

불확실성 적응기법을 이용한 비선형 시스템의 강인 백스테핑 설계

Robust Backstepping Design of Nonlinear Systems Using Adaptation Strategy for Uncertainties

김 동 헌, 김 응 석, 양 해 원
(Dong-Hun Kim, Eung-Seok Kim, and Hai-Won Yang)

Abstract : In this paper, we design a robust adaptive controller for a nonlinear system with uncertainties to be rejected via disturbance adaptation law. The nonlinear system considered has unknown nonlinear functions being influenced by external disturbance. The upper bound of unknown nonlinear functions at each time is estimated by using a disturbance adaptation law. The estimated nonlinear functions are used to design a stabilizing function and a control input. Tuning function is used to estimate unknown system parameter without overparametrization. A set-point regulation error converges to a residual set close to zero asymptotically. The effectiveness of the proposed controller is investigated by computer simulations.

Keywords : backstepping, robust, adaptive, disturbances

I. 서론

적응제어는 미지의 상수 파라미터를 가진 시스템을 다루기 위하여 설계되었다. 하지만 비선형 적응제어 문제에 있어서 미지의 외란 혹은 시변 파라미터가 존재할 때 제어기를 설계하는 문제는 쉽지 않아서 비선형 시스템의 강인 적응제어 문제는 지난 몇 년 동안 많은 관심의 대상이었다. 실제 응용 시에 존재하는 시변외란 혹은 비모형화 다이내믹스를 가진 비선형 시스템에 대한 강인 적응제어 문제가 최근에 활발히 연구되어 지고 있는 것은 선형 시스템 대상의 제어 문제가 비선형 시스템 대상의 제어문제로 관심이 옮겨지면서 많은 기술적인 문제점이 나타나는 데서 기인한다. 시스템을 비선형 적응제어로 설계 가능케 해준 역할은 적응 백스테핑 알고리즘의 도입이었다[1]. 적응 백스테핑 기법을 이용한 적응제어기 설계는 비선형 시스템뿐만 아니라 선형 시스템에도 적용 가능하며 기존의 적응제어기에 비하여 특성이 우수한 것으로 알려져 있다. 최근에는 적응 백스테핑에서 더 진보된 형태로 overparametrization을 없앨 수 있는 튜닝 함수 설계 방법도 사용되고 있다[2]. 적응 백스테핑 방법은 상대차수 제한조건, overparametrization 같은 비선형 적응제어 연구 초기에 생겨났던 몇 가지 기술적인 문제를 없애 주었다. 더욱이 최근에는 백스테핑 제어기의 과도 특성에 관한 정보를 제공하는 연구들이 행하여지고 있다[3]. 이러한 사실들은 튜닝함수를 이용한 적응 백스테핑 방법에 대한 강인성에 대한 사실들을 제공해 주었다. 시변 외란이나 비모형화 특성을 가지는 비선형 시스템 문제에 있어서 강인 제어와 적응제어가 합쳐진 많은 제어 기법들이 제시되고 있다[4]. 그러나, 이러한 적응제어기는

구조화된 불확실성이 존재하는 경우 효과적이었지만 구조화되지 않은 불확실성에 대해서는 효과적이지 알 수 없고, 엄격한 가정을 하여 제어기의 효율성이 떨어지게 된다[5]. 따라서, 최근 몇 년간 불확실성과 외란이 존재하는 경우 적응 백스테핑 기법을 이용한 제어기를 어떻게 설계할 것인가에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다[6][7]. [8]에서는 시스템의 패시브 성질을 이용해 강인 안정화를 이루었다. 하지만 이러한 접근법은 임의의 상대차수에 대하여 불확실성이 시스템의 출력 신호에만 의존해야 한다는 조건을 필요로 한다. [3]에서는 비선형 댐핑항을 이용해 불확실성에 의한 영향을 줄이려고 하였다. 불확실성에 대한 특별한 가정을 필요로 하고 있지 않지만 비선형 댐핑항 때문에 제어 입력도 커질 뿐만 아니라 만족할 정도의 결과를 얻지 못하였다. [9]에서는 포화 함수와 새로운 Lyapunov 함수를 제시하여 백스테핑 설계에서 부드러운(soft) 적응치를 유도하였다. [10]에서는 출력과 곱셈의(multiplicative) 외란이 있는 선형 시스템에 대한 강인한 적응 백스테핑 제어기를 설계하였다. [11]에서는 다이내믹 불확실성을 가진 비선형 시스템에 대한 강인 적응 제어를 제시하였고, 그 결과는 [12]에서 도입한 적응 선형 제어에서의 다이내믹 정규화(normalization)의 개념을 비선형으로 확장한 연구였다. [13]에서는 미지의 비선형 함수를 이용한 성능지수(performance index)를 도입하여 강인 외란 감소를 이루려고 하였다. 하지만 이러한 접근법은 불확실성이 알고있는 비선형 함수와 상수로 곱해진 형태보다 작아야 한다는 가정이 필요하다. [14]에서는 고주파 비모형화 다이내믹스를 가진 1차의 비선형 시스템에 대해 비선형 피이드백 제어기의 강인성 성질에 대해 연구하였다. 결과적으로 1차의 비선형 시스템에 대해 광역 접근 안정도를 이루었지만 n 차의 시스템으로 확대될 필요성이 있다. [15],[16]에서는 백스테핑과 슬라이딩모드 제어기를 이용하여 강인제어를 이루려 하였다. 하지만 불확실성이 축차형(cascaded) 유계

접수일자 : 2000. 12. 30., 수정완료 : 2001. 4. 12.

김동헌 : 한양대학교 전기공학과(ddhh70@hotmail.com)

김응석 : 한라대학교 전기공학부(eskim@hit.halla.ac.kr)

양해원 : 한양대학교 전자 컴퓨터 공학부(hwyang@hanyang.ac.kr)

조건을 만족시키며, 시스템의 각 부다이나믹스(subdynamics)에 있는 불확실성의 상한값을 알고 있어야 한다는 가정이 필요하다.

