

홉필드 신경회로망에서 뉴런의 입력단저항에 관한 연구

Study on Neuron's Input_Resistance in Hopfield Neural Networks

강민제 · 이상준

Min-Je Kang and Sang-Joon Lee

제주대학교 전기전자공학부 및 통신컴퓨터공학부

요 약

뉴런의 입력단에 연결된 저항은 하드웨어 구현 시 필요하다고 알려져 있으나 어떤 영향을 미치는가에 대한 것은 많이 알려져 있지 않다. 다만, 회로망의 안정성과 수렴하는 속도에 부분적으로 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 이 논문에서는 입력단에 연결된 저항이 신경회로망의 평형점 위치 및 평형점 특성에 미치는 영향 등을 분석하였다.

ABSTRACT

Even though the neuron's input resistance is needed in implementing hardware, not much has been known about the effect of this resistance on the networks. Only this resistance has been known to partially define the time_constant and to partially effect on the stability of networks. This paper discusses the effect of the input_resistance on the locations and characteristics of equilibrium points in the continuous type Hopfield neural networks.

Key Words : Input Resistance, Stability, Equilibrium, Hopfield Neural Networks.

1. 서 론

Hopfield가 소개한 신경회로망[1-3]은 근본적으로 두 종류로 분류할 수 있는 데, 즉 뉴런의 임, 출력함수에 따라 이산형, 연속형으로 나눌 수 있으며, 이산형이라 함은 뉴런의 출력이 입력의 어떤 임계치에 따라 두 상태 값만을 유지하는 것이고, 연속형이라 함은 뉴런의 출력이 연속적인 값을 유지하는 것이다. 연속형에서는 뉴런의 출력이 연속적으로 변화하면서 비선형 미분방정식의 해를 구해나가는 반면, 이산형에서는 뉴런의 출력이 이산적으로 변하면서 방정식의 해를 구하기 위해 수렴해간다[7]. 그러나 이산형 신경회로망은 연속형 신경회로망의 특수한 경우라 할 수 있다. 즉, 뉴런의 활성화 함수에서 시그모이드 이득률이 무한대인 특수한 경우가 이산형 신경회로망으로 간주할 수 있다.

Hopfield 신경회로망은 Lyapunov형태의 계산에너지함수 [1]를 갖고 있어서, 시간이 흐름에 따라 이 에너지함수가 감소하는 방향으로 수렴해 가는 데, 지역극소점으로 빠지는 경우가 종종 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 많은 방법들이 연구되어 지고 있는데[7-8], 이러한 노력중의 하나는 에너지함수를 분석하여 회로망의 안정 및 수렴상태를 해석하는 것이다. Park은 시그모이드 이득률이 무한대인 경우의 에너지함수에서 최소점으로 수렴하기 위한 필요조건에 대해 발표하였고[4], Anthony는 신경회로망의 안정도에 대해서 논문을 발표하였다[6].

뉴런의 입력단에 연결된 저항은 신경회로망의 에너지함수

의 제 3항에 영향을 미치며, 이 3항은 시그모이드 이득률이 무한대에 가까울수록 아주 작아져 거의 무시할 수 있다. 고로 시그모이드 이득률이 아주 크다고 가정한다면 이 저항 값의 선택을 자유로이 할 수 있으나, 시그모이드 이득률이 유한한 값을 갖는 연속형 신경회로망에서는 이 저항의 값에 따라 회로망의 성능은 원래 기대에서 벗어나기 일 수이다. 이런 경험은 하드웨어를 구현해 본 사람은 한 번씩 겪었으리라 생각된다. 이 논문에서는 연속형 신경회로망을 하드웨어로 구현 시에 뉴런의 입력단에 연결하는 저항의 값이 에너지함수에서 평형점의 위치 및 특성에 미치는 영향에 관해 논의하려고 한다. 이러한 조건 및 특성들에 대한 분석은 에너지함수가 지역극소점으로 빠지는 원인을 이해하는 데 많은 도움이 되리라 믿는다.

2. Hopfield Model for Neural Networks

이 논문에서는 그림 1에서 보여주듯이 Hopfield 형태의 신경회로망에 대해 논의하려고 한다. 이런 시스템은 뉴런의 입력단에 KCL(Kirchoff Current Law)를 적용하여 다음과 같은 방정식으로 표현할 수 있는데,

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^n W_{ij} v_j + I_i - G_i u_i, \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

여기서,

$$G_i = g_i + \sum_{j=1}^n W_{ij} \quad (2)$$

접수일자 : 2000년 11월 3일

완료일자 : 2001년 3월 12일

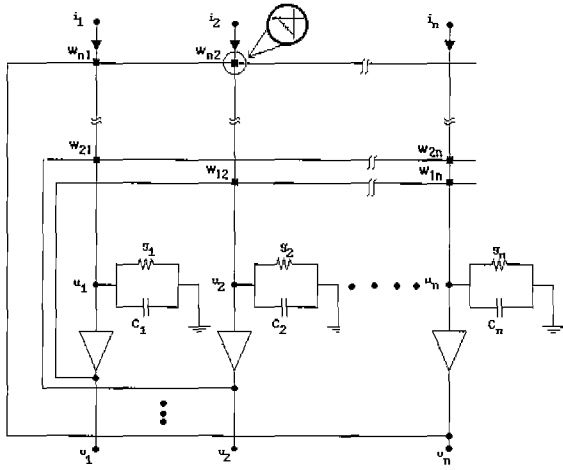


그림 1. Hopfield 신경회로망의 전기적 모델
Fig. 1. Electrical model of Hopfield Neural Networks

$$v_i = \sigma_i(u) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha u_i)} \quad (3)$$

- W_{ij} : j 번째 뉴런의 출력과 i 번째 뉴런의 입력을 연결하는 연결강도,
- I_i : 뉴런으로 입력되는 바이어스 전류,
- C_i : 뉴런의 입력단에서 접지에 연결된 캐패시터,
- g_i : 뉴런의 입력단에서 캐패시터와 병렬로 연결된 컨덕턴스,
- v_i : 뉴런의 출력전압,
- u_i : 뉴런의 입력전압,
- α : 뉴런 활성화 함수의 시그모이드 이득률.

