대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.1, 25~44 March 2001

각 개념에 대한 수학교육적 분석

이 종 희 (이화여자대학교)

1. 서 론

생활하며, 호흡하고, 활동하는 공간 속에서 보다 잘 살고 활동하기 위해서 아동은 공간을 탐구하고 알아야 한다. 특히 공간을 표상하고 의미를 부여하기 위해서 각 개념은 중요한 개념중의 하나이다. 기하 영역에서는 도형이 놓여져 있는 공간에 따라 평면 도형과 입체 도형을 구분하고, 평면 도형에는 점, 직선, 선분, 삼각형, 사각형, 원 등이, 입체 도형에는 정육면체, 직육면체, 각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔, 구 등이 포함된다. 삼각형, 사각형, 정육면체, 직육면체, 각기둥 등의 도형에는 각 개념이 기본적으로 포함되어 있어, 이러한 도형의 성질에 대해 정확하게 알기 위해서는 각 개념이 기본적이고 중요한 개념이다.

수학 교육과정에서 각은 점, 직선, 선분 다음으로 소개된다(교육부, 1997). 그러나 학생들은 각에 대해 다양한 생각을 가지고 있는데, 각이란 무엇인가에 대해 Davey와 Pegg(1991)의 연구에서는 1학년부터 10학년까지 학생들은 각을 뾰족하거나 날카로운 코너, 두 직선이 만나는 평면, 두 직선 사이의 거리나 면적, 두 직선의 기울기의 차로 보고 있음을 밝혔다(Michelmore & White, 2000, 재인용). Clement와 Battista(1989)는 3학년 학생들을 대상으로 한 연구 결과 각을 경사진 직선, 두 직선이 만나는 곳, 두 직선 그 자체, 회전으로 보았으며, LOGO를 배운 학생만이 회전이라고 대답하였다. Krainer(1989)에 의하면, 12세 아동을 대상으로 각이 포함된 일상 생활에서의 상황을 말해보라고 했을 때, 대개 회전, 수직이나 수평인 변을 포함하는 정적인 각이 포함된 상황을 제시하였다(Michelmore & White, 2000, 재인용). 이와 같이 학생들이 각에 대해 다양하게 정의하거나 현상과 관련된, 그러나 본질적으로 다른 예를 제시하는 이유는 각 개념이 다면적이라는데 있다.

형식적 수준에서도 학생들은 각에 대한 많은 오개념을 가지고 있다. 예를 들면, Holloway(1967)와 Gales(1981)는 각의 크기 비교에서 학생들은 측정보다는 직관에 의존하고 각의 변의 길이 같은 요소가 측정되어야 한다고 생각함을 발견하였다(Close, 1982, 재인

용). 안영옥(1994)은 각과 각도에 대한 오류 유형으로 각 읽기를 들고 있는데, 꼭지점을 가운데 읽어야 함을 모르고, 꼭지점에 대한 이해 부족, 각을 빼고 읽음, 순서에 관계없이 읽으면 된다고 생각하는 경향을 보였다. 학생들이 가지고 있는 오개념이 고착되기 전에 근절하는 것이 무엇보다도 필요하고, 더구나 초등과 중등 과정을 거쳐 각 개념은 다양하게 제시되므로 더욱 더 관심을 가져야 한다.

수학적 개념은 현상을 수학적 개념으로 조직하는 것이라 할 때 학생들은 실세계에서 다양한 현상에서의 경험을 통하여 각 개념을 형성하게 된다. 따라서 각 개념에 대하여 논의하고자 할 때 두 가지 관점이 논의되어야 한다. 첫째는 어떤 현상이 각 개념으로 조직되어 가는가, 둘째는 그러한 현상이 추상적 각 개념과 어떻게 연결되는가하는 점을 생각해 볼 수 있다.

이를 위해서 첫 번째 관점에 대해서는 실세계에서 각 개념과 관련된 다양한 현상에 대한 분석이, 두 번째 관점에 대해서는 각 개념에 대한 역사적, 수학적 분석을 통하여 가능할 것이다. 본 연구에서는 문헌을 통하여 이러한 관점들을 분석하고자 한다. 이러한 분석을 통하여 각 개념은 다양한 현상을 분류하고 추상화하여 다양한 각 개념이 되고, 따라서 이러한 각 개념은 다면적임을 확인할 것이다. 그리고 이러한 논의를 바탕으로 각 개념이 교과서에 어떻게 도입되고 있는가를 분석할 것이다.

2. 역사적 분석

각 개념은 각에 대한 정의와 각의 측정과 함께 발전되어왔다. 따라서 본 고는 각의 개념을 연구하고자 하는 것이지만 각의 정의는 각의 측정과 밀접한 관련이 있으므로, 두 가지 모두를 살펴보고자 한다.

1) 각의 정의에 대한 역사적 고찰

각의 정의는 널리 받아들여지고 있는 하나의 정의가 없다. 고대에서부터의 각에 대한 많은 정의로 보아 알 수 있듯이 각 개념은 다양함을 알 수 있다. 각 개념은 기하 또는 측정과 함께 서서히 발전되어 왔다. 각 개념이 언제, 어디에서 시작되었는지는 분명하지 않으나, 각은 천문학과 기하학에서 자연스럽게 나왔다고 보기도 한다. 초기에는 각 개념 그 자체가 아니라, 그 안에 포함되어 있는 시간과 길이에 초점이 맞추어져 있었다. Kline(1979)에 의하면,

각 개념은 팔꿈치와 팔에서 비롯된 각을 관찰함으로써 나왔다고 보고, 이러한 해석은 영어에서 각을 arm이라고 하거나, 독일어에서 leg(das Bein)이라고 한 것에서 찾을 수 있다고 주장한다(Close, 1982, 재인용).

초기 그리이스 시대에는 각 개념이 있었고 그것을 정의하려고 했다. 그리이스 사람들은 입체에서 그리고 평면과 곡면에서 각을 생각했다. 두 직선에 의해 만들어진 평면각은 여러 가지 유형의 각 중 하나이다. 다른 유형의 각으로, 곡면 위에서의 각이 있는데, 그것은 곡선 사이의 각 또는 직선과 곡선 사이의 각이다. 그리이스 시대에는 이러한 모든 유형의 각을 다루었다.

Aristotle가 기술했듯이, 평면각에 대한 초기의 아이디어는 하나의 선의 굴절이나 꺾임이었다(Shreves, 1969). 이후에 Euclid는 평면각을 한 평면 위에서 서로 만나고 일직선이 되지 않는 두 직선사이의 기울기라고 정의하였다. 그는 평각을 포함시키기 위해서, 두 직선이 같은 직선일 때 평각이라고 정의하였다[1]. 그리고 Plutarch는 각을 두 직선의 교점에서 두 직선의 발산의 비를 얻으려는 시도로 해석했으며, Carpus는 회전으로서의 각 개념을 정의하였다.