본 논문에서는 유계의 불확실성이나 외부외란을 가진 비선형 시스템에 대하여 강인 적응제어 기법을 이용하여 유계의 불확실성이나 외부외란에 의한 영향을 소거한다. 시스템의 구조는 parametric strict 피이드백 형태로 변환된 형태를 이용하며, 불확실성의 상한값을 적응치를 이용하여 추정하며 이를 안정화 함수와 제어입력에서 사용한다. 따라서, 기존의 강인제어 방식에 비해 유계의 불확실성이나 외부외란에 대한 특별한 가정이 없으며 엄격한 제한 없이 전역 안정화를 가능하게 하였다. 또한, 유계의 불확실성이나 외부외란이 존재하더라도 이러한 영향을 안정화 함수와 제어입력에서 없애주므로 적응치 설계를 유계의 불확실성이나 외부외란의 존재와는 무관하게 독립적으로 설계하므로 기존의 적응치 설계 방법을 그대로 사용 가능하게 한다. 즉 적응치 설계가 유계의 불확실성이나 외부외란에 영향을 받지 않는다. 제어기 설계는 튜닝 함수를 이용한 적응 백스테핑 방법을 사용한다. 컴퓨터 모의 실험을 통하여 수학적으로 입증된 본 제어기의 효용성을 확인하기로 한다. 본문은 제2장에서 제어모델 및 해결하려는 문제를 정식화하며, 제3장에서 강인 적응 백스테핑 제어기의 설계 문제 및 수학적 안정도 입증에 대해 다루고, 제4장에서는 제시된 제어기의 효과를 증명하기 위한 컴퓨터 모의 실험 결과를 확인하고 제5장에서 결론을 맺도록 구성되어 있다.

II. 문제 정의

제어대상 비선형 시스템은 parametric strict feedback 형태로 다음과 같이 표현된다,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \theta^T \phi_i(x_1, \dots, x_i) + \Delta_i(x, t), \\ 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi_0(x) + \theta^T \phi_n(x) + \beta_0(x)u + \Delta_n(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $u \in R$, $\theta \in R^p$ 는 미지의 파라미터이고, $\phi_0, \beta_0, \phi_i \in R^p$, $1 \leq i \leq n$ 는 알고 있는 비선형 함수이며, 모든 $x \in R^n$ 에 대해 $\beta_0(x) \neq 0$, $\Delta(x, t)$ 는 불확실성 혹은 외부 외란에 의한 비선형 함수를 의미한다.

가정 : 비선형 불확실성 $\Delta_i(x, t)$ 는 아래의 조건처럼 유계의 함수이다[9].

$$|\Delta_i(x, t)| \leq \rho_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2)$$

여기서, ρ_i 는 $|\Delta_i(x, t)|$ 의 상한값이며, [9]에서와는 다르게 미지의 값이다.

제어목적은 regulation하는 문제로 하고, 추적문제로의 확장도 이와 유사하게 수정하여 응용할 수 있다.

III. 제어기 설계

백스테핑 설계 방법은 반복적이다. 매 i 번째 단계마다 i 번째 부시스템이 안정화 함수 α_i 와 튜닝함수 τ_i 로 설계한 Lyapunov Candidate Function V_i 에 의해 안정화 된다.

$\theta(t)$ 에 대한 적응규칙과 적응제어 입력 u 는 마지막 단계에서 설계된다. 설계방식은 기존의 백스테핑 제어기법 [2]을 기술하면서 제안된 방법을 추가하는 방식을 사용하고 후미에 안정도 해석을 한다.

단계 1 : $z_1 = x_1$ 와 $z_2 = x_2 - \alpha_1$ 를 도입해 $\dot{x}_1 = x_2 + \theta^T \phi_1(x_1) + \Delta_1$ 에 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \theta^T \phi_1(x_1) + \Delta_1 \quad (3)$$

(3)을 안정화 하기 위하여 α_1 을 제어입력 역할로 사용하고, Lyapunov Candidate Function $V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \bar{\theta}^T \Gamma^{-1} \bar{\theta}$ 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_1 = z_1(z_2 + \alpha_1 + \bar{\theta}^T \phi_1 + \Delta_1) + \bar{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\bar{\theta}} - \Gamma z_1 \phi_1) \quad (4)$$

여기서, $\bar{\theta} = \theta - \theta_0$, x_2 를 실제 제어입력이라면 $z_2 = 0$ 즉, $x_2 = \alpha_1$ 이 된다. 그러면 $\dot{\bar{\theta}} = \tau_1$ 이 적응치으로 \dot{V}_1 으로부터 $\bar{\theta}$ 를 없앨 수 있다. $\dot{\bar{\theta}} = \tau_1$ 으로 놓으면, $\tau_1(x_1) = \Gamma z_1 \phi_1(x_1)$. $\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2$ 이 되도록, α_1 을 정하면 다음과 같다.

$$\alpha_1(x_1, \bar{\theta}) = -c_1 z_1 - \bar{\theta}^T \phi_1(x_1) - \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) \quad (5)$$

여기서, $\text{sat}(z_i)$ 의 정의는 다음과 같다.

$$\text{sat}(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } z_k \geq v_k \\ -1 & \text{if } z_k \leq -v_k \\ \frac{z_k}{v_k} & \text{otherwise} \end{cases}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

(5)에서 $-\hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1)$ 항은 Δ_1 의 영향을 없애기 위해 설계되고, $\hat{\rho}_1$ 는 마지막 n 단계에서 설계된다. (5)와 같이 안정화 함수에 포화함수를 사용한 이유는 Δ 의 영향을 최소한으로 줄여 보고자 하기 위한 것이다. 스위칭 함수를 사용하면 수학적으로 Δ 의 영향을 완벽하게 0으로 없앨 수 있지만 스위칭 함수 자체가 미분이 불가능한 함수여서 안정화 함수에서 사용 불가능할 뿐만 아니라 제어입력의 떨림(chattering)현상을 일으킨다. 따라서 안정화 함수를 미분 가능하게 만들고 제어입력의 떨림현상을 방지할 수 있는 포화 함수를 사용하였다.

x_2 는 실제 제어 입력이 아니기 때문에 $x_2 \neq 0$ 이고, $\dot{\bar{\theta}} = \tau_1$ 은 사용하지 않는다. 하지만 τ_1 은 첫 번째 튜닝함수이고, α_1 은 첫 번째 안정화 함수로 사용한다. $\bar{\theta}$ 의 결정은 나중으로 미루고, \dot{V}_1 에서 $\bar{\theta}$ 의 존재는 그대로 유지하자. 그러면, Lyapunov Candidate Function의 미분항은 다음과 같다.

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \bar{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\bar{\theta}} - \tau_1) - z_1 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) + z_1 \Delta_1 \quad (7)$$

\dot{V}_1 에서 두 번째 항 $z_1 z_2$ 는 다음 단계에서 소거될 것이다. (5)를 사용하면 (3)의 페루프 형태는 다음과 같다.

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 - \bar{\theta}^T \phi_1(x_1) - \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) + \Delta_1 \quad (8)$$

단계 2 : $z_3 = x_3 - \alpha_2$ 을 도입하면 $\dot{x}_2 = x_3 + \theta^T \phi_2(x_1, x_2)$

+ Δ_2 를 다음과 같이 전개 할 수 있다.