Hopfield(1984)는 그의 신경회로망에 대하여 다음과 같은 에너지함수를 소개하였다[3].

$$E(v) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^n I_i v_i + \sum_{i=1}^n G_i \int_{0.5}^{v_i} \sigma_i^{-1}(z) dz \quad (4)$$

그리고, 이 에너지함수가 감소하는 즉, 음방향 미분은 다음과 같이 계산되어지는 데,

$$-\frac{dE}{dv_i} = \sum_{j=1}^n W_{ij} v_j + I_i - G_i u_i \quad (5)$$

여기서 흥미로운 것을 발견할 수 있다. 식 (5)를 식 (1)과 비교해 보면 에너지함수 $E(v)$ 의 음방향 미분은 뉴런의 입력 전압 u 의 속력에 직접 비례한다는 것이다. 그리고 캐패시턴스 C_i 는 비례상수에 해당하며, 다음과 같다

$$-\frac{dE}{dv_i} = C_i \frac{du_i}{dt} \quad (6)$$

또한, Hopfield는 만약 W 가 대칭이고 $\sigma(u)$ 가 단조증가 함수이면, 이 에너지함수 $E(v)$ 는 Liapunov 함수임을 밝혔는데, 다음과 같이 쉽게 알 수 있다[1].

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{dE}{dv_i} \frac{dv_i}{dt} = - \sum_{i=1}^n C_i \frac{du_i}{dt} \frac{dv_i}{dt} \\ &= - \sum_{i=1}^n C_i \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 \sigma'(u) \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

3. 입력 단의 저항값과 연속형 Hopfield 신경회로망의 평형점

이 장에서는 연속형 Hopfield 신경회로망에서 입력 단의 저항 값이 평형점에 미치는 영향을 분석하려한다. 평형점의 위치와 특성들이 이 저항 값에 따라서 변하며, 그리하여 회로망의 수렴 점들이 변하게 된다. 이런 형태의 신경회로망들은 종종 지역극소점으로 수렴하는 문제를 갖고 있는데, 입력 단의 저항 값에 대한 분석은 이러한 문제를 이해하는 데 중요한 역할을 할 것이라 생각된다.

3.1 평형점의 위치

뉴런의 입력단에 부수적으로 연결하는 캐패시터와 컨덕턴스는 시스템의 안정도와 time constant에 부분적으로 기여한다고 알려져 있으나, 부수적으로 첨가하는 정도로 알려져 있을 뿐 이들 소자들이 시스템에 미치는 영향에 대해서는 많은 것이 알려져 있지 않다. 특히, 하드웨어로 구성하기 전까지는 별로 느끼지 못하는 부분이다. 왜냐하면 알고리즘 상으로는 뉴런의 이득률을 상당히 큰 값을 선택함으로써 이들 소자들의 영향을 줄일 수 있기 때문이다. 그러나 실제로 이득률이 증가함에 따라 뉴런의 출력은 이산형에 가까워져서 연속형 신경회로망의 속성을 이용하는 회로에서는 원래 기대와는 다른 결과를 종종 갖게 된다.

연속형 신경회로망의 계산 에너지함수의 평형점은 뉴런의 입력 단에 부수적으로 연결된 컨덕턴스의 많은 영향을 받는데, 이 논문에서는 이에 대해 논의하고자 한다.

정리 1 : 뉴런의 이득률이 유한 값인 연속형 신경회로망에서는 평형점의 위치에 관한 다음의 항들은 사실이다.

- (1) I 번째 뉴런의 입력 단에 연결된 총 컨덕턴스 $G_i = g_i + \sum_{j=1}^n w_{ji} = 0$ 이면 평형점 v^{eq} 는 오직 하나만 존재하며, $(-\infty, \infty)^n$ 에 속한다.
- (2) $G_i \neq 0$ 이면 평형점 v^{eq} 는 $(0, 1)^n$ 에 속한다.

증명 (1) :

제시된 에너지함수 식 (4)의 평형점은 다음의 행렬형태로 표현된 방정식을 풀어서 찾을 수 있다.

$$\nabla E(v) = Wv + I - Gu = 0 \quad (8)$$

여기서,

$$u_i = \sigma^{-1}(v_i) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{v_i}{1-v_i} \right) \quad (9)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & 0 & W_{23} & \dots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & W_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t,$$

$$I = [I_1, I_2, \dots, I_n]^t,$$

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^t,$$

$$G = \text{diag} \left[\sum_{j=1}^n w_{1j} + g_1, \sum_{j=1}^n w_{2j} + g_2, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj} + g_n \right].$$

식 (9)을 이용하여 식 (8)의 제 3항에 관하여 재정리하면 다음과 같다.

$$\frac{G}{a} \ln \left(\frac{v}{1-v} \right) = Wv + I \quad (10)$$

그런데 I 번째 뉴런의 입력단에 연결된 총 컨덕턴스, $G_i=0$ 인 경우는 식 (10)에서 좌변항은 사라지게 되며, 다음과 같이 재정리 할 수 있다.

$$Wv = -I \quad (11)$$

그리고 W 이 대칭행렬이며, $w_{ii}=0$ 이면 W의 역행렬이 존재한다[10]. 고로, 평형점은 다음과 같다.

$$v^{eq} = -W^{-1}I \quad (12)$$

고로, 평형 점 v^{eq} 는 유일하며, $(-\infty, \infty)^n$ 에 속한다.