이러한 정의들을 종합하면, 그리이스 시대에는 각의 본질을 양, 질, 혹은 관계로 보았음을 알 수 있다(Shreves, 1969). 각을 양으로 보았을 때, 각의 개념에는 크기가 포함되고, 그래서 상등을 비교할 수 있다. 이러한 부류에 속하는 정의로는 Plutarch와 Carpus의 정의가 있다(Close, 1982). 각을 질적인 것으로 보았을 때, 질은 대상들의 형태를 기술하는데, 그것은 좀더 많이 혹은 좀더 적음에 의해 비교될 수 있다. 좀 더 곧은가 혹은 좀더 굽었는가는 질로 구별한 것이다. 초기의 정의인 굴절은 질의 관점에 포함된다. 관계로서의 각은 두 반직선과 같이 각에 포함된 요소사이의 관계로 기술된다. Euclid에 의한 정의는 각을 양으로 생각한 것으로 볼 수 있지만, 각을 하나의 직선의 형태나 거리에 의해서 보다는 두 직선 사이의 관계에 의해서 정의하였다는 점에서 그의 정의는 이 카테고리에 속한다고 할 수 있다.

그러나 Proclus는 각을 위의 세 가지 측면을 모두 가지고 있는 것으로 보았다. 그에 의하

1) 유클리드는 평각을 '하나의 평면 위에 서로 만나고, 일직선이 되지 않는 두 직선 사이의 기울기'라고 정의하였으나, 이 '기울기'라는 말도 그 이전에는 사용되지 않았고, 또 '각'보다 알려져 있지 않아서 이 정의도 완전하다고 할 수 없다(Boyer, 1991/2000). 즉, 각의 정의에서 '기울기'를 사용하는데, 이러한 정의는 순환적이다. 그 이유는 기울기를 발견할 수 있는 어떤 방법도(다른 말로 하면 두 방향 사이의 차) 없기 때문이다. 그러한 정의 하에서는 0도나 평각을 제외한다. 그리고 하나의 기울기에 대해 하나의 각을 가정하기 때문에 우각을 제외한다. 지금은 평각으로 널리 받아들여지고 있는 직선 각(정의 9)은 초기 그리이스 시대에는 특수한 각이었다.

면, 크기가 포함되고 상등을 생각할 수 있어야 하므로 양의 측면이, 형태에 의해서 생각해야 하므로 질적인 측면이, 직선간에 존재하여야 하므로 관계의 측면이 모두 포함된다고 하였다(Close, 1982).

이후에도 각에 대한 다양한 정의가 시도되었다. Hilbert(1902)는 반직선을 직선의 어떤 점의 한 쪽에 있는 직선의 모든 점으로 정의하고 점, 직선, 평면을 대상의 집합으로 소개하여, 각의 정의를 다음과 같이 정의하였다.

> α를 평면, h와 k를 α위의 점 O로부터 시작되는 서로 다른 두 반직선이라 하자. 반직선 h와 k의 쌍을 각이라 하고, 이것을 $\angle$(h, k)또는 $\angle$(k, h)라 한다.

그의 정의에서 영각, 직선각, 우각은 제외되었다.

Choquet(1969)는 평면 π에서 회전으로 각을 정의하였다. 그의 정의는 등장사상을 중심 개념으로 하고 있다. 평면에서 방향을 보존하는 선형 등장사상의 집합을 회전이라 하고 그것들의 모임은 가환군이 된다. 그의 정의는 다음과 같다(Close, 1982, 재인용).

> 모든 O $\in \pi$인 점에 대해서, O를 중심으로 하는 회전을 O에서의 꼭지점을 갖는 각이라고 한다. 만약 (A_1, A_2)가 시점이 O인 반직선의 쌍이라면, A_1에서 A_2로의 O에 대한 회전을 그 반직선의 쌍에 의한 각이라고 부른다. 그것은 A_1 A_2라고 표기한다.

이 정의에는 영, 직선각, 우각이 포함되어 있으나 각은 mod 2π로 구별하며, 서로 다른 꼭지점에서의 각은 평행이동으로 비교가능 하다.

Schotten(1893)은 *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*에서 각의 정의를 첫째, 각은 두 직선 사이의 방향의 차, 둘째, 각은 두 직선을 포함하는 평면을 벗어나지 않고 그 자신의 위치에서 다른 편으로 그 변을 옮기기 위해서 필요한 회전한 양, 셋째, 각은 한 점에서 만나는 평면 위의 두 직선사이에 포함된 평면의 일부분으로 분류할 수 있다고 하였다(Shreves, 1969, 재인용). 그의 기준에 의해서 위에 언급된 각의 정의를 분류한다면, 첫 번째에 속하는 정의로는 Euclid의 정의, Choquet의 정의는 두 번째에, Hilbert의 정의는 세 번째에 속한다고 할 수 있다.

이상을 요약하면 다음과 같다. 각의 정의는 두 반직선에 의해 만들어진 점의 집합의 합집합으로 정의되거나 두 반평면의 교집합으로 정의된다. 이러한 정의는 정적인 접근으로 해석할 수 있는데, 반면에 동적인 접근은 반직선의 회전양으로 정의되는 것을 말하는데, 변환

기하에서는 각을 변환과 관련지어 해석한다[2].

2) 각의 측정에 대한 역사적 고찰

각의 측정은 주로 천체 연구를 위해서 연구되었다. Hogben은 고대에서도 추와 직각 개념은 중요했다고 주장하고 있다. 직각은 다른 각을 비교할 수 있고, 예각과 둔각을 정의할 수 있는 기준이 된다. 회전이 고려된 초기 천문학의 기록에서, 비록 단편적인 결과이지만 직각 단위가 사용되었다. 그러나 천체 연구에서는 한바퀴 도는데 오랜 시간이 걸리므로 작은 각을 재는 단위가 필요하게 되었다.

바빌로니아에서는 종교적으로, 그리고 달력, 곡물의 수확 패턴을 알기 위해 천문학에 관심을 가졌다. 그들은 관찰 자료를 모으고, 계산을 하고 예측을 하는데 천문학을 사용했다. 그들은 60진법을 개발하여 사용했고, 그것으로 자연수와 분수가 표현되었다. 그러나 원을 360으로 나누었다는 자료는 찾기가 어려운데, Jones는 360은 1년을 대강 어림한 수라고 하였으며, Hogben은 고대 중국에서 원을 365로 나눈 것을 근거로 이러한 견해를 지지하였다 (Close, 1982).

이집트와 바빌로니아 문명에서 삼각형의 길이와 관련된 계산과 표를 만들기는 했지만[3], 그들은 현대적 의미의 각의 측정을 소개하지는 않았다. 이 결과는 각의 측면에서보다는 기하학적 도형에서 길이의 비의 개념에서 온 것이었다.

그리이스에서는 천체 데이터를 체계적으로 연구하기 시작하였고, 각 사이의 관계, 각에 대응하는 호와 그에 대응하는 현의 길이와의 관계를 연구하기 시작하였다. 초기에는 그 결과를 직각이나 직각의 4분의 1과 분수로 표현하였다. Hipparchus는 원을 360으로 나누어서 그것을 기초로 일련의 각을 사용하여 한 각의 현과 호의 길이에 대한 표를 처음 만들었다.