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + \theta^T \phi_2 + \Delta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \theta^T \phi_1 + \Delta_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} \hat{\rho}_1 \quad (9)$$

(z_1, z_2) 시스템을 안정화 하기 위해 α_2 를 제어입력으로 사용하고, $V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2$ 에 대해 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_1 z_1^2 + z_2 [z_1 + z_3 + \alpha_2 + \Delta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \Delta_1) \\ & - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} \hat{\rho}_1 + \hat{\theta}^T (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} \hat{\rho}_1] \\ & + \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} [\hat{\theta} - \Gamma(z_1 \phi_1 + z_2 (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1))] \\ & - [z_1 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) - z_1 \Delta_1] \end{aligned} \quad (10)$$

x_3 가 실제 제어입력 이라면 $z_3 \equiv 0$ 이 되고, 다음의 적응칙 $\dot{\hat{\theta}} = \tau_2$ 로부터 \dot{V}_2 에서 $\hat{\theta}$ 를 없앨 수 있다.

$\hat{\theta} = \tau_2$ 로 놓으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) &= \Gamma [z_1 \phi_1 + z_2 (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1)] \\ &= \tau_1 + \Gamma z_2 (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ 이 되기 위하여, (10)에서 z_2 가 곱해져 있는 모난괄호항이 $-c_2 z_2$ 가 되도록 α_2 를 설계하면 다음과 같다. $\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} \tau_2 - \hat{\theta}^T (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) \\ & - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} \hat{\rho}_1 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $\text{sat}(z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k})$ 의 정의는 다음과 같다.

$$\text{sat}(z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k}) = \begin{cases} 1 & \text{if } z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \geq \omega_k \\ -1 & \text{if } z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \leq -\omega_k \\ z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \frac{1}{\omega_k} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

$k = 1, 2, \dots, n-1$

(12)에서 $-\hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1})$ 항은 Δ_2 의 영향을 없애기 위해 설계되고, $\hat{\rho}_2$ 는 마지막 n 단계에서 설계된다.

x_3 은 실제 제어 입력이 아니기 때문에 $\hat{\theta} = \tau_2$ 를 적응칙으로 사용하지는 않는다. 하지만 τ_2 는 2번째 튜닝함수이고, α_2 는 2번째 안정화 함수로 사용한다. $\hat{\theta}$ 의 결정은 나중에 미

루고, \dot{V}_2 에서 $\hat{\theta}$ 의 존재는 그대로 유지하자. 그러면, Lyapunov Candidate Function의 미분항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 \\ & + (z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} - \hat{\theta}^T \Gamma^{-1})(\tau_2 - \hat{\theta}) \\ & - z_2 \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) + z_2 \Delta_2 \\ & - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [z_2 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}) + z_2 \Delta_1] \\ & - [z_1 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) - z_1 \Delta_1] \end{aligned} \quad (14)$$

\dot{V}_2 에서 세 번째 항 $z_2 z_3$ 은 다음 단계에서 소거될 것이다. (12)를 사용하면 (9)의 페루프 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & -z_1 - c_2 z_2 + z_3 - \hat{\theta}^T (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} (\tau_2 - \hat{\theta}) \\ & + \Delta_2 - \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [\hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}) + \Delta_1] \end{aligned} \quad (15)$$

단계 3: $z_4 = x_4 - \alpha_3$ 을 도입하면 $\dot{x}_3 = x_4 + \theta^T \phi_3(x_1, x_2, x_3) + \Delta_3$ 를 다음과 같이 전개 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & z_4 + \alpha_3 + \theta^T \phi_3 + \Delta_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \theta^T \phi_1 + \Delta_1) \\ & - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + \theta^T \phi_2 + \Delta_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\rho}_2} \hat{\rho}_2 \end{aligned} \quad (16)$$

(z_1, z_2, z_3) 시스템을 안정화 하기 위해 α_3 를 제어입력으로 사용하고, $V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2$ 에 대해 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}_1} (\tau_2 - \hat{\theta}) \\ & + z_3 [z_2 + z_4 + \alpha_3 + \Delta_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \Delta_1) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + \Delta_2) \\ & - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \hat{\theta} + \hat{\theta}^T (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\rho}_2} \hat{\rho}_2] \\ & + \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} [\hat{\theta} - \Gamma(z_1 \phi_1 + z_2 (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) \\ & + z_3 (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2))] \\ & - [z_1 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) - z_1 \Delta_1] - [z_2 \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) - z_2 \Delta_2] \\ & - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [z_2 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}) + z_2 \Delta_1] \end{aligned} \quad (17)$$

x_4 가 실제 제어입력 이라면 $z_4 \equiv 0$ 이 되고, 다음의 적응칙 $\dot{\hat{\theta}} = \tau_3$ 로부터 \dot{V}_3 에서 $\hat{\theta}$ 를 없앨 수 있다. $\hat{\theta} = \tau_3$ 로 놓으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_3(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}) &= \Gamma^{-1} [z_1 \phi_1 + z_2 (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) \\ & + z_3 (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2)] \\ &= \tau_2 + \Gamma z_3 (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2) \end{aligned} \quad (18)$$

(18)을 사용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} - \tau_2 &= \dot{\vartheta} - \tau_3 + \tau_3 - \tau_2 \\ &= \dot{\vartheta} - \tau_3 + \Gamma z_3 \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

(19)를 사용하여 (17)을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \vartheta} (\tau_3 - \dot{\vartheta}) + z_3 [z_2 + z_4 + \alpha_3 + \Delta_3 \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \Delta_1) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + \Delta_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} \\ &\quad + (\dot{\vartheta}^T - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \vartheta} \Gamma) (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\rho}_2} \dot{\hat{\rho}}_2] \\ &\quad + \dot{\vartheta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\vartheta} - \tau_3) - [z_1 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) - z_1 \Delta_1] \\ &\quad - [z_2 \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) - z_2 \Delta_2] - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [z_2 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + z_2 \Delta_1] \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [z_2 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + z_2 \Delta_1] \end{aligned} \quad (20)$$

$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2$ 이 되기 위하여, (20)에서 z_3 가 곱해져있는 모난팔호항이 $-c_3 z_3$ 가 되도록 α_3 를 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_3(x_1, x_2, x_3, \vartheta) &= -z_2 - c_3 z_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \vartheta} \tau_3 \\ &\quad + (z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \vartheta} \Gamma - \dot{\vartheta}^T) (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2) \\ &\quad - \hat{\rho}_3 \text{sat}(z_3) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\rho}_2} \dot{\hat{\rho}}_2 \end{aligned} \quad (21)$$

(21)에서 $-\hat{\rho}_3 \text{sat}(z_3) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}$ 항은 Δ_3 의 영향을 없애기 위해 설계되고, $\hat{\rho}_3$ 는 마지막 n 단계에서 설계된다.