<사례 연구>

사례연구를 위해 2-비트 A/D 변환기를 선택하였다. 연결 강도 바이어스 전류를 포함한 에너지 함수는 다음과 같이 표현할 수 있다[3]. 여기서 x는 아날로그 입력 값이다.

$$E = -\frac{1}{2} [v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - [v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \int_{0.5}^{v_1} \sigma^{-1}(z) dz \\ G_2 \int_{0.5}^{v_2} \sigma^{-1}(z) dz \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(8)을 이용하여 에너지함수의 평형점을 찾기 위하여 다음과 같이 쓸 수가 있다.

$$\nabla E(v) = - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G_1}{a} \ln \left(\frac{v_1}{1-v_1} \right) \\ \frac{G_2}{a} \ln \left(\frac{v_2}{1-v_2} \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

$G_1 = G_2 = 0$ 이면 식(14)는 다음과 같이 된다.

$$\nabla E(v) = - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

식(15)를 만족하는 평형점은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

그림 2는 식(16)을 이용하여 평형점의 궤적을 구한 결과를 보여주고 있다. 평형점들은 입력 x에 따라 선형적으로 변하고 있음을 보여 주고 있으며, 평형점은 전공간 $(-\infty, \infty)^2$ 에 존재 가능함을 보여 주고 있으며, 즉 n-비트 A/D 변환기 경우의 평형점은 전공간 $(-\infty, \infty)^n$ 에 존재함을 알 수 있다.

증명 (2) :

식(10)의 좌변항을 다음과 같이 정의 하자.

$$S(v_i) = \frac{G_i}{a} \ln \left(\frac{v_i}{1-v_i} \right), i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

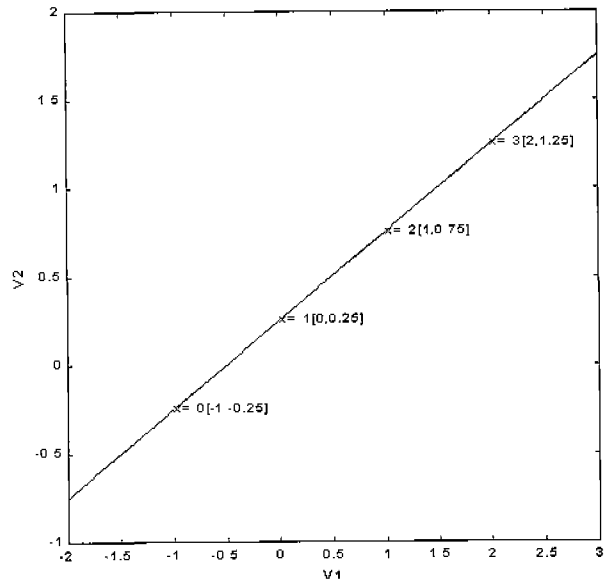


그림 2. $G_1 = G_2 = 0$ 인 경우: 평형점의 궤적
Fig. 2. Trace of the equilibrium points in case $G_1 = G_2 = 0$

$G_i \neq 0$ 이면 식 (17)은 존재하며, $a > 0$, $v_i \in (0, 1)$, $S: (0, 1) \rightarrow R$ 는 연속적으로 미분 가능한 함수이다.

$G_i > 0$ 이면 함수 S는 증가함수 이다, 즉, $\forall v_i^{j1}, v_i^{j2} \in (0, 1), v_i^{j1} > v_i^{j2} \Rightarrow S(v_i^{j1}) \geq S(v_i^{j2})$ 이고, $\lim_{v_i \rightarrow 0^+} S(v_i) = -\infty$, $\lim_{v_i \rightarrow 1^-} S(v_i) = \infty$ 이다. 다시 설명하면, $\forall v_i \in (0, 1) \Rightarrow S(v_i) \in (-\infty, \infty)$ 인데, 그러나 W와 I는 응용회로에 따라 결정되는 상수이다. 고로, 식 (10)의 우변은 $\forall v_i \in (0, 1)$ 에서 유한 값이 되므로, 식 (8)을 만족하는 평형점 v^{eq} 는 $(0, 1)^n$ 에 속한다.

$G_i < 0$ 인 경우는 함수 S는 감소함수이다. 다시 말하면 $\forall v_i^{j1}, v_i^{j2} \in (0, 1), v_i^{j1} > v_i^{j2} \Rightarrow S(v_i^{j1}) \leq S(v_i^{j2})$ 이며, $\lim_{v_i \rightarrow 0^+} S(v_i) = \infty$, $\lim_{v_i \rightarrow 1^-} S(v_i) = -\infty$ 이다. 즉, $\forall v_i \in (0, 1) \Rightarrow S(v_i) \in (\infty, -\infty)$ 인데, 그러나 위에서 설명했듯이 식 (10)의 우변은 $\forall v_i \in (0, 1)$ 에서 유한 값이 되므로, 식 (8)을 만족하는 평형점 v^{eq} 는 $G_i > 0$ 인 경우와 마찬가지로 $(0, 1)^n$ 에 속한다.

<사례 연구>

사례연구를 위해 위에서 사용했던 2-비트 A/D 변환기를 다시 선택했으며, 에너지함수의 평형 점을 찾기 위하여 이 경우에 식 (14)를 다음과 같이 쓸 수가 있다. 위에서 설명했듯이 x는 아날로그 입력이다.