---

2) 참고로 각의 기호 사용에 대한 기원은 다음과 같다. 1634년 Pierre Hergone는 프랑스어 저작에서 각에 대한 기호를 사용했다. 그는 $<$ 과 $\angle$를 사용했는데, $<$는 '보다 작다'는 의미로 이미 사용되고 있는 것이었다. 그 후에 기호 $\angle$만이 남게 되었다. 영국에서는 ¬ 와 $\wedge$이 1750년에 나타났다. 19세기 동안 유럽에서는 a와 b와 사이의 각을 나타내기 위해서 $\overset{\wedge}{ab}$, 각 ABC를 나타내기 위해서 $\overset{\wedge}{ABC}$를 사용했다. 각 기호인 $\measuredangle$은 19세기 후반에 독일에서 처음 나타났으며, 1923년에 Mathematical Association of America의 지원을 받은 National Committee on mathematical Requirement가 미국에서 각에 대한 표준 기호로 $\angle$을 사용하도록 권고했다(Shreves, 1969).

3) 예를 들면, 프림프톤 322에서 $\sec^2 x$와 $\tan^2 x$을 통하여 알 수 있다

그는 황도대의 원을 360으로 나눈 첫 번째 천문학자인 Hypsicles의 영향을 받았다. 황도를 십이궁과 서른 여섯 개의 십분각으로 나누는 360°라고 하는 값은 천문학에서 이루어졌다고 생각할 수 있으며, 약 360일인 한해의 주기는 각 궁을 서른 개의 부분으로 각 십분각을 열 개의 부분으로 잘게 나눔으로써 황도 십이궁계와 십분각의 체계에 쉽게 대응시킬 수 있다. 따라서 각도 체계는 아마 이 대응 관계에서 유래한 것으로 볼 수 있다(Boyer, 1991/2000). Boyer(1991/2000)에 따르면, 각도를 일반적이고 체계적으로 사용하는데 출발점이 된 것은 이러한 결과를 원에 적용한 Hipparchus의 노력이라고 보고 있다.

그리이스 시대에는 삼각비의 개념은 존재하지 않고, '삼각선'을 사용하였다. 이것은 원의 현의 형태를 취하고 있었는데, Ptolemy는 원의 현에 수를 부여하였다. 그는 세밀한 천문학적인 삼각 함수표를 만들었다. 이를 위해 그는 원둘레를 세분하기 위한 체계와 지름을 세분하기 위한 규칙이 필요하였다. 그는 Almagest에서 초, $1/2^{\circ}$에서 180°까지 매 $1/2^{0}$마다 현의 표를 만들었으며, 천문학자들은 1000년 이상 이 표를 사용했다. 그리고 그는 표를 만드는 방법을 알 수 있게 하였다. 그는 각도를 60개의 첫 번째 작은 부분(60′ partes minutae primae)으로, 이것을 다시 60개의 두 번째 작은 부분(60′ partes minutae secundae)으로 나누었다. 이것은 후에 각각 분과 초가 되었다(Boyer, 1991/2000).

각도 개념은 어떤 원에서의 호의 길이와 원 안에 들어있는 중심에서의 각이라는 두 개의 거의 유사한 양의 측정에서 발전되었다. 정적인 양의 표에 의해서 형식적으로 나타나기는 했지만, 호와 현에 의한 각의 측정은 거의 원 모양인 궤도 위를 위성이 회전한다는 역동적인 생각에 그 근원을 가지고 있다. 그러나 각의 측정과 관련지어 보면, 호의 길이에 의해 각도를 해석하는 것이 역동적이거나 정적으로 원의 중심각을 해석하는 것보다 먼저 나왔다고 볼 수 있다.

호에 기초한 각 단위인 라디안은 Muir와 Thomson에 의해 1873년에 정의되었다. 즉, 라디안을 단위 길이의 호 안에 들어있는 단위 원을 중심으로 하는 각으로 정의하였다. 이러한 단위는 삼각함수의 미적분을 간단하게 하였다. 이러한 방법은 라디안이라고 이름 붙여지기 200년 전부터 실제로 사용되었다(Jones, 1953). 후에 Choquet는 현대적인 각의 정의에 따라, 각의 측정을 정의 구역이 실수 R이고 공변역이 각의 집합 A인 함수로 정의하였다(Close, 1982).

수학적으로, 각의 측정은 길이, 넓이, 부피와 같은 양의 측정과는 아주 다르다. 길이 단위는 임의적이고 상대적인데 반해서, 각은 자연스런 단위를 가지고 있고, 그것은 작도로 원의 반지름과 같은 길이의 현으로 원을 나누는 것이 가능한데 이러한 방법으로 중심에서의 각

이 모두 같다.

3. 교수학적 분석

앞에서 살펴본 바와 같이 각에 대한 정의는 다양하다. Freudenthal(1973)은 교수학적으로도 중요하고, 엄밀성의 각 수준으로 발달될 수 있는 각의 중요한 네 가지 개념을 상세히 분석하였다. 그는 역사적이거나 공리적인 비교보다는 그러한 개념과 그 제한점, 응용을 고려하여 각에 대한 개념을 분류하였다. 즉, 초등 기하학적 각 관점, 삼각법 관점(혹은 각도측정법), 해석기하학적 관점, 공간 기하에서의 관점이며, 각 개념을 그 측정과 더불어 소개해야 함을 강조하였고, 특히 각의 측정은 각 개념의 발달을 도와주기 위한 구체적 경험을 제공하는 것으로 보았다.

초등기하학적 관점에서 각은 비유향 평면에서 반직선의 비순서쌍으로 정의된다. 그리고 각도는 $0°$에서 $180°$사이에서 결정된다. 앞에서 살펴본 각을 직선[4]들 사이의 기울기로 정의한 Euclid의 각의 정의가 여기에 속한다.

삼각법에서 각은 유향 평면에서 반직선의 순서쌍으로 정의된다. 그리고 각도는 mod 2π로 결정된다. 각은 반지름이 1인 원의 중심각으로 본다. 그래서 호와 각은 서로 대응된다. 여기에서 호도법의 사용이 가능하다. 평면에서 방향을 정한 후, 각을 정의하고, 2π보다 큰 각은 mod 2π 로 표현한다. 각의 덧셈과 뺄셈은 mod 2π로 수행가능하고, 회전과 반사로 해석할 수도 있다.

해석 기하학에서 각은 유향 평면에서 직선의 순서쌍으로 정의된다. 만약 사인함수와 코사인 함수를 해석기하학에서 생각한다면, 그것은 모든 실수인 독립 변수에서 정의되고, 주기가 2π 인 함수가 된다. 만약 독립 변수를 각으로 본다면, 각은 $-\infty$에서 ∞까지 허용된다. Freudenthal은 이것을 해석적 각 또는 회전 각 이라고 불렀다. 해석 기하학적 관점에서의 각을 반직선의 순서쌍의 관점에서 생각해 보면, 두 직선 g, h가 만나는 점 O를 중심으로 반향 반직선 g^+, g^-그리고 h^+, h^-를 각각 생각할 수 있다. 그래서 해석기하학의 각을 삼각법적 관점에서 생각해 보면, $\measuredangle(g^+, h^+)$, $\measuredangle(h^+, g^-)$, $\measuredangle(g^-, h^-)$, $\measuredangle(h^-, g^+)$가 의미 있다. 이것은 $\alpha = \measuredangle(g^+, h^+)$라 하면, $\measuredangle(h^+, g^-)$,

4) 여기에서 직선은 사실상 반직선을 의미한다. 그렇지 않으면 이웃한 각을 구별할 수 없기 때문이다.