x_4 는 실제 제어 입력이 아니기 때문에 $z_4 \neq 0$ 이고, $\dot{\vartheta} = \tau_3$ 를 적용칙으로 사용하지는 않는다. 하지만 τ_3 는 3번째 튜닝 함수이고, α_3 는 3번째 안정화 함수로 사용한다. $\dot{\vartheta}$ 의 결정은 나중에 미루고, \dot{V}_3 에서 $\dot{\vartheta}$ 의 존재는 그대로 유지하자. 그러면, Lyapunov Candidate Function의 미분항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_3 z_4 \\ &\quad + [z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \vartheta} + z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \vartheta} - \dot{\vartheta}^T \Gamma^{-1}] (\tau_3 - \dot{\vartheta}) \\ &\quad - z_3 \hat{\rho}_3 \text{sat}(z_3) + z_3 \Delta_3 \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} [z_3 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + z_3 \Delta_1] \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} [z_3 \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + z_3 \Delta_2] \\ &\quad - [z_1 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) - z_1 \Delta_1] - [z_2 \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) - z_2 \Delta_2] \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [z_2 \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + z_2 \Delta_1] \end{aligned} \quad (22)$$

\dot{V}_3 에서 네 번째 항 $z_3 z_4$ 은 다음 단계에서 소거될 것이다.

(21)을 사용하면 (16)의 페루프 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= -z_2 - c_3 z_3 + z_4 - \dot{\vartheta}^T (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2) \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \vartheta} (\tau_3 - \dot{\vartheta}) + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \vartheta} \Gamma (\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2) \\ &\quad + \Delta_3 - \hat{\rho}_3 \text{sat}(z_3) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} [\hat{\rho}_1 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \Delta_1] \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} [\hat{\rho}_2 \text{sat}(z_3) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \Delta_2] \end{aligned} \quad (23)$$

단계 i : 단계 1과 같은 방법으로 i 번째 항을 정리해 보자.

$z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$ 을 도입하면 $\dot{x}_i = x_{i+1} + \theta^T \phi_i(x_1, \dots, x_i) + \Delta_i$ 를 다음과 같이 전개 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1} + \alpha_i + \theta^T \phi_i + \Delta_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \theta^T \phi_k + \Delta_k) \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\rho}_{i-1}} \dot{\hat{\rho}}_{i-1} \end{aligned} \quad (24)$$

(z_1, \dots, z_i) 시스템을 안정화 하기 위해 α_i 를 제어입력으로 사용하고, $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2$ 에 대해 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -\sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + (\sum_{k=1}^i z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \vartheta}) (\tau_{i-1} - \dot{\vartheta}) \\ &\quad + z_i [z_{i-1} + z_{i+1} + \alpha_i + \Delta_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \Delta_k) \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \dot{\vartheta}^T (\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\rho}_{i-1}} \dot{\hat{\rho}}_{i-1}] \\ &\quad + \dot{\vartheta}^T \Gamma^{-1} [\dot{\vartheta} - \Gamma \sum_{l=1}^i z_l (\phi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \phi_k)] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{i-1} (z_k \hat{\rho}_k \text{sat}(z_k) - z_k \Delta_k) \\ &\quad - \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k} + z_j \Delta_k] \\ &\quad - \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k} + z_j \Delta_k] \end{aligned} \quad (25)$$

x_{i+1} 가 실제 제어입력 이라면 $z_{i+1} = 0$ 이 되고, 다음의 적용칙 $\dot{\vartheta} = \tau_i$ 로부터 \dot{V}_i 에서 $\dot{\vartheta}$ 를 없앨 수 있다.

$\dot{\vartheta} = \tau_i$ 로 놓으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_i(x_1, \dots, x_i, \vartheta) &= \Gamma \sum_{l=1}^i z_l (\phi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ &= \tau_{i-1} + \Gamma z_i (\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \end{aligned} \quad (26)$$

(26)을 사용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} - \tau_{i-1} &= \dot{\vartheta} - \tau_i + \tau_i - \tau_{i-1} \\ &= \dot{\vartheta} - \tau_i + \Gamma z_i (\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \end{aligned} \quad (27)$$

(27)을 사용하여 (25)를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + \sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial a_k}{\partial \theta} (\tau_i - \hat{\theta}) \\ & + z_i [z_{i-1} + z_{i+1} + a_i + \Delta_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \Delta_k) \\ & - \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \theta} \hat{\theta} \\ & + (\hat{\theta}^T - \sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial a_k}{\partial \theta} \Gamma) (\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ & - \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \hat{\rho}_{i-1}} \hat{\rho}_{i-1}] + \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} (\hat{\theta} - \tau_i) \\ & - \sum_{k=1}^{i-1} (z_k \hat{\rho}_k \text{sat}(z_k) - z_k \Delta_k) \\ & - \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k}) + z_j \Delta_k] \\ & - \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k}) + z_j \Delta_k] \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, τ_i 는 $\hat{\theta}$ 을 대신한다.

$\dot{V}_i = - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2$ 이 되기 위하여, (28)에서 z_i 가 곱해져있는 모난괄호항이 $-c_i z_i$ 가 되도록 a_i 를 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\theta}) = & -z_{i-1} - c_i z_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} \\ & + \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \theta} \tau_i + (\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial a_k}{\partial \theta} \Gamma - \hat{\theta}^T) (\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ & - \hat{\rho}_i \text{sat}(z_i) - \sum_{k=1}^{i-1} [\frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \hat{\rho}_k \text{sat}(z_i \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k})] \\ & + \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \hat{\rho}_{i-1}} \hat{\rho}_{i-1} \end{aligned} \quad (29)$$

(29)에서 $-\hat{\rho}_i \text{sat}(z_i) - \sum_{k=1}^{i-1} [\frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \hat{\rho}_k \text{sat}(z_i \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k})]$ 항은 Δ_i 의 영향을 없애기 위해 설계되고, $\hat{\rho}_i$ 는 마지막 n 단계에서 설계된다.

x_{i+1} 은 실제 제어 입력이 아니기 때문에 $z_{i+1} \neq 0$ 이고, $\hat{\theta} = \tau_i$ 를 적응적으로 사용하지는 않는다. 하지만 τ_i 는 i 번째 튜닝함수이고, a_i 는 i 번째 안정화 함수로 사용한다. $\hat{\theta}$ 의 결정은 나중에 미루고, \dot{V}_i 에서 $\hat{\theta}$ 의 존재는 그대로 유지하자. 그러면, Lyapunov Candidate Function의 미분항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + z_i z_{i+1} \\ & + [\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial a_k}{\partial \theta} - \hat{\theta}^T \Gamma^{-1}] (\tau_{i-1} - \hat{\theta}) \\ & - z_i \hat{\rho}_i \text{sat}(z_i) + z_i \Delta_i \\ & - \sum_{j=2}^i \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k}) + z_j \Delta_k] \\ & - \sum_{k=1}^{i-1} [z_k \hat{\rho}_k \text{sat}(z_k) - z_k \Delta_k] \end{aligned} \quad (30)$$