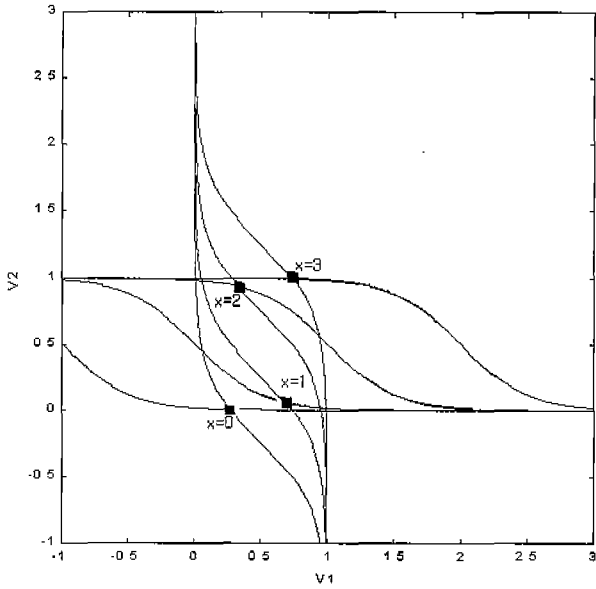


그림 3a. $G_1 = G_2 = 0.5$, $\alpha = 2$, $x = 0, 1, 2, 3$ 의 경우: 평형점의 위치

Fig. 3a. Location of Equilibrium point in case $G_1 = G_2 = 0.5$, $\alpha = 2$, $x = 0, 1, 2, 3$

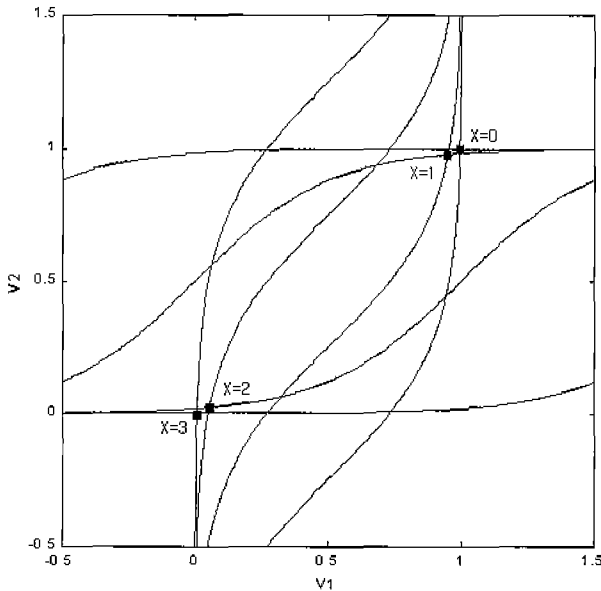


그림 3b. $G_1 = G_2 = -0.5$, $\alpha = 2$, $x = 0, 1, 2, 3$ 인 경우: 평형점의 위치

Fig. 3b. Location of the equilibrium point in case $G_1 = G_2 = -0.5$, $\alpha = 2$, $x = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{bmatrix} \frac{G_1}{\alpha} \ln\left(\frac{v_1}{1-v_1}\right) \\ \frac{G_2}{\alpha} \ln\left(\frac{v_2}{1-v_2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

그림 3a, 그림 3b는 각각 $G_1 = G_2 = 0.5$, $G_1 = G_2 = -0.5$

인 경우에 $x = 0, 1, 2, 3$ 에 대해서 평형점들을 보여준다. 이 그림들은 $x = 0, 1, 2, 3$ 각각의 경우에 식 (18)의 비선형 연립방정식을 그래프를 이용하여 구한 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 평형 점들은 그림 2에서와는 달리 모든 경우에 공간 $(0, 1)^2$ 에 속함을 알 수 있다.

3.2 평형점의 관별

연속형 신경회로망의 계산에너지함수의 평형점은 뉴런의 입력 단에 부수적으로 연결된 컨덕턴스의 값에 따라 위치가 달라짐을 밝혔다. 이 절에서는 평형점의 극성이 이들 값에 따라 극대, 극소, 또는 변곡점으로 변함을 논의 하고자 한다.

정리 2 : 연속형 신경회로망에서는 평형점의 극성들에 관하여 다음의 항들은 사실이다.

- (1) 총 컨덕턴스(G) > 0이면 hypercube의 모서리 부근에 위치한 평형점은 극소점이다.
- (2) 총 컨덕턴스(G) = 0이면 평형점의 위치에 상관없이 변곡점이다.
- (3) 총 컨덕턴스(G) < 0이면 hypercube의 모서리 부근에 위치한 평형점은 극대점이다.

증명 (1) :

평형점의 극소, 극대, 또는 변곡점인가를 판별하기 위하여 Hessian 행렬을 이용하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = -W + G \frac{\partial u}{\partial v} \quad (19)$$

식 (3)에서 뉴런의 활성화함수를 입력 u 에 대해 미분하여, 뉴런의 출력 v 의 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{ae^{-\alpha u}}{(1+e^{-\alpha u})^2} \\ &= \alpha \frac{1}{1+e^{-\alpha u}} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-\alpha u}}\right) \\ &= \alpha v(1-v) \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)를 이용하여 식 (19)를 재정리하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = -W + G \frac{1}{\alpha(v-v^2)} = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{\alpha(v_1-v_1^2)} & -w_{12} & \dots & -w_{1n} \\ -w_{21} & \frac{G_1}{\alpha(v_2-v_2^2)} & \dots & -w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & \dots & \frac{G_1}{\alpha(v_n-v_n^2)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Gerchgorin의 Circle이론에 의하면[9], $\exists \lambda_i$ (고유치) s.t

$$\frac{G_i}{\alpha(v_i-v_i^2)} - \sum_{j=1, j \neq i}^n |w_{ij}| \leq \lambda_i \leq \frac{G_i}{\alpha(v_i-v_i^2)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |w_{ji}| \quad i=1, \dots, n \quad (22)$$

고유치들을 좀 더 자세히 알아보기 위하여 대각행렬요소를 다음과 같이 정의하자

$$D(v_i) = \frac{G_i}{\alpha(v_i-v_i^2)} \quad (23)$$

총 컨덕턴스 $G_i > 0$ 이면 hypercube의 모서리부근에서 $D(v_i)$ 는 양의 무한대 값으로 변하므로 즉,

$$\forall v_i, \lim_{v_i \rightarrow 0^+} D(v_i) = \infty, \lim_{v_i \rightarrow 1^-} D(v_i) = \infty \text{이며, } \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} \text{ 는}$$

유한한 값이므로, hypercube의 모서리부근 ($v_i \rightarrow 0^+, v_i \rightarrow 1^-$)에서는 식 (22)에서 알 수 있듯이 Hessian행렬의 모든 고유치들은 양의 값을 갖게 된다. 즉, Hypercube의 모서리부근에서 H는 positive definite이다. 고로 모서리부근에 위치한 평형점은 극소점이 된다.