$\measuredangle(g^-, h^-)$, $\measuredangle(h^-, g^+)$는 π와 α로 나타낼 수 있다.

해석 기하학적 관점에서 각의 정의에 의하면, 두 직선 $l_1 : y = ax$, $l_2 : y = bx$사이의 각을 $\phi = \measuredangle(l_1, l_2)$라고 할 때, $\tan\phi = \frac{b-a}{1+ab}$가 된다. 따라서 $\measuredangle(l_2, l_1) = -\phi$이다.

공간 기하에서의 각은 공간에서 직선의 비순서 쌍이다. 그래서 각도는 $0°$에서 $180°$ 범위에 있다.

Freudenthal은 유클리드 기하학, 삼각법, 해석기하학적 관점에서의 각들을 각각 절대각, 각, 회전 각이라는 용어로 구분하고 있다. 그 개념들에 대한 각도는 각각 반원 각도기(semicircle protractor)[5], 원 각도기(full circle protractor)[6], 주행거리계(hodometer, 또는 electricity meter)[7]를 사용하여 측정할 수 있다. 이와 같은 설명은 <표 1>로 정리될 수 있다.

<표 1> 각 개념의 교수학적 분석(Freudenthal, 1973)

기하의 종류	각 개념	각도의 범위
초등기하	비유향 평면에 있는 반직선의 비순서쌍	0도와 180도 사이
삼각법	유향 평면에 있는 반직선의 순서쌍	mod 2π
해석기하	유향 평면에 있는 직선의 순서쌍	mod 2π
공간 기하	비유향 공간에 있는 직선의 비순서쌍	0도와 180도 사이

방향과 여러 번 회전한 결과에 관한 규약이 설명된 후, 각의 측정에 대한 규칙이 소개되어야 한다. 결과적으로 학생들에게 각 개념과 측정 모두를 통합한 접근이 필요하다. 그리고 위의 분석을 정적인 접근과 동적인 접근으로 분류하면, 유클리드 기하와 공간 기하는 정적인 접근으로 그리고 삼각법과 해석기하는 동적인 접근에 포함시킬 수 있으며, 정적인 각의 시각적 측면과 동적인 접근에 포함되어 있는 운동 모두가 각 개념 발달에 중요하다.

4. 현실적 문맥에서 각

5) 이것은 현재 우리나라에서 보편적으로 쓰고 있는 각도기이다.
6) 이 기구의 그림은 Close(1982)를 참고할 수 있다.
7) Freudenthal(1973)은 해석 기하에서의 회전각은 주어진 원판의 전체 혹은 부분이 회전한 것을 기록할 수 있는 주행거리계 등과 같이 회전을 측정할 수 있는 도구는 무엇이든지 가능하다고 하였다.

역사적 분석에서는 형식적 수준에서의 각 개념에 대한 정의를 다음과 같이 정리하였다. 우선, 도형적인 정적인 측면과 운동을 포함하는 동적인 측면으로 나누어 질 수 있다. 각을 공통 끝점을 갖고 있는 반 직선의 쌍, 두 개의 반평면의 교집합에 의해 만들어진 영역으로 정의한 것은 정적인 측면으로, 두 직선 사이의 한 점을 중심으로 한 회전 양으로 정의한 것은 동적인 것으로 분류될 수 있다. 이를 교수학적 분석과 관련시키면, 초등 기하에서의 정의인 공통 끝점을 갖고 있는 반직선의 쌍은 정적 측면으로, 삼각법과 해석 기하에서의 정의는 동적 측면으로 분류될 수 있다.

그러나 이러한 형식적 수준에서의 각 개념은 일상 생활과의 관련에서 많이 발견된다. Freudenthal(1973)도 지적하였듯이, 다양한 각 개념들은 초등 경험적인 수준에서 개발될 수 있으며, 각각의 예는 학생들이 일상생활에서 만날 수 있기 때문에 각과 그것과 관련된 규약의 이해에 도달하는 데 중요하다. 아동의 초기의 각의 개념은 정적이고 또한 동적이어야 한다. 그들은 가능한 한 많은 문맥에서 정적인 각을 만나야 하고, 반직선 쌍과 모서리를 그리는 데 있어서 그것을 인식해야 한다. 그들은 또한 여러 번 또는 부분적으로 돌려봄으로써 회전으로서의 각도 경험해야 한다. 그리고 적절한 측정 도구는 각의 개념을 강화시키기 위해 소개되어야한다.

Michelmore와 White(1998)는 아동들은 각 개념이 일상생활에 포함되는 예로 바퀴, 문, 가위, 부채, 이정표, 사면, 교차로, 타일과 벽 등을 들었다. 그리고 수학적 아이디어인 회전 양으로서의 각과 물리적 환경에서 각을 어떻게 인식하는지를 연구했다. 대상은 2,4,6학년이었으며, 일상생활에 포함되는 이러한 예에 정적인 예와 동적인 예를 균형 있게 포함시켰다. 그들의 연구에 의하면, 대체로 2학년에서는 벽, 교차로, 타일이 유사성이 있으며, 4학년에서는 벽, 교차로, 타일, 가위가 유사성이 있고, 문 부채, 언덕, 표지판에서도 유사성이 있다고 대답하였다. 그리고 6학년에서는 벽, 교차로, 타일, 가위, 부채, 표지판이 유사성이 있다고 대답하였다. 이는 전체적으로 볼 때, 벽과 교차로 또는 타일, 가위, 부채와 표지판, 문, 언덕, 바퀴의 순서로 유사성이 있다고 본 것으로 정리할 수 있다(Nickson, 2000, 재인용).

Magina와 Hoyles(1997)는 일상생활의 문맥에서 각을 어떻게 지각하는가를 연구하였는데 (Nickson, 2000, 재인용), 그들은 시계와 시간을 통해서 각을 연구하였다. 30분일 때 분침의 위치를 확인하고, 주어진 시간에서 30분이 지났을 때 분침의 위치를 확인하는 문제를 제시하였을 때, 학생들은 전략이 없거나, 30분에 대한 고정된 전략, 주어진 시간에 따라 조정하는 전략을 보였다. 그리고 6-7세 아동들은 전략을 보이지 않았으며, 8-11세의 아동들은 시간은 잘 읽었으나 시간사이의 시간 간격은 조정하지 못했다. 12-14세 아동들은 예상도 잘했고, 수행도 잘했다.

이러한 두 연구 결과를 종합해보면, 아동은 초기에는 고정된 것으로, 그리고 후에는 변화하는 것, 즉, 정적 개념에서 동적 개념으로 발전해 가는 것을 알 수 있다. 따라서 다양한 각 개념을 지도해야 한다면 정적인 것을 먼저 지도해야 함을 알 수 있다.