\dot{V}_i 에서 두 번째 항 $z_i z_{i+1}$ 은 다음 단계에서 소거될 것이다. (29)를 사용하면 (24)의 페루프 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_i = & -z_{i-1} - c_i z_i + z_{i+1} - \hat{\theta}^T (\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ & + \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \theta} (\tau_i - \hat{\theta}) + (\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial a_k}{\partial \theta} \Gamma) (\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ & + \Delta_i - \hat{\rho}_i \text{sat}(z_i) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} [\hat{\rho}_k \text{sat}(z_i \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k}) + \Delta_k] \end{aligned} \quad (31)$$

단계 n : 단계 n 에서는 전체 z 시스템과 $\hat{\theta}$ 를 안정화하기 위해 실제의 적응칙 $\hat{\theta} = \tau_n$ 과 피이드백 제어입력 u 를 설계하자.

$z_n = x_n - a_{n-1}$ 을 도입하면 $\dot{x}_n = \phi_0(x) + \theta^T \phi_n(x) + \beta_0(x)u + \Delta_n(x, t)$ 을 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = & \phi_0 + \theta^T \phi_n + \Delta_n + \beta_0 u - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \theta^T \phi_k + \Delta_k) \\ & - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \hat{\rho}_{n-1}} \hat{\rho}_{n-1} \end{aligned} \quad (32)$$

(32)를 이용하여 $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\gamma_k} \tilde{\rho}_k^2$ 에 대해 전개하면 다음과 같다. 여기서, $\tilde{\rho}_k = \hat{\rho}_k - \rho_k$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + (\sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial a_k}{\partial \theta}) (\tau_{n-1} - \hat{\theta}) \\ & + z_n [z_{n-1} + \beta_0 u + \phi_0 + \Delta_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \Delta_k) \\ & - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \hat{\theta}^T (\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ & - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \hat{\rho}_{n-1}} \hat{\rho}_{n-1}] \\ & + \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} [\hat{\theta} - \Gamma \sum_{k=1}^n z_k (\phi_k - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k)] \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} [z_k \hat{\rho}_k \text{sat}(z_k) - z_k \Delta_k] \\ & - \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j \frac{\partial a_{j-1}}{\partial x_k}) + z_j \Delta_k] \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\rho}_k \dot{\tilde{\rho}}_k \end{aligned} \quad (33)$$

\dot{V}_n 에서 $\hat{\theta}$ 를 제거하기 위해, $\hat{\theta}$ 을 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} = \tau_n(z, \hat{\theta}) = & \Gamma \sum_{k=1}^n z_k (\phi_k - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\ = & \tau_{n-1} + \Gamma z_n (\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k) \end{aligned} \quad (34)$$

마지막 n 번째의 튜닝 함수 τ_n 이 실제 적응칙 $\hat{\theta}$ 이 된다. $\hat{\theta} - \tau_{n-1} = \tau_n - \tau_{n-1} = \Gamma z_n (\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k)$ 를 고려해 \dot{V}_n 을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n [z_{n-1} + \beta_0 u + \phi_0 + \Delta_n \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \Delta_k) - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \theta} \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\hat{\theta}^T - \sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma) (\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\
& - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\rho}_{n-1}} \hat{\rho}_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} [z_k \hat{\rho}_k \text{sat}(z_k) - z_k \Delta_k] \\
& - \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}) + z_j \Delta_k] \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\rho}_k \hat{\rho}_k \quad (35)
\end{aligned}$$

마지막으로 \dot{V}_n 을 단순화 하기 위하여, (35)에서 z_n 이 곱해져있는 모난괄호항이 $-c_n z_n$ 이 되도록 u 를 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{\beta_0} [-z_{n-1} - c_n z_n - \phi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_n \\
& + (\sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma - \hat{\theta}^T) (\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\
& - \hat{\rho}_n \text{sat}(z_n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \hat{\rho}_k \text{sat}(z_n \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}) \\
& - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\rho}_{n-1}} \hat{\rho}_{n-1}] \quad (36)
\end{aligned}$$

(36)에서 $-\hat{\rho}_n \text{sat}(z_n) - \sum_{k=1}^{n-1} [\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \hat{\rho}_k \text{sat}(z_n \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k})]$ 항은 나중에 Δ_n 의 영향을 없애기 위해 설계된다. 마지막 n 번째의 안정화 함수가 실제 제어 입력 u 가 된다. (36)을 사용하여 (35)를 전개하면 Lyapunov Candidate Function의 미분항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_n = & - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 + \sum_{k=1}^n [z_k \Delta_k - z_k \hat{\rho}_k \text{sat}(z_k)] \\
& - z_n \sum_{k=1}^{n-1} [\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \Delta_k + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \hat{\rho}_k \text{sat}(z_n \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k})] \\
& - \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k} [z_j \hat{\rho}_k \text{sat}(z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}) + z_j \Delta_k] \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\rho}_k \hat{\rho}_k \\
\leq & - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 - \sum_{k=1}^n |z_k| \tilde{\rho}_k + I_{1k} \sum_{k=1}^n \hat{\rho}_k (|z_k| - \frac{z_k^2}{\nu_k}) \\
& - |z_n| \sum_{k=1}^{n-1} |\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}| \tilde{\rho}_k \\
& + I_{2k} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\rho}_k [|z_n| |\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}| - (\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k})^2 \frac{z_n^2}{\omega_k}] \\
& - \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} |\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}| z_j \tilde{\rho}_k \\
& + \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} I_j \hat{\rho}_k [|z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}| - (\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k})^2 \frac{z_j^2}{\omega_k}] \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\rho}_k \hat{\rho}_k \quad (37)
\end{aligned}$$