<사례 연구>

2-비트 A/D 변환기의 경우, 식 (21)을 이용하여 Hessian 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{\alpha(v_1 - v_1^2)} & 2 \\ 2 & \frac{G_2}{\alpha(v_2 - v_2^2)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

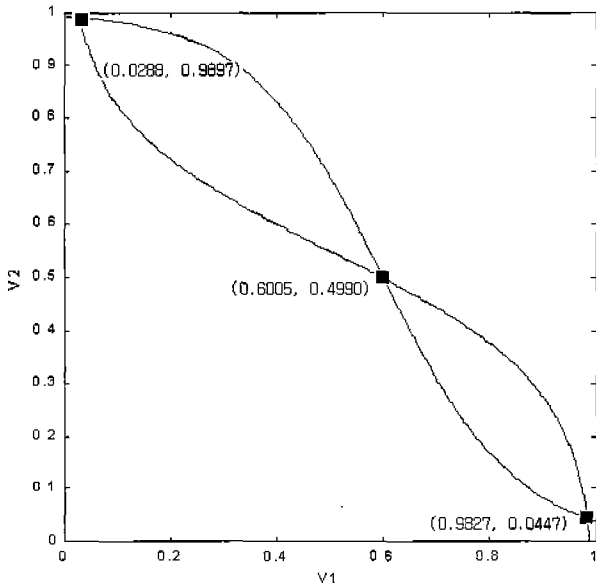


그림 4a. $x=1.6, \alpha=2, G_1=G_2=0.5$ 인 경우의 평형점의 위치.
Fig. 4a. Location of the equilibrium point in case $x=1.6, \alpha=2, G_1=G_2=0.5$

그림 4a는 $x=1.6, \alpha=2, G_1=G_2=0.5$ 인 경우, 식 (18)의 비선형 연립방정식을 그래프를 이용하여 구한 결과이며, 이 연립방정식을 만족하는 평형점은 다음과 같이 $v^{eq1}=(0.0288, 0.9897), v^{eq2}=(0.6005, 0.4990), v^{eq3}=(0.9827, 0.0447)$ 3곳이었다. 그리고, 모든 평형점들은 항상 hypercube $= (0,1)^n$ 안에 존재하고 있음을 알 수 있다. 평형점에서 특성들을 알아보기 위해 hessian 행렬의 고유치 값들을 조사해 보면, hypercube의 중심부근의 평형점 v^{eq2} 에서의 고유치들은 각각 3.0212, -0.9781로 평형점 v^{eq2} 는 변곡점임을 알 수 있었다. 그러나, 예측한대로 모서리부근의 평형점들 즉, v^{eq1} 에서 고유치들은 8.6854와 24.777 그리고, v^{eq3} 에서 고유치들은 15.1362와 5.4236으로 모두 양의 값들이었다. 고로 모서리부근의 평형

점들은 극소점임을 알 수 있다. 그림 4b는 $x=1.6, \alpha=2, G_1=G_2=0.5$ 인 경우의 에너지 맵을 보여주며, 그림 4c와 그림 4d는 모서리 부근에 극소점이 존재함을 보여준다.

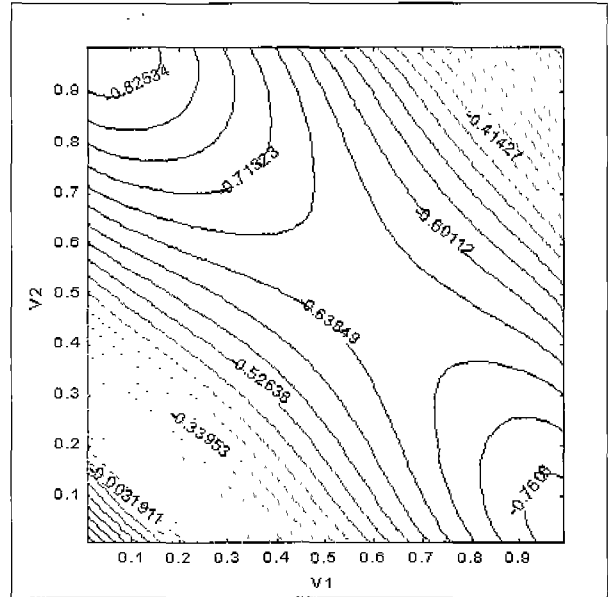


그림 4b. $x=1.6, \alpha=2, G_1=G_2=0.5$ 인 경우의 에너지 맵
Fig. 4b. Energy map in case $x=1.6, \alpha=2, G_1=G_2=0.5$

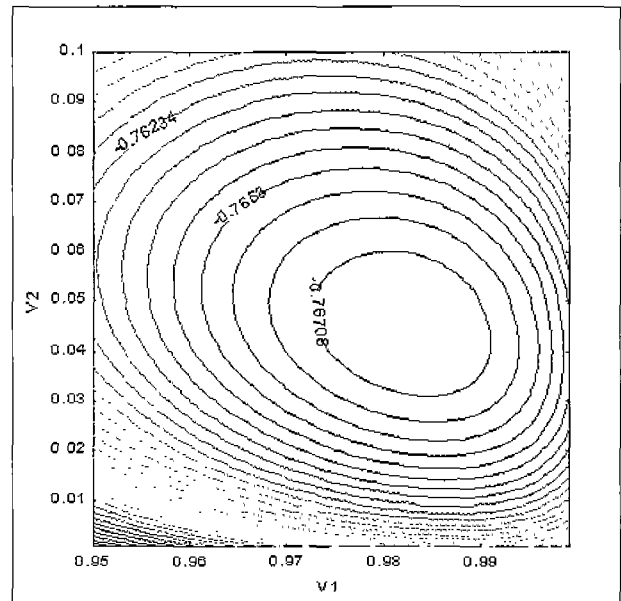


그림 4c. 그림 4b의 우,하 모서리 부근 확대 에너지 맵
Fig. 4c. The the right-bottom micro energy map of Fig. 4b.