5. 각 개념의 발달

앞장에서 살펴본 바와 같이 각 개념은 그 형식적인 정의 뿐 아니라 현실과의 관련이 무엇보다도 중요한 개념이다. 학생들은 "각"으로 주위 환경을 개념화하고, 나이가 듦에 따라 그들이 하는 방법을 세련시켜 나아간다. 따라서 첫째, 어떤 물리적 경험으로부터 학생들은 각 개념을 이끌어 내는가, 둘째, 학생들은 서로 다른 물리적 상황을 어떤 방법으로 개념화하는가, 셋째, 물리적 경험은 학생들의 각 개념 형성에 영향을 주는가를 살펴보는 것이 필요하다. 이상과 같은 내용의 탐색은 각 개념의 지도에 대한 중요한 시사점을 제공할 것이다.

수학적 개념의 발달은 상황적 인지 이론과 추상화 이론으로 설명될 수 있다(Michelmore & White, 2000). 상황적 인지 이론에 의하면, 지식이 발달되고 전개되는 활동에서는 학습과 인지는 구별되어서는 안되고, 서로 보조적인 역할을 하는 것도 아니다. 상황적 지식은 특별한 상황에서만 나온다. 그것은 일반적이고 추상적인 원리를 그 상황에 적용하는 것이 아니다. 예를 들면, 최근의 민속 수학에 대한 연구에 의하면, 추상적인 수학적 지식이 없어 보이는 문맹자 가운데서 수학자 같은 행동을 하는 경우도 볼 수 있다(Nunes, 1992). 상황적 인지 옹호자들은, 학생들에게 추상적 원리만을 가르치면 추상적이고 탈문맥화된 지식만을 갖게되어 특수한 상황에 적용을 못하고 있다고 말하고 있다.

추상 수학이 많은 상황에 응용될 수 있을 때는 강력한 힘을 발휘하게 된다. 이때의 지식은 널리 응용가능한 지식이기 때문에, 실제에서 좀 더 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 추상화 이론은 Piaget을 비롯하여, Dienes, Skemp, Dreyfus, Dubinsky, Sfard에 의해 연구되었다. 본 연구에서 사용되는 추상화에 대해서는 다음 Skemp의 글에 잘 나타나 있다.

> 추상화란 일상 생활에서 우리의 경험들 사이의 유사성을 인식하는 활동이다. 분류란 이러한 유사성을 기초로 해서 우리의 경험을 함께 묶는 것을 의미한다. 추상은 영속하는 사고변화의 한 종류이며-추상화의 결과이다- 이것은 이미 형성된 부류와 유사성을 가짐으로써 우리에게 새로운 경험을 인식하게 해 준다. 간단히 말하면, 우리가 분류할 수 있는 어떤 것을 학습하며, 그것이 부류를 정의할 수 있는 성질이다. 활동으로서의 추상화와 마지막

결과로서의 추상을 구별하기 위해서 우리는 앞으로 추상을 개념이라고 부를 것이다 (Skemp, 1987/1997).

Skemp(1987/1997)는 감각과 운동 경험에서 오는 것을 일차 개념, 다른 개념에서 오는 것을 이차 개념이라고 하고 이것들을 구별하였다. 유사한 것들을 인식할 때 수학적 개념이 우선 형성된다. 예를 들면, 자연수 개념은 작은 대상들을 세는 과정에서 형성된다. 그 이후에 개념은 서로 다른 방향으로 발달된다. 첫째, 그것은 다른 상황이 원래의 상황과 유사하게 보일 때 점점 더 일반적이 된다. 예를 들면, 자연수 개념은 세거나 측정 상태가 될 수 없는 커다란 수까지 확장된다. 둘째, 여러 개의 서로 다르게 보이는 개념은 좀더 높은 수준에서는 모두를 포함하게 된다. 예를 들면, 자연수, 음수, 유리수, 무리수는 실수에 포함된다. 이러한 두 가지 개념 발달의 결과 좀더 추상적인 개념이 된다.

일상적 개념, 초등 수학적 개념, 고등 수학적 개념은 유사하기는 하지만, 서로 다른 방법으로 발달된다(Michelmore & White, 2000).

아동은 아주 어릴 때부터 사물을 분류한다. 분류의 기준이 되는 유사성은 대개 그 대상의 목적이 되기도 한다. 그리고 일반적으로 하나의 속성으로 정의 가능하지 않다. 일상적인 대상은 속성을 기초로 분류된다. 어떤 대상은 가장 중요한 속성을 포함하기도 하고, 다른 것들은 그 부류의 원소로 판단하기에 충분한 정도로 관련 있는 속성을 포함하기도 한다. 그러나 다른 것들은 대개 적절하지 않은 속성들을 선택하여 분류하기도 한다.

또한 아동은 여러 대상의 모임을 하나의 대상으로 생각하기도 한다. 예를 들면, 가위, 종이, 돌을 가지고 하는 게임에서 그것들 모두를 하나로 생각하지 개개로 생각하지 않는다. 일상적 부류는 다양한 수준에서 형성된다[8]. 그리고 부분 류들로 나뉘어진다. 부분 류를 가지고 있는 개념은 각각의 요소 개념보다 더 상위의 개념이다. 이러한 방법으로 일상적인 개념의 위계가 형성된다.

부류는 그 원소가 첨가됨으로써 그 영역이 넓어진다. 예를 들면, 빨강, 파랑 등으로 추상화된 색깔이라는 개념은 자홍색이나 담홍색도 색깔에 포함시킴으로써 확장되어간다. 그러한 과정이 일반화이다. 여기에서 추상화와 일반화를 구별하게 되는데, 새로운 개념이 나오게 되는 과정을 추상화, 기존의 개념의 의미가 확장되는 과정을 일반화라고 한다.

초등 수학적 개념은 일상 수학적 개념처럼 분류와 추상화 과정을 통하여 형성된다. 그러나 하나 중요한 차이점이 있다. 구체적인 대상이나 심상 뿐 아니라 일상적인 대상이나 개념

8) 피아제는 일상적인 대상의 부류로부터 일상적 개념을 형성하는 과정을 경험적 추상화라고 하였다.

들 사이의 관계도 분류 대상이 된다. 예를 들면, 수 개념은 대상의 집합의 성질 뿐 아니라 그 대상 위의 연산의 성질을 추상화한 결과이다[9].

일상적 개념에서와 같이 일반화는 초등 수학적 개념 형성에서 중요한 역할을 한다. 예를 들면, 분수에 대한 최초의 경험은 반으로 나누거나 네 조각으로 나누는 것에 한정되어 있다. 그러나 어떤 시점에서, 단위 분수에서 일반적인 분모를 가진 분수로 일반화가 일어난다. 그리고 그 후에 합성 분수가 나타난다. 수학적 개념과 일상적 개념 형성의 차이는 개념과 관계가 동시에 추상화된다는 점이다. 또 다른 차이는 초등 수학적 개념에서는 정의의 사용이 시작된다는 점이다. 분석이 진행됨에 따라 현존하는 수학적 개념의 기본적인 속성이 정의에 포함된다.

형식적인 수학적 개념은 초등 수학적 개념으로부터의 추상화 결과이다. 예를 들면, 군 개념은 수 집합, 함수, 교환 등의 구조화된 집합으로부터의 추상화로 간주될 수 있다. 그러나 이러한 대상들은 무정의 용어와 무정의 연산의 성질에 의해서 정의된다. 그렇게 구성된 것을 형식적 수학적 개념이라고 한다.