여기서, $I_{1k} = \begin{pmatrix} 0 & \text{if } |z_k| \geq \nu_k \\ 1 & \text{otherwise} \end{pmatrix}$, $k=1, 2, \dots, n$,

$$I_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & \text{if } |z_n \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}| \geq \omega_k \\ 1 & \text{otherwise} \end{pmatrix}, \\
I_j = \begin{pmatrix} 0 & \text{if } |z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}| \geq \omega_k \\ 1 & \text{otherwise} \end{pmatrix}, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & I_{1k} \sum_{k=1}^n \hat{\rho}_k (|z_k| - \frac{z_k^2}{\nu_k}) \\
& + I_{2k} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\rho}_k [|z_n| |\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}| - (\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k})^2 \frac{z_n^2}{\omega_k}] \\
& + \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} I_j \hat{\rho}_k [|z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}| - (\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k})^2 \frac{z_j^2}{\omega_k}] \quad \text{으로 설정하여 (37)을 전개하면 다음과 같다.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_n \leq & - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 - \sum_{k=1}^n |z_k| \tilde{\rho}_k - |z_n| \tilde{\rho}_n \\
& - |z_n| \sum_{k=1}^{n-1} |\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}| \tilde{\rho}_k - \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} |\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}| z_j \tilde{\rho}_k \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\rho}_k \hat{\rho}_k + \frac{1}{\gamma_n} \tilde{\rho}_n \hat{\rho}_n + \varepsilon \quad (38)
\end{aligned}$$

여기서, ε 의 최대값은 $\bar{\varepsilon} = \sum_{k=1}^n \hat{\rho}_k \nu_k + \sum_{k=1}^n \hat{\rho}_k \omega_k + \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} \hat{\rho}_k \omega_k$ 이며, 충분히 작은 값으로 조절 될 수 있다. (38)에서 $\hat{\rho}_k$ 은 다음과 같이 설계한다.

$$\hat{\rho}_k = \begin{cases} k=1, 2, \dots, n-1, \text{ if } \hat{\rho}_k \leq \bar{\rho}_k & \gamma_k (|z_k| + |z_n| |\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}| + \sum_{j=1}^{n-2} |z_{j+1}| |\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}|) \\ \text{else} & \gamma_k [1 + \frac{\bar{\rho}_k - \hat{\rho}_k}{\delta}] (|z_k| + |z_n| |\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k}| + \sum_{j=1}^{n-2} |z_{j+1}| |\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}|) \\ k=n, \text{ if } \hat{\rho}_k \leq \bar{\rho}_k & \gamma_k |z_k| \\ \text{else} & \gamma_k [1 + \frac{\bar{\rho}_k - \hat{\rho}_k}{\delta}] |z_k| \end{cases} \quad (39)$$

여기서, δ 는 양의 상수이며, $\bar{\rho}_k$ 는 ρ_k 값보다 적당히 큰 양의 상수로 설정한다. 그러면 (39)의 두 경우 모두에 대하여 (40)이 성립한다. (39)는 $\hat{\rho}_k$ 가 임의의 어떤 값을 넘지 않도록 일반적인 적응칙을 수정한 형태이다. 그러므로 $\hat{\rho}_k$ 는 유계하다.

(39)를 사용하여 (38)을 전개하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_n \leq - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 + \bar{\varepsilon} \quad (40)$$

그러므로 z_k 가 유계하다. (36)을 사용하면 (32)의 페루프 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{z}_n = & -z_{n-1} - c_n z_n - \hat{\theta}^T (\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\
& + (\sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma) (\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k) \\
& + \Delta_n - \hat{\rho}_n \text{sat}(z_n)
\end{aligned}$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} \left[\hat{\rho}_k \text{sat}(z_n \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k}) + \Delta_k \right] \quad (41)$$

$c_0 = \min[2c_k], k=1,2,\dots,n$ 로 설정하여 (40)을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -c_0 V_n + \frac{c_0}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\rho}_k^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \right) + \bar{\varepsilon} \\ &= -c_0 V_n + \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (42)$$

여기서, $c_0 = \min[2c_k], k=1,2,\dots,n$,

$$\varepsilon_0 = \frac{c_0}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_k} \tilde{\rho}_k^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \right) + \bar{\varepsilon}.$$

$\lambda = \frac{\varepsilon_0}{c_0}$ 로 설정하여 (42)를 연산하면 다음과 같다.

$$0 \leq V_n(t) \leq \lambda + [V(0) - \lambda] e^{-c_0 t} \quad (43)$$

따라서, $z_k(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\rho}_k(t)$ 그리고, $x_k(t)$ 는 globally uniformly ultimately 유계하다.

$\mu^* > \sqrt{2\lambda}$ 로 설정하면, 모든 $t \geq T$ 에 대해 $|z_k(t)| \leq \mu^*$ 되도록 하는 T 가 존재한다. 집합 $\mathcal{J} = \{z \in R^n : |z_k(t)| \leq \mu^*\}$ 는 설정자 파라미터를 적당하게 선택하는 것으로 충분히 작게 줄일 수 있다. $x_1 = z_1$ 이므로 모든 변수와 상태값을 유계하도록 유지하면서 x_1 을 0에 근접한 집합값으로 regulate 할 수 있다. 따라서, 기존의 적응 백스테핑 제어 기법에 적응칙을 사용하여 불확실성이나 외부외란의 상한값을 추정후 이 값을 안정화 함수와 제어입력에 추가 함으로써 x_1 의 값을 0에 충분히 가까운 나머지 집합으로 set-point regulation 할 수 있었다.

IV. 모의 실험

제안된 제어기의 효용성을 입증하기 위하여 아래의 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^2 + 0.2 \sin t \\ \dot{x}_2 &= u + \theta_2 x_1 x_2 + 0.5 \cos 2t \end{aligned}$$

각각의 다이내믹스에서 $0.2 \sin(t), 0.5 \cos(2t)$ 은 시변 외란이다. 초기조건은 $x_1(0) = 1.5, \theta_1 = 0.7, \theta_2 = 0.5$ 이다.

기존의 적응 백스테핑 알고리즘에 비선형 댐핑[3]을 사용한 경우의 안정화 함수 a_1, a_2 , 적응칙 $\hat{\theta}$, 제어입력 u 에 대한 설계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= -c_1 z_1 - x_1^2 \hat{\theta}_1 - x_1 z_1, \\ \hat{\theta} = \tau_2 &= \Gamma(z_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)) \\ u &= -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2 \hat{\theta}_1) + \frac{\partial a_1}{\partial \hat{\theta}_1} \tau_2 - x_1 x_2 \hat{\theta}_2 \\ &\quad - x_2 z_2 \left(1 - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \right)^2 \end{aligned}$$

설정자 파라미터는 다음과 같이 정한다. $c_1 = c_2 = 0.5$,

$x_1 = x_2 = 2, \Gamma = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$. 설정자 파라미터 c_1, c_2 ,

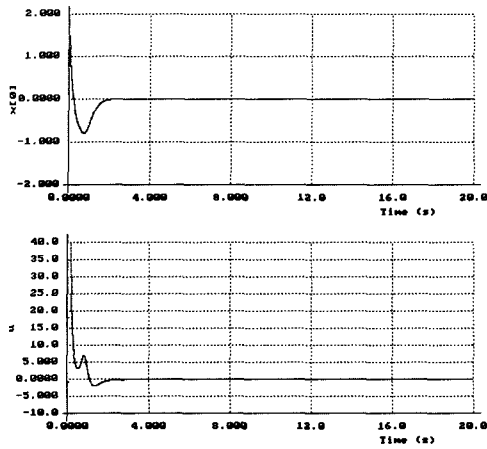
x_1, x_2 의 값은 클수록 더 좋은 과도 상태 성능을 보이지만, 대신 제어 입력이 커지는 교환조건(trade-off) 관계가 있다.