증명 (2) :

$G_i=0$ 인 경우는 식 (14)에서 우변의 둘째 항이 없으므로 H는 다음과 같이 되고,

$$H = \nabla^2 E(v) = W \quad (19)$$

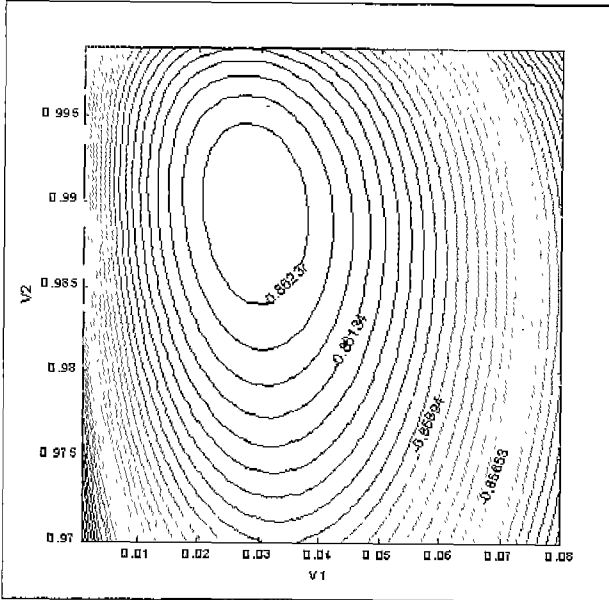


그림 4d. 그림 4b의 좌,상 모서리 부근 확대 에너지 맵 Fig. 4d. The left_top micro energy map of Fig. 4b

여기서 $W = W^T$, $W_i = 0, i=1, 2, \dots, n$ 이다.

임의 행렬의 trace는 그 행렬의 모든 고유치들의 합과 같으므로 H의 trace는 다음과 같이 표현 가능하고[9],

$$T_r(H) = - \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (20)$$

여기서 λ_i 는 H의 고유치들이다.

그런데, H의 대각행렬 요소들은 0이므로 ($W_i = 0, i=1, 2, \dots, n$), 식 (20)를 재정리하면 다음과 같다.

$$T_r(H) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (21)$$

식 (21)의 뜻은 모든 고유치들이 0이거나, 고유치들의 합이 0임을 뜻한다. 그런데, 모든 고유치들이 0이면, 0행렬을 뜻하므로 이 경우는 의미가 없다. 고로, H의 고유치들은 양수와 음수들이 섞여있음을 뜻하며, 고로 H는 항상 indefinite이다. 즉, 이경우의 평형점은 항상 변곡점이다. 그리고 앞에서 보였듯이 이 경우의 평형점은 전 공간에 오직 하나 존재한다.

<사례연구>

$G_1 = G_2 = 0$ 인 경우의 Hessian 행렬은 식 (23)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H = \nabla^2 E(v) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

이 경우는 평형점의 위치에 상관없이 H의 고유치들은 항상 2, -2로 평형점은 변곡점이 됨을 알 수 있다. $G_1 = G_2 = 0$ 인 경우, 식 (16)를 만족하는 평형점은 식에서 알 수 있듯이 전공간에서 1개만이 존재하며, $x=1.6$ 인 경우, 그 점은 다음과 같이 $v^{eq1} = (0.6, 0.55)$ 이다. 그리고 그림 5는 $x=1.6, \alpha=2, G_1 = G_2 = 0$ 인 경우의 에너지 맵을 보여주는데, 그림에서 평형점은 변곡점임을 알 수 있다.

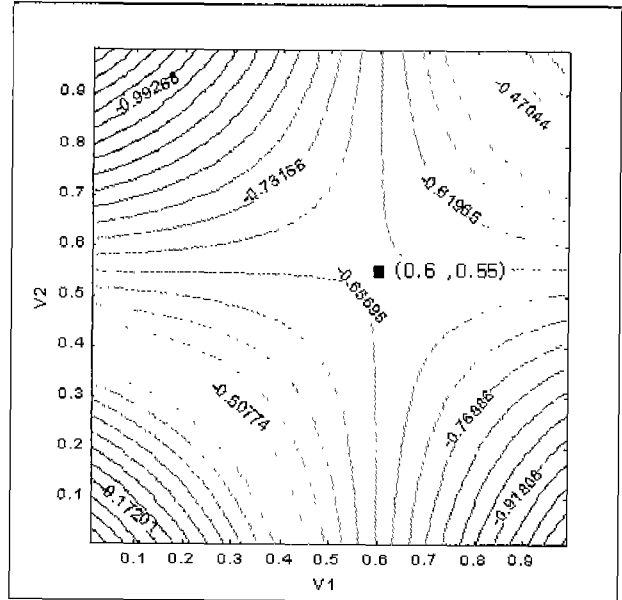


그림 5. $x=1.6, \alpha=2, G_1 = G_2 = 0$ 인 경우의 에너지 맵 Fig. 5. The Energy map in case $x=1.6, \alpha=2, G_1 = G_2 = 0$

증명 (3) :

$G_i < 0$ 인 경우는 hypercube의 모서리부근에서 $D(v_i)$ 는 음의 무한대 값으로 변하므로 즉, $\forall v_i, \lim_{v_i \rightarrow 0^+} D(v_i) = -\infty$,

$\lim_{v_i \rightarrow 1^-} D(v_i) = -\infty$ 하고, $\sum_{j=1, j \neq i}^n w_j$ 는 유한한 값이므로, 식 (22)에서 알 수 있듯이 모서리부근 ($v_i \rightarrow 0^+, v_i \rightarrow 1^-$)에서 H의 모든 고유치들은 음의 값을 갖게 된다. 즉, 모서리 부근에서 H는 항상 negative definite이며, 꼭지점 부근에서의 평형점은 극대점이다.