이상과 같은 수학적 개념 발달을 토대로 한 Michelmore와 White(2000)의 연구를 중심으로 각 개념의 발달을 논의해 보고자 한다.

각 개념 발달의 첫 번째 단계는 상황적 각 개념 단계이다. 학령전 아동이 경험하는 가위, 타일, 십자로, 비탈길, 언덕, 지붕, 연필 끝, 구부러진 막대, 기중기 등과 같은 일상적 상황에는 각 개념이 포함되어 있다. 자신이 경험한 이러한 상황, 즉 물리적 각 상황을 정신적으로 분류함으로써 각 개념이 생기게 되고, 이것을 상황적 각 개념이라고 한다. 상황적 각 개념은 상황에 한정되어 있으며, 비슷한 행동을 포함하고, 유사한 사회적 환경에서 경험된다. 상황적 각 개념은 시간이 흐름에 따라 일반화될 수 있다. 예를 들면, 언덕을 생각할 때 초기에는 그들이 걸어다니는 길에 한정되지만, 후에는 차를 타고 가는 길도 포함시킨다. 그러나 이때는 이러한 상황에만 한정하여 생각한다. 일하는 사람이 지붕 위를 지나가는 것을 보았을 때도 아동은 결코 지붕을 언덕에 포함시키려 하지 않는다. 아동은 학교에 들어가면서 많은 상황적 각 개념을 형성한다. 예를 들면, 6세 아동은 언덕의 모델을 인식하고, 그것의 뾰족함이 변할 때 어떤 결과가 생기는지 알게된다.

두 번째 단계는 문맥적 각 개념 단계이다. 초등학교 동안 대개의 학생들은 '기울기'와 같은 단어 사용을 배우고, 물리적 각 상황을 물리적 각 문맥이라는 것으로 분류한다. 예를 들

9) Piaget는 논리 수학적 개념과 일상적 개념을 분류하였다. 그는 수학적 추상화는 조작되는 대상이 아니라 행동 그 자체에서 온다고 하고 이를 반영적 추상화라고 하였다. Vygotsky도 이와 유사하게 일상적 개념과 과학적 개념을 구분하였다.

면, 학생에게 언덕과 같이 기울어진 것의 예를 들라고 할 때, 그들은 지붕이 포함된 좀 더 넓은 범위의 상황을 말한다. 이 때 학생들은 언덕, 지붕 등에서 유사성을 인식한다. 그리고 이것을 기울기라고 부르게 된다. 아동은 몇몇의 상황들 사이의 유사성을 인식하고, 그 후에 그것에 다른 것을 포함하여 일반화한다. 아동이 일반적으로 기울기에 대해 추론할 수 있게 되고, 그래서 기울기는 그 나름대로 심상이 되고, 그 아동은 개념을 가지게 된다. 이 때의 개념을 문맥적 각 개념이라고 부른다.

문맥적 각 개념은 경험적 추상화에 의해서 형성되고, 이것은 이차 경험적 추상화가 된다. 예를 들면, 첫 번째 단계에서는 할 수 없었던, 길과 지붕 모두 기울어져 있다는 것을 알고 유사성을 발견한다. 그리고 기울어진 대상의 다른 예를 포함하여 확장시킨다. 이 단계에서 기울기 문맥, 교차 문맥, 모서리 문맥, 구부러짐 문맥, 회전 문맥이 나타난다. 예를 들면, 교차로, 가위 등의 상황은 교차로 문맥, 탁자의 윗면, 패턴 블럭, 연필의 끝, 탁자의 모서리 등의 상황은 모서리 문맥, 구부러진 길, 부메랑, 구부러진 팔 등의 상황은 구부러짐 문맥, 경사진 막대, 기차 이정표, 지붕, 언덕 등의 상황은 기울기 문맥, 문, 자동차 와이퍼 등의 상황은 유한 회전 문맥, 천장에 달린 선풍기, 회전문, 등대의 불 등의 상황은 무한 회전 문맥에 포함된다. 이 단계에서는 아동은 수학적인 각 개념을 알지 못한다. 그리고 모서리, 기울기, 회전과 같은 용어를 정의할 필요를 느끼지도 않는다. 기울기 문맥에 포함되는 예들을 서로 비교할 수는 있지만, 기울기 문맥과 회전 문맥의 예를 비교할 수는 없다. 상황적 각 개념과 문맥적 각 개념 단계가 앞에서 언급한 일상 수학적 개념에 속한다.

세 번째 단계는 추상적 각 개념이다. 이 단계의 아동은 문맥들 사이에서 유사점을 발견한다. Michelmore(1998)에 의하면, 4학년 학생들은 교차 문맥과 구부러짐 문맥사이의 유사성을 인식하는 경향을 보인다. 그리고 그들 중에서 기울기 문맥과 모서리 문맥 사이의 유사성을, 회전 문맥과 교차 문맥 구부러짐 문맥 사이의 유사성을 인식하는 학생도 있다고 보고하였다(Michelmore & White, 2000, 재인용).

각 문맥들 사이의 유사성을 인식하는 것은 각에 대한 초등 수학적 개념의 시작이라고 할 수 있다. 유사성을 인식하기 위해서는 학습자의 물리적 정신적 행동이 필요하다. 예를 들면, 학생은 타일과 지붕사이의 유사성을 물리적으로 지붕과 공간에 맞게 하기 위해서 타일의 모서리를 움직여 봄으로써 확인한다. 이로써 기울기 문맥과 모서리 문맥사이의 유사성을 확인한다. 반영적 추상화에 의하여 서로 다른 각 문맥에서의 유사성을 인식할 수 있게 된다.

유사한 것으로 인식되는 물리적 각 문맥의 모임을 추상적 각 영역이라고 하고, 유사성이 하나의 개념이 되었을 때, 이를 추상적 각 개념이라고 한다. 아동들은 교차 문맥, 모서리 문맥, 구부러짐 문맥, 기울기 문맥에서 유사성을 인식하고, 또한 유한 회전 문맥과 무한 회전

문맥에서 유사성을 인식한다. 따라서 학생들은 두 가지 추상적 각 영역을 인식하고 그것이 추상적 각 개념이 된다.

학생들은 서로 다른 물리적 각 문맥 사이의 유사성에 대해서 다음과 같은 반응을 보였다 (Michelmore & White, 2000). 하나는, 점에 관한 것인데, 그것은 모서리 문맥과 교차 문맥 모두 점과 관련되어 있다는 것, 즉 각의 꼭지점에 관한 것이다. 다른 하나는, 하나의 기울어진 선이 있다는 것이다. 공통적인 것은 한 점에서 만나는 두 개의 기울어진 선, 즉, 각의 변이 있다는 것이다.

이 단계의 아동은 문맥들 사이에서 유사점을 발견하기도 하지만, 각에 관한 각각의 문맥의 다른 점도 알 수 있다. 교차 문맥을 모델화하여 각을 공통 끝점을 갖는 한 쌍의 반직선으로 정의하고, 모서리 문맥을 모델화하여 두 개의 반평면의 교집합인 영역으로 정의하고, 회전 문맥을 모델화하여 두 직선 사이의 한 점을 중심으로 한 회전으로 정의한다 (Michelmore & White, 2000).