제안된 알고리즘에서 설계된 안정화 함수 a_1, a_2 , 적응칙 $\hat{\theta}$, 제어입력 u 는 다음과 같다.

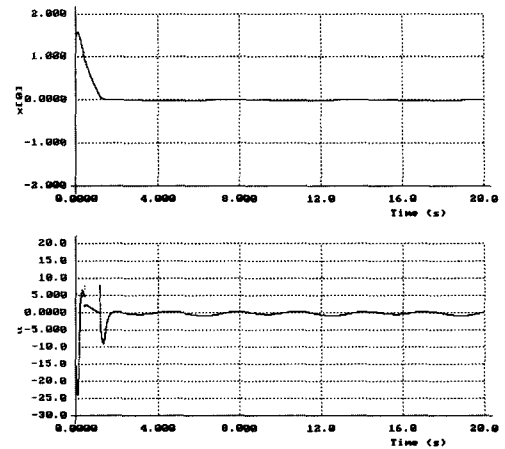
$$\begin{aligned} a_1 &= -c_1 z_1 - x_1^2 \hat{\theta}_1 - \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_1) \\ \hat{\theta} = \tau_2 &= \Gamma(z_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)) \\ \hat{\rho}_1 &= \gamma_1 (|z_1| + \left| z_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \right|), \quad \hat{\rho}_2 = \gamma_2 |z_2| \\ u &= -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2 \hat{\theta}_1) + \frac{\partial a_1}{\partial \hat{\theta}_1} \tau_2 - x_1 x_2 \hat{\theta}_2 \\ &\quad - \hat{\rho}_2 \text{sat}(z_2) - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \hat{\rho}_1 \text{sat}(z_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_1}) + \frac{\partial a_1}{\partial \hat{\rho}_1} \hat{\rho}_1 \end{aligned}$$

설정자 파라미터는 다음과 같이 정한다. $c_1 = c_2 = 0.25, \gamma_1, \gamma_2 = 1.5, v_1 = v_2 = w_1 = 0.1$. 모의 실험은 visual c++을 이용하여 작성하였다.

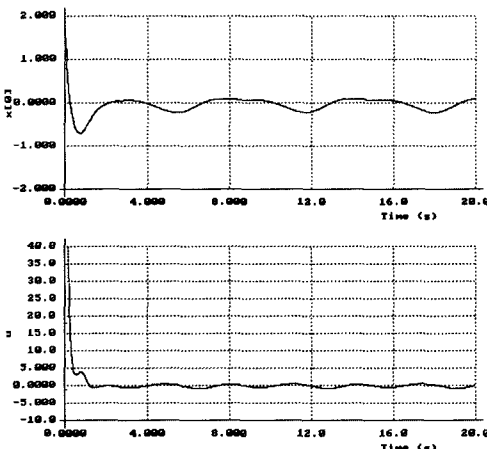
그림 1(a)는 외란이 존재 하지 않을 때 비선형 댐핑항을 추가하여 기존의 백스테핑 제어기에 사용한 결과이고, 그림 1(b)는 외란이 존재 할 때의 경우이다. 비선형 댐핑항을 추가하더라도 외란이 존재 하게 되면 x_1 이 0으로 set-point regulation 이 제대로 되고 있지 않음을 볼 수 있다. 무엇보다도 과도 상태시의 제어 입력이 너무 커서 실제 적용시 어려움이 따른다. 그림 2(a)는 외란이 존재 하지 않을 때, 본 논문에서 제시한 방법의 결과이고, 그림 2(b)는 외란이 존재 할 때, 본 논문에서 제시한 방법의 결과이다. 그림 2(b)에서는 외란이 존재하더라도 x_1 이 0에 근접한 잔여 집합에 빠르게 수렴하고 있음을 보여 주고 있다. 외란이 존재하지 않을 때나 외란이 존재하는 경우 모두 기존의 백스테핑 제어기에 비선형 댐핑항을 사용한 제어기보다 제안된 알고리즘이 더 좋은 성능을 보여 주고 있으며 과도 상태시 제어입력 역시 훨씬 적음을 알 수 있다. 그림 2에서 제어입력은 v_1, v_2, w_1 의 값을 크게 해서 떨림 없이 조절 할 수 있다. 단, v_1, v_2, w_1 의 값이 커지면 커질수록 $\bar{\varepsilon}$ 가 커져서 x_1 이 수렴하는 0에 근접한 집합값이 더 커지게 된다. 따라서, 설정자 파라미터 v_1, v_2, w_1 는 위와 같은 목적에 서로 부합되도록 적당하게 선택되면 된다. 그림 2는 v_1, v_2, w_1 를 대체로 적게 잡아 x_1 이 수렴하는 0에 근접한 집합값을 줄인 형태이다. 그림 2(c)에서는 추정값 $\hat{\theta}, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ 를 보여준다. 튜닝 함수를 이용한 적응칙 설계는 모듈라 설계에서 사용하는 기존의 추정 방법인 그래디언트 (gradient)나 최소자승법(least-square)에 비해 빠른 적응 속도(fast adaptation)를 갖는다. 그러한 이유는 passive 구조의 적응칙 설계나 swapping을 사용한 그래디언트 (gradient)나 최소 자승법(least-square)을 사용한 적응칙 설계와는 달리 적응칙이 정규화(normalization)를 하지 않고도 추정값이 발산하지 않으며, swapping을 이용한 설계와 달리 filter의 값을 적응



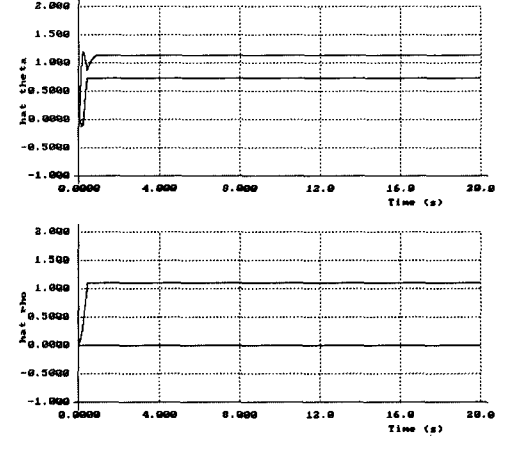
(a)



