GPS를 이용한 위치 결정에서의 오차 해석

An Error Analysis of GPS Positioning

박 찬 식
(Chansik Park)

Abstract : There are several applications and error analysis methods using GPS (Global Positioning System). In most analysis, positioning and timing errors are represented as the multiplication of DOP (Dilution Of Precision) and measurement errors, which are affected by the receiver and measurement type. Therefore, lots of DOPs are defined and used to analyze and predict the performance of positioning and timing systems. In this paper, the relationships between these DOPs are investigated in detail. The relationships between GDOP (Geometric DOP), PDOP (Position DOP) and TDOP (Time DOP) in the absolute positioning are derived. Using these relationships, the affect of clock bias is analyzed. The relationships between RGDOP (Relative DOP) and PDOP are also derived in relative positioning where the single difference and double difference techniques are used. From the results, it is expected that using the common clock will give better performance when the single difference technique is used while the effects of clock is eliminated when the double difference technique is used. Finally, the error analyses of dual frequency receivers show that the narrow lane measurements give more accurate results than wide line or L1, L2 independent measurements.

Keywords : GPS, error analysis, absolute positioning, relative positioning, GDOP, RGDOP

I. 서론

GPS(Global Positioning System)는 미 국방성에 의하여 구축된 위성항법 시스템으로 현재는 전세계 어디서나 언제든지 사용자에게 위치와 시각을 제공하며, 저가의 수신기로도 기존의 측위 시스템 보다 정확한 위치를 제공할 수 있다. 따라서 GPS는 군용뿐 아니라 민간에서도 그 응용분야가 급격히 증가하는 추세이며, 항공기, 선박 및 차량 항법 등의 분야뿐 아니라 시각동기, 측지 등의 분야에서도 사용되고 있다[1].

GPS 수신기는 4개 이상의 위성으로부터 수신된 신호를 이용하여 위치를 구하며, 2000년 5월 SA (Selective Availability)가 제거됨에 따라 수평면에서의 오차가 100m(2drms)에서 25m줄어들었다고 알려져 있다[2]. 고도 오차는 수평오차의 위성의 배치의 영향으로 약 1.5배 정도가 된다고 알려져 있으며 이러한 오차는 관측되는 위성의 수뿐 아니라 배치에도 영향을 받는 것으로 알려져 있다[3]. 사용자의 오차는 위성 신호의 측정오차와 GDOP(Geometric Dilution Of Precision)의 곱으로 표현되며 GDOP가 낮을수록 정확한 위치 및 시각을 구할 수 있게 된다. 따라서 GDOP는 위성 궤도의 설계 및 해석에 사용되며, 채널의 수가 적은 수신기에서는 위성 선택의 기준으로 사용된다. GDOP는 다시 위치오차와 연관되는 PDOP(Position DOP)와 시각오차에 연관되는 TDOP(Time DOP)로 구분되며, PDOP는 다시 평면오차를 위한 HDOP(Horizontal DOP)와 수직오차를 위한 VDOP(Vertical DOP)로 구분할 수 있다[4]. 이런 DOP들은 응용에 따라 사용이 달라지며, 예를 들어 시각동기에서는 TDOP를 최소화하는 위성을 사용하는 것이 유리하며, 차량항법에서는 HDOP를 최소화하는 것이 유리하다.

위의 응용과는 별도로 측지 혹은 정밀항법에서는 반송파 위상신호를 이용하며 이 과정에서 오차를 효율적으로 제거하기 위하여 상대 위치 결정기법을 사용한다[5]. 상대 위치 결정은 정확한 위치를 알고 있는 기준국에서의 측정치와 사용자의 측정치의 차분을 이용하여 기준국에 대한 사용자의 상대위치를 구하는 방법이며 수 mm에서 수 cm사이의 오차를 갖는 정확한 위치를 구할 수 있다고 알려져 있다. 이 경우에도 관측되는 위성의 수 및 배치에 따라 구해진 위치의 정확도가 달라지며 이는 RGDOP(Relative GDOP)에 의하여 해석될 수 있다[6].