<사례연구>

그림 6a는 식 (18)의 비선형 연립방정식을 그래프를 이용하여 구한 결과이며, 연립방정식을 만족하는 평형점은 다음과 같이 $v^{eq1} = (0.0130, 0.0091), v^{eq2} = (0.6716, 0.6394), v^{eq3} = (0.9599, 0.9468)$ 3곳이었다. 그리고, 역시 모든 평형점들은 항상 hypercube $= (0, 1)^n$ 안에 존재하고 있다. 그리고 모서리부근의 평형점들 즉, v^{eq1} 에서 고유치들은 -19.0412, -28.1855, 그리고 v^{eq3} 에서 고유치들은 -7.8707, -3.5875으로 예측한대로 모두 음의 값이다. 고로, 모서리부근의 평형점들은 극대점임을 알 수 있다. 그림 6b는 $x=1.6, \alpha=2, G_1 = G_2 = -0.5$ 인 경우의 에너지 맵을 보여주며, 그림 6c와 그림 6d는 모서리 부근에 극대점이 존재함을 보여준다.

4. 결 론

뉴런의 입력단에 캐패시터와 병렬로 연결된 컨덕턴스 g_i 가 시스템의 평형점 존재위치 및 특성에 많은 영향을 미치고 있다. 즉, $G_i (= g_i + \sum_{j=1}^n w_{ij})$ 의 값에 따라 평형점들이 극소, 극대, 또는 변곡점으로 변하는 것을 알 수 있다. 즉, $G_i > 0$ 인

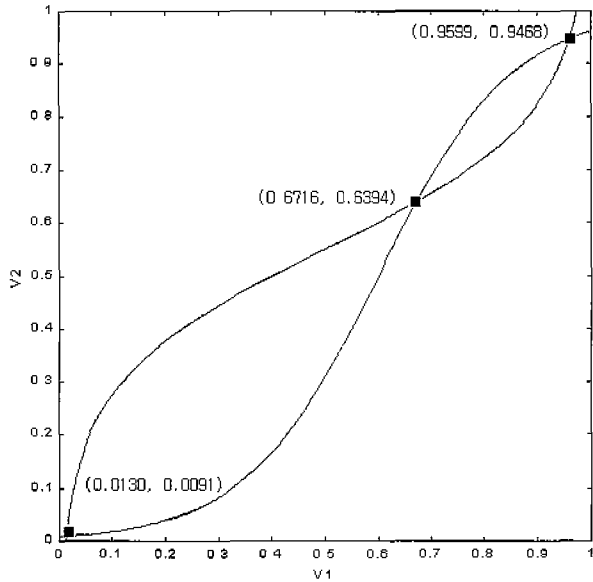


그림 6a. $x=1.6$, $\alpha=2$, $G_1=G_2=-0.5$ 인 경우:평형점의 위치
 Fig. 6a. The location of equilibrium point in case $x=1.6$, $\alpha=2$, $G_1=G_2=-0.5$

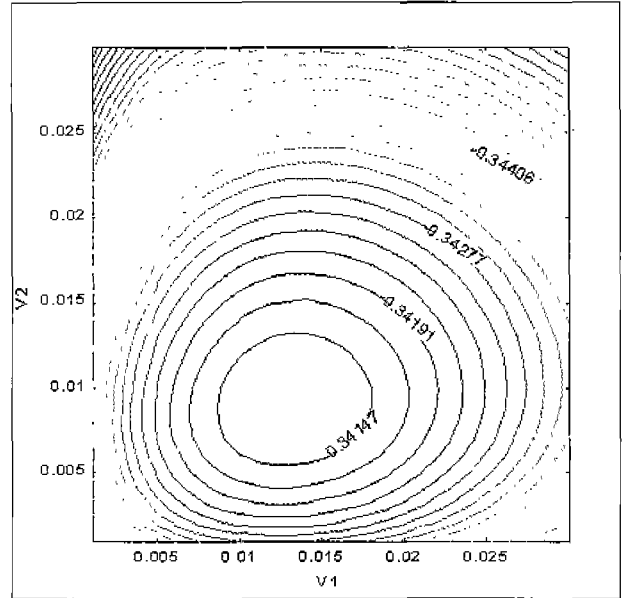


그림 6c. 그림 6b의 좌, 하 모서리 부근 확대에너지 맵
 Fig. 6c. The left_bottom micro map of fig. 6b

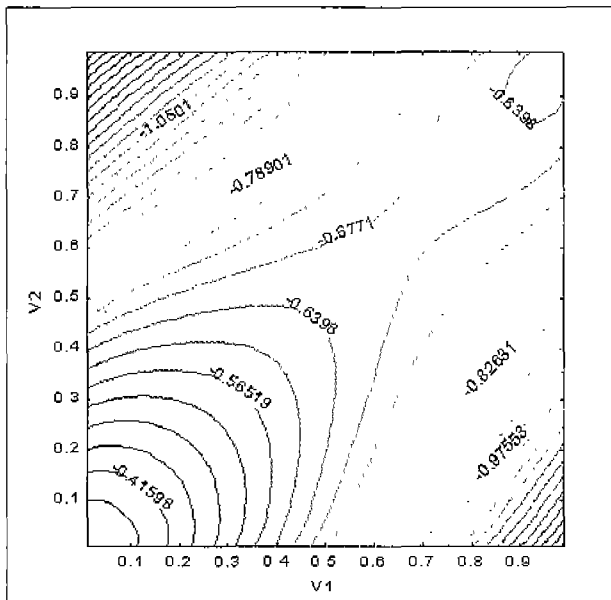


그림 6b. $x=1.6$, $\alpha=2$, $G_1=G_2=-0.5$ 인 경우의 에너지 맵
 Fig. 6b. The energy map in case $x=1.6$, $\alpha=2$, $G_1=G_2=-0.5$