각 개념 발달에 있어서 네 번째 단계는 형식적인 수학적 개념 단계이다. 이 단계에서는 각각의 형식적인 수학적 구조에 따라 적당한 각 개념이 있고, 그것들이 각 개념으로 통합될 수 있다는 것을 아는 단계이다. 이 단계에서는 각각의 수학적 구조에 따라 다양한 문제 상황이 제시되고, 문제 상황에서 각 개념으로 점진적 형식화된다. 형식적인 수학적 구조로는 초등 기하, 삼각법, 해석기하, 공간 기하가 있으며, 이에 따른 각에 대한 설명은 교수학적 분석에서 구체적으로 논의되었다.

6. 교과서 분석

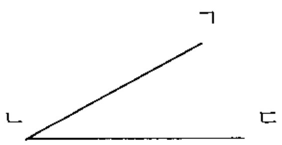
앞에서 분석된 각 개념에 따라 교과서에서 제시되고 있는 각 개념의 지도에 대해서 분석해 보고자 한다.

1) 초등학교

우선 상황적 각 개념 수준에서 각을 알도록 하기 위해서 구체물들이 도입되고 있다. 초등학교 3-가 평면도형 단원에서 각을 주변의 구체물을 관찰하여 각의 모양을 알아보고, 각의 모양을 한 구체물을 대고 그려보면서 각의 개념을 이해하고 각에 기호를 붙여서 읽어보도록 하고 있다. 앞장의 논의와 관련지어 보면, 6차 교육과정에서는 구체물에 대한 예가 교

과서에서는 지붕으로, 익힘책에서는 시계, 사다리, 물고기의 입으로 도입되었다. 7차 교육과정에 따른 교과서에서는 교실에서 만나는 모난 부분을 찾아보게 하거나 종이를 접어서 뾰족한 부분을 만들어 보도록 하고 있고, 익힘책에서는 구체물에 대한 예가 거의 없이 도형에서 모난 부분을 찾아보도록 하고 있어, 다양한 구체물을 일상생활에서 찾아보아서 상황적 각 개념을 추출하도록 하는 기회가 오히려 줄어들었다고 할 수 있다. 각에 대한 정의는 다음과 같다(교육부, 2001a).

한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 한다.



왼쪽 그림과 같이 점 ㄴ을 각의 꼭지점이라고 하고,
두 직선 ㄱㄴ, ㄴㄷ을 각의 변이라고 합니다.
이때 각을 각 ㄱㄴㄷ 라고 합니다.

각에 대한 정의는 3차 교육과정에서는 끝점이 같은 두 사선으로 이루어진 도형, 4차 교육과정에서는 끝점이 같은 두 반직선으로 이루어진 도형, 5차 교육과정에서는 한 점에서 만나는 두 선분으로 이루어진 도형으로 정의되었다. 6차 교육과정[10] 이후에는 한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형으로 정의하고 있다.

이러한 정의는 교수학적 분석에 의하면 초등 기하적 관점에서 각을 정의한 것으로 볼 수 있다. 3학년에서는 각을 도입하여 하나의 도형으로 취급하면서 각의 크기를 겹쳐 보기를 통해서 비교하도록 하고, 어느 각이 큰지를 비교하도록 하고 있다. 일반적으로 ∠ㄴㄱㄷ은 평면을 두 부분으로 나누기 때문에 각을 2개로 볼 수 있지만, 초등 수학에서는 평각보다 큰 각을 지도하지 않으므로 각은 좁은 부분을 나타내는 것으로 지도한다(강지형, 2000).

4학년 1학기에는 각의 양적인 측면을 인식하도록 하여 각의 크기를 막대 한 쌍을 제시하여 한 쪽 막대를 시계 반대 방향으로 돌려보게 하여 각의 크고 작음을 변의 벌어진 정도로 구분할 수 있게 하여 각을 양으로 인식하게 한다.

10) 각을 가장 정확하게 정의한 것은 끝점이 같은 두 반직선으로 이루어진 도형으로 본 4차 교육과정 때이다. 그러나 5차 교육과정에서는 반직선이라는 용어가 삭제되었으므로 각을 그릴 때 화살표도 그리지 않게 되었다. 이로 인하여 각은 두 개의 변으로 된 도형이라고 생각하여 각을 정의할 때 선분으로 정했다. 그러나 각의 두 변은 원래 반직선 이었던 것이기 때문에 한쪽으로 계속해서 연장해야 의미가 있는 것이다. 따라서 6차 교육과정에서는 이 의미를 살리기 위해서 선분을 직선으로 바꾸었다(교육부, 1998b). 7차 교육과정에서도 각을 이와 같이 정의하고 있다.

2) 중학교

중학교 7-가(강행고 외, 2001)에서는 초등학교에서와 달리 반직선에 의하여 각을 정의하고 있다.

> 한 점으로부터 시작되는 두 반직선 OA, OB로 이루어진 도형을 각이라고 하며, 이것을 기호로 ∠AOB 또는 ∠BOA와 같이 나타낸다. 이때, 점 O를 각의 꼭지점이라 하고, 두 반직선 OA, OB를 각의 변이라고 한다.

3) 고등학교

고등학교 공통 수학 삼각함수 단원(정봉화 외, 1997)에서는 각을 다음과 같이 정의하고 있다.

> 평면 위에 한 고정된 반직선 OX와 점 O를 중심으로 회전하는 반직선 OP가 있을 때, 반직선 OP가 반직선 OX의 위치에서 현 위치까지 회전한 양을 ∠XOP의 크기로 정의한다.
> 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전하는 방법에는 두 가지가 있는데, 시계바늘이 도는 방향과 반대인 방향을 양의 방향이라 하고 시계바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다.
> 일반적으로, ∠XOP의 크기의 하나를 ao라고 할 때, ∠XOP의 크기를 나타낼 수 있는 값들은 $\theta° = a° + 360° \times n$ 이다.
> 이 각 $\theta°$를 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

공통수학의 삼각함수 단원에서는 평면도형의 각을 나타낼 때는 0°에서 360°까지의 각으로 가능하였지만, 회전 운동에서는 360° 이상의 각을 생각해야 할 때도 있고, 회전의 방향을 구별해야 할 때도 있어 일반각이 필요하다고 기술하였다.

교수학적 분석에 의하면, 이러한 중학교와 고등학교 공통 수학의 삼각함수 단원에 있는 각의 정의는 삼각법에 따른 정의라 할 수 있다.

그리고 고등학교 공통수학(박두일 외, 1997)의 도형의 방정식 단원에서는, 직선 사이의 각에 대해, 한 점 (y_1, y_2)와 기울기 m이 주어진 직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 이며, 이때 m은 그 직선과 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 되고, 이러한 직선의 식에 의해 두 직선이 수직일 조건을 구하도록 제시되어 있다.

고등학교 수학 II의 삼각함수와 복소수 단원에서는 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 공식을 다음과 같이 제시하고 있다(박규홍 외, 1997,).

직선 $y=mx+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\tan\theta=m$이다.

$m=\tan\theta_1$, $m'=\tan\theta_2$, $\theta=|\theta_1-\theta_2|$이고 $\tan\theta>0$ (θ: 예각).

