습을 통해 각자 발전할 수 있도록 한다.

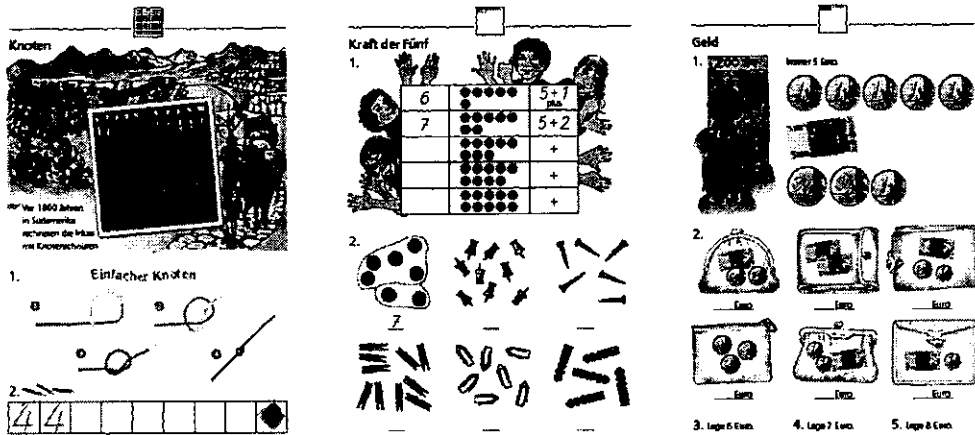
2) Zahlenbuch의 구성

Zahlenbuch는 산술, 기하, 실제 계산 및 사고 교육으로 구성된다.

산술 영역은 구조화된 수 개념의 발달을 촉진한다. 이는 학년이 올라갈수록 확장되는 활동 자료에 의해 뒷받침된다. 20까지의 수, 100까지의 수, 1000까지의 수, 백만까지의 수에 대한 자료들이 제시된다. 1, 2학년에는 다수의 개념을 위해 10까지의 수와 융통성 있는 계산이 기본적인 역할을 한다. 이러한 과정에서 5의 중요성이 강조된다.

다음의 [그림 2]에서 첫 번째는 암산을 위한 전제로서 구조적인 수 개념 이해의 체계적인 발전을 위한 1학년 교과서의 일부분이다. 구조화된 수 개념 이해를 위하여 ‘매듭’이라는 제목이 붙은 쪽에서 1000년 전 남아메리카의 잉카인들이 매듭으로 숫자를 나타냈던 것을 소재로 도입하여 기호로 나타내는 연습을 한다. 그 다음 ‘5의 위력’이라는 제목이 붙은 쪽에서는 5를 기준으로 그림으로 표현된 여러 물체들을 묶어 보고, 기호, 5의 배열, 5와 다른 수의 덧셈으로 나타내는 활동을 통해 5와 관련시켜 6에서 10까지의 수들을 학습한다. 이렇게 5를 강조하는 것은 아동의 사전지식을 고려한 것일 뿐만 아니라 화폐 단위와의 연결성을 생각한 것이라 볼 수 있다. ‘화폐’라는 제목의 쪽에서는 앞쪽의 활동에 이어 동물원의 입장료가 5 Euro가 된다는 상황을 제시하여 다양한 방법으로 5 Euro를 만드는 방법과 6 Euro에서 10 Euro를 다양하게 제시하고 만드는 방법을 통해 수의 가르기와 모으기를 연습하게 한다.

3학년 중반까지 1000을 직관적으로 학습하고, 1000까지의 개략적인 지필 계산과 암산을 확고하게 한다. 이러한 “1000까지의 수”가 수의 구성, 지필 계산, 수의 규칙성 탐구 및 측정의 기초가 된다.



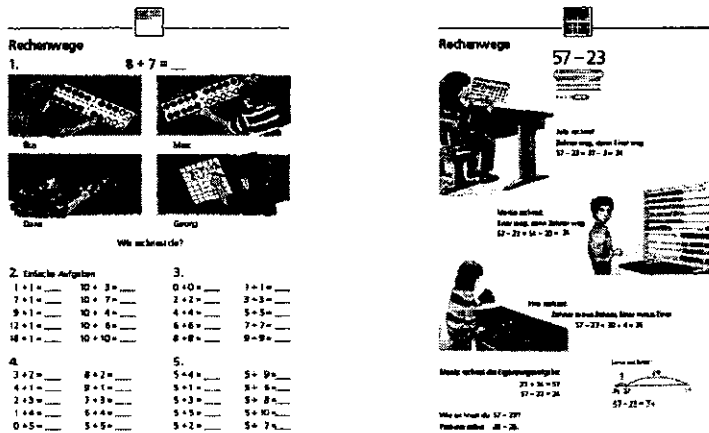
[그림 2] <http://www.klett-verlag.de/grundschule/bereiche/buch/mathe/werke/mathe2000/neu/neu.htm>