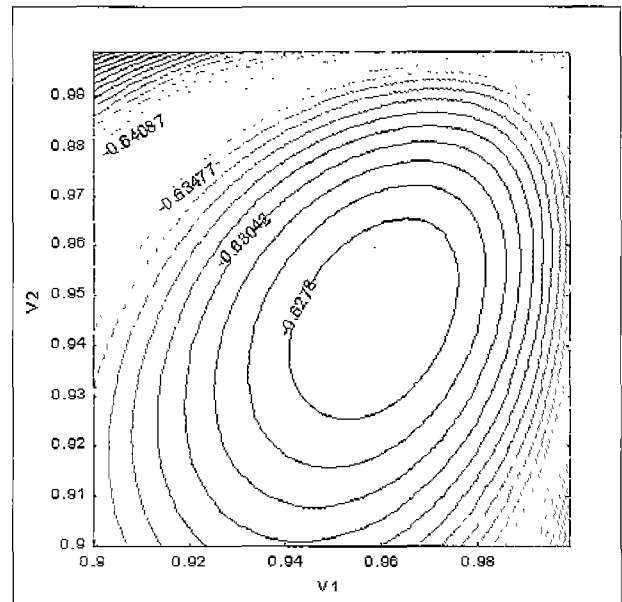


그림 6d. 그림 6b의 우,상 모서리 부근 확대 에너지 맵
 Fig. 6d. The right_top micro energy map of fig. 6b

경우는 평형점들이 hypercube $= (0, 1)^n$ 안에 존재하며, 모서리부근에서의 평형점들은 극소점이다. $G_i = 0$ 인 경우는 평형점이 오직 한 개의 평형점만이 전 공간에 존재 가능하며, 위치에 상관없이 변곡점이다. $G_i < 0$ 인 경우는 평형점들이 $G_i > 0$ 인 경우와 마찬가지로 평형점들이 hypercube $= (0, 1)^n$ 안에 존재한다. 그러나, 모서리부근에서의 평형점들은 극대점이다. 고로, 각 뉴런의 입력단에 연결된 g_i 의 값에 따라 시스템의 평형점 및 특성이 바뀔 수 있다.

또한, 이산형 신경회로망은 수렴하는 방식에 있어서 연속형 신경회로망과 전혀 다르지만, 시그모이드 이득물이 무한대인 특수한 경우로 간주할 수 있다. 시그모이드 이득물이 무한대이면 $G_i = 0$ 인 경우와 같이 에너지함수의 제 3항이 사라지므로, 평형점의 위치 및 특성은 $G_i = 0$ 인 경우와 같음을 알 수 있었다. 고로 시스템이 극소점을 갖도록 해서 그 곳으로 수렴하도록 하려면 뉴런의 입력단에 연결하는 컨덕턴스 g_i 는 총 컨덕턴스 G_i 가 양의 값을 유지하도록 조절해야함을 알 수 있다.

이 논문에서는 g_i 가 시스템의 출력공간에서 에너지함수를

이용하여 분석하였다. 그러나 안정된 Hopfield 신경회로망의 하드웨어 구현을 위해서는 g_i 가 뉴런 입력단의 안정성에 미치는 영향에 관한 연구가 요구되며, 또한 캐패시터의 영향에 관해서도 연구가 있어야 한다.

참 고 문 헌

[1] Hopfield, J. J. "Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two State Neurons," *Proc. National Academy of Sciences* 81: 3088-3092, 1984

[2] Hopfield, J. J., and D. W. Tank, "Neural Computation of Decisions in Optimization Problems," *Biolog. Cybern.* 52: 141-154, 1985

[3] Hopfield, J. J., and D. W. Tank., "Computing with Neural Circuits: A Model," *Science* 233: 625-633, 1986

[4] Park, S. "Signal Space Interpretation of Hopfield Circuit and a Linear Programming Circuit," *IEEE Trans. Circuits and Systems* CAS-33(5): 533-541, 1989

[5] Bernard C, Levy, "Global optimization with Stochastic Neural Networks", *IEEE, Int. Conf. on NN.* Sandiego, CA. USA, 1987

[6] Anthony N. Michel, Jay A. Farrel and Wolfgang Porod, 1989, "Qualitative Analysis of Neural Networks." *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol 36, pp. 229-243, February 1989.

[7] Mengkang Peng, Narebdra K. Gupta and Alistair F. Armitage, "An investigation into the Improvement of Local Minima of the Hopfield Network" *Neural Networks*, vol. 9, pp. 1241-1253, 1996.

[8] Naoki Kurita and Ken-ichi Funahashi, "On the Hopfield Neural Networks and Mean Field Theory" *Neural Networks*, vol. 9, pp. 1531-1540, 1996.

[9] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins Univ. Press, 1996.

[10] Stephen Friedberg, Arnold Insel, *Linear Algebra with Application*, Prentice-Hall, 1986.

저 자 소 개



강 민 제 (Min-Je Kang)

1982년 : 서울대학교 전기공학과 졸업
 1991년 : Univ. of Louisville 전기공학과 졸업(공학)
 1992년~ 현재 : 제주대학교 전기, 전자공학부 부교수

이 상 준 (Sang-Joon Lee)

정회원
 Vol. 9, No. 2 참조
 현재 : 제주대학교 정보통신공학부 부교수