(b)



(b)



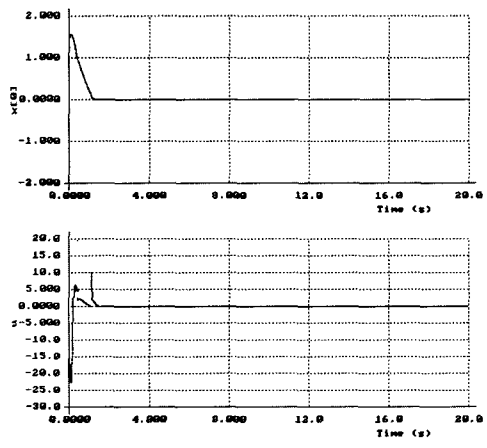
(c)

그림 1. 비선형 댐핑을 이용한 기존의 백스테핑 제어기의 결과. (a) 외란이 존재 하지 않을 때의 x_1 , u , (b) 외란이 존재 할 때의 x_1 , u .

Fig. 1. Simulation results of existing backstepping controller using nonlinear damping. (a) x_1 and u of a system without disturbances, (b) x_1 and u of a system with disturbances.

그림 2. 제안된 강인 백스테핑 제어기의 결과. (a) 외란이 존재 하지 않을 때의 x_1 , u , (b) 외란이 존재 할 때의 x_1 , u , (c) 외란이 존재 할 때의 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$.

Fig. 2. Simulation results of proposed robust backstepping controller. (a) x_1 and u of a system without disturbances, (b) x_1 and u of a system with disturbances, (c) $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\rho}_1$ and $\hat{\rho}_2$ of a system with disturbances.



(a)

칙에서 사용하지 않기 때문이다. 미지의 파라미터 적응치 이득은 비선형 댐핑을 이용한 백스테핑 설계와 같이 $\Gamma = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$ 를 사용하고, 불확실성의 상한값에 대한 적응치 이득은 $\gamma_1, \gamma_2 = 1.5$ 를 사용하였다. 미지의 파라미터 추정값과 비선형 불확실성의 추정값은 시간이 1 초도 안되어서 임의의 상수에 수렴하였다.

V. 결론

본 논문에서는 불확실성 혹은 외부 외란을 가진 parameteric strict 피이드백 형태의 비선형 시스템에 대한 강인적용제어 기법이 제시되었다. 불확실성 혹은 외부 외란

을 나타내는 미지의 비선형 함수에 대하여 적응칙을 사용하여 상한값을 추정하여 이 값을 안정화 함수와 제어입력 설계에 사용함으로써 강인한 백스테핑 설계를 가능하게 하였다. 기존의 강인제어 방식에 비해 특별한 가정이 없으며 엄격한 제한없이 전역 안정화를 가능하게 하였다. 또한 기존의 튜닝 함수를 이용한 적응 백스테핑 기법에 특별한 수정없이 그대로 설계 할 수 있다. 미지의 비선형 함수가 존재하더라도 전체 시스템의 안정도가 보장되고 안정화 오차가 0에 근접한 잔여집합으로 점진적으로 빠르게 수렴함을 수학적으로 입증하였다. 컴퓨터 모의실험에서 외부 외란을 나타내는 미지의 비선형 함수가 존재하더라도 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

참고문헌

[1] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, "Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, pp. 1241-1253, 1991.

[2] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic, "Adaptive nonlinear control without over-parametrization," *Systems & Control Letters*, vol. 19, pp. 177-185, 1992.

[3] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotovic, "Nonlinear adaptive control design," Jon Wiley & Sons, 1995.

[4] P. A. Ioannou and J. Sun, "Robust adaptive control," *Prentice Hall*, 1996.

[5] H. K. Khalil, "Nonlinear systems," *Prentice Hall*, 1996.

[6] 김민수, 현근호, 양해원, "백스테핑 기법을 이용한 적응 비선형 제어기 설계에 관한 연구," 대한 전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 588-591, 1998.

[7] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, "Backstepping design of robust controllers for a class of nonlinear systems," *Proceedings of the IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, pp. 307-312, 1992.

[8] W. Lin and T. Shen, "Robust passivity and feedback design for minimum-phase nonlinear systems with structural uncertainty," *Automatica*, vol. 35, pp. 35-47, 1999.

[9] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, "Design of 'Softer' robust nonlinear control laws," *Automatica*, vol. 29, no. 6, pp. 1425-1437, 1993.

[10] F. Ikhouane and M. Krstic, "Robustness of the tuning functions adaptive backstepping design for linear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 43, pp. 431-437, 1998.

[11] Z. P. Jiang and L. Praly, "Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties," *Automatica*, vol. 34, no. 7, pp. 825-840, 1998.

[12] L. Praly, "Almost exact modeling assumption in adaptive linear control," *Int. J. Contr.*, vol. 51, pp. 643-648, 1990.

[13] K. Itou, T. Shen, and K. Tamura, "Robust control of minimum-phase nonlinear systems with disturbance attenuation," *Proc. 3rd Asian Control Conference*, pp. 217-222, 2000.

[14] Y. Zhang and P. A. Ioannou, "Robustness of nonlinear control systems with respect to unmodeled dynamics," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 119-124, 1999.

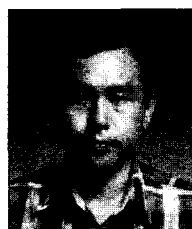
[15] A. S. I. Zinober and P. Liu, "Robust control of nonlinear uncertain via sliding mode with backstepping design," *UKACC Int. Conference on Control*, 1996.

[16] F. Gao, W. Q. Liu, V. Sreeram, and K. L. Teo, "Robust control design of nonlinear adaptive control systems with unmodelled dynamics." *Proc. of the 36th Conf. on Decision & Control*, pp. 2073-2078, 1997.



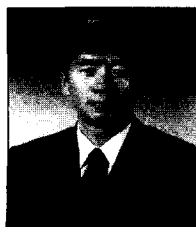
김 동 현

1970년 3월 8일생. 1995년 한양대 전기공학과 졸업(학사). 1997년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1997년~현재 동 대학원 박사과정.



김 응 석

1962년 11월 9일생. 1988년 한양대 전기공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1993년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1992년~1994년 한국과학기술연구원 Post Doc. 1994년~1999년 삼성종합기술원 전문연구원. 1999년~현재 한라대학교 전기전자제어공학부 조교수.



양 해 원

1950년 3월 20일생. 1971년 서울대 전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 일본 Kyoto대 전기공학과 졸업(공학박사). 1993년 미국 Yale대 방문교수. 1993년~현재 한양대학교 전자컴퓨터 공학부 교수.

대한 전기학회 부회장.