기하 영역은 기하학적 구조의 학습을 촉진한다. 산술에서와 같이 기본 아이디어에 집중 하면서 1학년에서 4학년까지 나선형 원리에 따라 전개된다. 구, 직육면체, 원기둥, 기둥, 피라미드, 삼각형, 사각형 등의 입체도형과 평면도형 및 변환이 중심이 된다. 생활 주변의 기하학적 형태가 특별히 강조된다.

실제 계산(Sachrechnen) 영역은 여러 가지 개념의 학습을 촉진한다. 가장 중심이 되는 내용은 양, 연산 및 전략들이다. 이는 실제 계산 상황에서 수학적 표현 수단을 활용하여 하나의 상황에 대한 ‘상’을 만드는 단계를 중요시한다. 이러한 단계는 1학년부터 계속 발전되는데 이때 모든 표현 양식, 즉 활동적, 영상적, 기호적 표현 양식이 사용된다. 1, 2학년에서는 판자나 화폐와 관련된 상황 속에서 구체적인 모방 활동을 강조한다. 3, 4학년에서는 체계적인 실제 계산 과정으로 확장된다. 이러한 과정에서 중요한 것은 실제 과제를 해결하고 묘사하는 다양한 방법을 제시하고 아동이 자신의 방법을 찾도록 하고 더 나아가서는 자신의 문제를 찾아내는 것이다.

다음 [그림 3]의 예는 각각 1학년과 2학년의 교과서의 일부이다. 1학년의 ‘계산 과정’의 쪽에서는 $8+7$ 에 대한 다양한 방법들을 제시하고, ‘너는 어떻게 계산하니?’와 같은 질문을 통해 각 학생이 자신의 계산 방법을 찾거나 의식하게 하고 명백하고 체계적으로 연습을 강화해 간다. 2학년의 ‘계산 과정’에서는 $57-23$ 에 대한 다양한 방법을 제시한다. 맨 위의 그림은 십의 자리를 먼저 계산하는 방법, 두 번째 그림은 일의 자리를 먼저 계산하는 방법, 십의 자리끼리 빼고 일의 자리끼리 뺀 다음에 나머지들을 더하는 방법, 23에 34를 더하면 57

이므로 $57-23=34$ 로 계산하는 수의 여수 계산에 의한 방법, 수직선을 이용하여 57에서 20을 거꾸로 가면 37이고 계속해서 3을 거꾸로 가면 34라고 구하는 방법 등이 제공된다. 그 다음에는 '너는 어떻게 계산하니?'와 같은 질문을 통해 자신의 방법을 찾도록 하며, 마지막에는 $48-25$ 를 자신의 방법으로 계산하도록 요구한다.



[그림 3] <http://www.klett-verlag.de/grundschule/bereiche/buch/mathe/werke/mathe2000/neu/neu.htm>

사고 교육 영역은 수학의 일반적인 학습 목표이다. 수학의 교육적 가치는 전통적으로 사고 교육에 그 초점을 맞추었고, 오늘날은 수학적 탐구, 논증, 형식화 등이 일반적인 수학 수업의 학습 목표로 부각되고 있다. Zahlenbuch에는 이러한 학습 목표가 내용 영역과 체계적으로 연결되어 있다.

이러한 영역들을 중심으로 Zahlenbuch 시리즈에는 교과서뿐만 아니라 지도서에도 다양한 선택적인 활동이 제시되어 있다.

V. 맺으며

지금까지 독일의 학교체제와 수학교사가 되기 위한 교육 및 수학교육과정의 변화와 현재 계속적으로 진행되고 있는 수학교육과정과 수학교육의 개선을 위한 연구인 Mathe 2000 프로젝트에 대해서 살펴보았다. 수학교사교육의 특징은 4-5년 간의 대학교육에서 주로 수학의 내용과 일부 수학교육학 내용 및 부전공을 선택하며 그 이후에 2년 간 한 학교에서 실

습을 거치면서 수학교사로서의 전문성을 함양시키는 것이다. 이런 교육을 거쳐서 정식으로 근무하게 되는 수학교사에게는 교과서의 선택이나 자료의 선택 및 평가에 이르기까지 많은 권한과 자율권이 부여된다.