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\theta_1-\theta_2)|=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| \quad (\text{단, } mm'\neq-1)$$

여기에서는 직선의 방향은 고려하고 있지 않지만, 해석기하적 관점에서의 각으로 설명하고 있는 것이라 할 수 있다.

고등학교 수학 II의 '벡터' 단원(박두일외, 1997)에서의 각의 정의는 다음과 같다.

공간에 있는 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기는 각 직선에 대한 두 방향 벡터 $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$가 이루는 각이므로, 이 각의 크기 θ를 $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}$로 정의하고 있다. 이때, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$로 범위를 제한하고 있다.

이것은 공간기하학적 관점이라고 할 수 있다.

이상의 분석을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 초등학교에서 각의 정의를 도입하기 전에 다양한 상황의 제시가 부족하다고 할 수 있다. 그리고 상황적 각 개념과 문맥적 각 개념 단계가 거의 생략되고, 추상적 각 개념으로 제시되고 있다. 다양한 상황의 예로는 5장에서 언급된 교차로, 가위, 탁자의 윗면, 패턴 블럭, 구부러진 길, 지붕, 언덕, 문, 자동차 와이퍼, 회전문 등의 상황이 적절하게 주어져 유사성을 인식하도록 해야 할 것이다. 그리고 중학교 이후에는 다양한 형식적인 수학적 개념이 도입되고 있다. 6차 교육과정에서와는 달리 7차 교육과정에 의한 대부분의 7-나 교과서에서는 생활 주변에서의 다양한 예를 이용하여 각을 도입하고 있어 바람직하게 변해가고 있다고 할 수 있다.

둘째, 초등학교 3학년에서 한 점에서 그은 두 선분으로 이루어진 도형으로 정의한 정적

인 정의와 중학교 1학년에서 한 점 O에서 시작하는 두 반직선 OA와 OB로 이루어진 도형으로 정의한 정적인 정의에서, 고등학교 공통 수학에서는 반직선 OP가 고정되어 있는 반직선 OX의 위치로부터 출발하여 점 O를 중심으로 하여 이루어진 것이라는 동적인 정의로 변해 감을 알 수 있다. 정적인 접근에 의해서 정의된 각의 개념으로는, 회전으로서의 각에 대한 경험을 할 수는 없다. 동적인 접근에 의한 각 개념에 대한 경험을 주기 위한 예로 방향에 의한 방법을 들 수 있다(Gravemeijer, 1998). 비행기 착륙시 항공 교통 관제에서 관제사가 조종사에게 방향을 바꾸도록 하는 상황을 줄 수 있다. 이러한 상황의 탐구로부터 학생들이 가지고 있는 방위 개념을 기초로 동적인 각 개념과 각도가 자연스럽게 나올 수 있게 할 수 있을 것이다.

7. 결론

각은 학생들이 도형과 관련된 개념을 다룰 때 접하게 되는 기본적인 개념 중 하나이다. 역사적 분석에서 각의 정의는 정적인 접근과 동적인 접근이 있음을 밝혔으며, 교수학적 분석에서는 초등기하적 관점, 삼각법적 관점, 해석기하적 관점, 공간기하적 관점이 있음을 확인하였다. 이러한 각 개념은 실세계 상황을 일반화・추상화하는 과정을 통하여 얻어지게 되는데, 다양한 상황의 제시는 다양한 각 개념이 있음을 아는데 무엇보다도 필요하다. 각개념은 상황적 각 개념, 문맥적 각 개념, 추상적 각 개념, 형식적 각 개념 단계를 거쳐 발달된다. 이러한 단계를 거침으로써 각을 정확하게 이해할 수 있으며, 이로써 각이 포함된 다른 많은 개념을 이해하는데 도움이 될 것이다.

교과서 분석을 통하여 현재 초・중・고등학교 수학에서 다양하게 각이 정의되고 있음을 알 수 있었다. 삼각법 또는 해석기하학적 관점 등 한 가지 혹은 두 가지 관점에서의 각의 도입은 각 개념에 대해 제한적인 생각을 가질 수밖에 없다. 따라서 다양한 각 개념의 지도는 필요하지만, 이러한 다면적인 각 개념의 지도는 상황이 충분히 고려되어 그 의미가 정확하게 전달되도록 지도되어야만 적절한 상황에서 각 개념을 정확하게 사용할 수 있게 되고, 그렇게 함으로써 오개념도 줄일 수 있게 된다. 각 개념의 발달 단계와 관련된 다양한 상황에 대해 심도 있게 연구되어져야 하고, 이것은 이후의 과제가 될 것이다.

참 고 문 헌

강행고 외 (2001). 중학교 수학 7-나. 중앙교육 진흥연구소.

강지형 외(2000). 초등 수학교육. 동명사.

교육부(1997). 수학과 교육과정.

______(1998a). 수학 3-1.

______(1998b). 수학 3-1. 초등학교 교사용지도서.

______(2001a). 수학 3-가.

______(2001b). 수학 3-가 익힘책.

박규홍 외(1997). 공통수학. 동화사.

박두일 외(1997). 공통수학. 교학사.

박두일 외(1996). 고등학교 수학 II. 교학사.

안영옥(1994). 국민학교 아동의 도형에 대한 오개념 분석. 한국 교원 대학교 석사학위 논문.

정봉화 외(1997). 공통수학. 형설출판사.

Boyer, C. B. (2000). 수학의 역사 상 · 하 (양영오, 조윤동 역). 서울: 경문사. (원저 1991 출판).

Clement, D. M. & Battista, M.T. (1989). Learning of geometry concepts in a Logo environment. *Journal for Research in Mathematics*, 20, 450-469.

Close, G. S. (1982). *Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer stage.* Unpublished master's thesis. Polytechnic of the South Bank, London.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel, Dordrecht, Holland.

Gravemeijer, K. (1998). From a different perspective: Building on student' informal knowledge. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*(45-66). Lawrence Erlbaum Associates.

Hilbert, D. (1902). *The foundation of geometry.* The Open Court Publishing Company.

Jones, P. S. (1953). Angular measure. *Mathematics Teacher*, 46, 419-426.
Michellmore, M. C. & White, P. (1995). Development of the angle concept by abstraction from situated knowledge. Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association.
______(2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238.
Nickson, M. (2000). *Teaching and learning mathematics*. Cassell Education.
Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and everyday cognition. In D. A. Grows(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(557-574). New York: Macmillan.
Shreves, J. W.(1969). Angle. In NCTM, *Historical topics for the mathematical classroom*(362-363). Thirty-first Yearbook.
Skemp, R. R. (1997). 수학학습심리학(황우형 역). 서울: 민음사. (원저 1987 출판).

An Analysis on Angle concepts in mathematics Education

Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

The purpose of the study is to investigate multifaced aspects of angle concepts and the developments of angle concepts and to examine textbooks in relation to above investigation. In this study, we obtain the following results. First, angle concepts have static and dynamic aspects and develop situated angle concepts, contextual angle concepts, abstract angle concepts, through formal angle concepts. Second, our textbooks emphasize abstract angle concepts and formal angle concepts but lack situated angle concepts and contextual angle concepts.