한편 수학교육과정의 특징을 살펴보면 각 주마다 그 차이점은 있지만 그 목표로는 첫째 이론으로서의 수학 그리고 모델링을 포함하여 자연과학과 사회과학의 문제들을 해결하기 위한 도구로서의 수학, 둘째, 일반화, 증명의 필요성, 구조적 측면, 알고리즘, 무한의 관념, 필연적 사고와 확률·통계의 우연적 사고, 셋째 귀납적 추론과 연역적 추론, 증명 방법, 공리론, 형식화, 일반화/특수화, 발견 활동과 같은 통찰 획득의 방법, 넷째 수학교육의 모든 영역과 측면에서 다양한 논증 수준과 표상 수준, 다섯째 수학의 역사적 측면을 제시하고 있으며 또한 만인을 위한 수학을 고려하여 수학의 유용성, 다른 교과와의 통합 및 수학의 문화 역사적 가치 등을 강조하고 있다.

이러한 수학교육과정을 개선하고 더 나아가서는 수학교육학을 발전을 위한 노력의 일부로 시작된 Mathe 2000 프로젝트는 Wittmann의 “설계과학”으로서의 수학교육학이라는 아이디어를 중심으로 이루어졌다. 그는 수학교육학의 핵심 과제를 수학 교수와 학습을 촉진하는 것으로 본다. 이러한 과제를 실행하기 위해서는 한편으로는 수학교육학에 관련된 학문에 대한 건전한 관계를 바탕으로 한 이론적 틀의 개발과 다른 한편으로는 학교 실재와 이론적인 접근 사이의 균형이 무엇보다도 중요하다.

이러한 기본적인 철학을 바탕으로 하는 프로젝트가 제안하는 수업의 특징은 능동적 발견 학습과 사회적 학습, 수학의 기본 아이디어에 집중, 기본적이고 의미 있는 자료의 제한적 선택, 생산적 연습, 모든 아동의 개별적 촉진이다. 이는 아동의 능동적 활동과 상호작용을 통해 수학적 지식을 능동적으로 구성하고, 자신의 속도와 전제조건에 따라 개별화가능하며, 계속적으로 사용할 수 있고 의미 있는 자료의 수를 적절하게 선택함으로써 학생들 스스로 학습해 나가는 데 도움을 주며, 연습을 통해 자신이 구성한 지식을 확고히 하거나 발전시키며, 산술, 기하나 측정 등의 필수적인 아이디어를 집중적으로 다룰 수 있게 하자는 것이다. 특히 이러한 내용 중 수학 학습의 발전적 측면뿐만 아니라 연습을 많이 강조하고 있는 것은 관심 있게 보아야 할 부분이다.

지금 각 나라에서는 나름대로의 이론적 배경을 바탕으로 수학교육의 개선을 위한 노력을 계속하고 있다. 우리 나라의 경우도 수학 교수 학습의 개선을 위한 많은 노력이 이루어지고 있지만, 이것이 장기적인 효과를 가질 수 있도록 하기 위해서는 이론과 실제의 연결을 통해 계속적으로 다듬어지고 좀더 개선된 이론적 틀에 의해 뒷받침되어 발전되어 나갈 수 있도록 연구자들과 교사들의 망이 구축되는 것이 시급하다고 할 것이다.

참 고 문 헌

- Bussmann, D. A., Schbring, G. and Thiemann, A.(2000). Die aktuellen Mathematik-Lehrpläne der allgemeinbildenden Schulen der deutschen Bundesländer. Occasional Paper Nr. 174 des IDM. <http://www.uni-bielefeld.de/idm/service/lehrplan.html>.
- Griesel, H.(1995). Scientific Orientation of Mathematical Instruction History and Chance of a Guiding Principle in East and West Germany. In Elmar Cohors-Fresenberg(eds.)(1995). Selected Papers from the annual Conference of didactics of Mathematics. Osnabrueck: FMD.e.V. www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/gdm/annual1997.html.
- IEEM(2001). Mathe 2000. <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/files/material>.
- Vollrath, H. J. (éd.)(1997) Mathematics Education in Germany. <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/History/mathed.html>.
- Wittmann, E. C.(1995). Mathematics Education as a 'Design Science'. *Educational Studies in Mathematics*. 29(4). 355-374.