현재까지 DOP에 관한 많은 연구가 이루어 졌으나 이들 대부분은 절대 위치 결정기법을 이용하는 경우에 대한 위성 궤도의 설계 및 채널 수가 적은 수신기에서 위성의 선택 기준에 대한 연구이며, 측정치를 처리하는 방법에 따라 다르게 정의되는 DOP들의 해석적인 관계에 대한 연구는 거의 없는 상태이다. 본 논문에서는 먼저 절대위치 결정에서의 GDOP, PDOP 및 TDOP와의 관계를 유도하고 이로부터 수신기 시계의 정확도가 위치에 미치는 영향을 분석하였다. 또 이들과 단일 차분 측정치 혹은 이중 차분 측정치를 이용하는 상대 위치 결정에서의 RGDOP와의 관계를 유도하고 상대 위치 결정과정에서 수신기 시계오차가 미치는 영향을 분석하였다. 마지막으로 이중 주파수 수신기를

접수일자 : 2000. 12. 19., 수정완료 : 2001. 3. 30.
박찬식 : 충북대학교(chansp@cbucc.chungbuk.ac.kr)
※ 이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2000-041-E00325).

이용하는 경우의 오차를 해석하고 단일 주파수 수신기를 사용하는 경우와 비교하였다.

II. 절대위치 결정에서의 오차해석

절대 위치 결정 방법은 한 개의 GPS 수신기로 ECEF(Earth Center Earth Fixed) 좌표계에서 위치를 구하는 방법이며 미지정수 결정의 어려움으로 주로 코드를 이용한 의사거리 측정치를 이용하여 위치를 구한다. 이 장에서는 외부의 도움이 전혀 없는 경우와 외부에서 시각 정보를 제공하는 경우에 대한 절대 위치 결정방법을 소개하고 오차 해석을 나타내었다.

1. 수신기만을 사용하는 경우의 오차해석

수신기 A에서 위성 i에 대한 의사거리 측정치는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 Ψ_A^i는 의사거리 측정치, r_A^i는 위성과 수신기간의 거리, cB_A는 위성과 수신기의 시각 차이에 광속(c)이 곱해진 값, v_A^i는 측정 오차를 나타낸다. 측정오차에는 다시 수신기의 측정잡음, 전리층 및 대류권 지연 오차와 다중 경로오차로 나뉜다[5].

$$\Psi_A^i = r_A^i + cB_A + v_A^i \tag{1}$$

위 식을 기준점(Nominal position) A_0에서 선형화하면 (2)를 얻는다.

$$\rho_A^i \equiv \Psi_A^i - r_A^i\big|_{A_0} = h_i^T \delta x + cB_A + v_A^i \tag{2}$$

여기서 (X^i, Y^i, Z^i)는 위성 i의 위치, (x, y, z)는 기준점의 위치, $r_A^i\big|_{A_0}$는 위성과 기준점을 이용하여 계산된 거리, $h_i = \begin{bmatrix} \dfrac{X^i - x}{r_A^i\big|_{A_0}} & \dfrac{Y^i - y}{r_A^i\big|_{A_0}} & \dfrac{Z^i - z}{r_A^i\big|_{A_0}} \end{bmatrix}^T$는 위성과 수신기간의 시선 벡터, $\delta x = [dx \quad dy \quad dz]^T$는 기준점에 대한 위치 오차를 나타낸다.

3차원 위치와 수신기 시계오차를 구하기 위해서는 4개 이상의 위성으로부터 측정치를 얻어야 하며 $m \geq 4$개의 위성이 관측된다면 (3)과 같이 벡터와 행렬을 이용하여 나타낼 수 있다. 여기서, $\rho = [\rho_A^1 \ \cdots \ \rho_A^m]^T$, $H = [h_1 \ \cdots \ h_m]^T$ $r = [1 \ \cdots \ 1]^T$, $v = [v_A^1 \ \cdots \ v_A^m]^T$로 정의되며 측정오차는 수신기의 모든 채널의 성능이 같다고 볼 수 있으므로 $v \sim N(0, \sigma_\Psi^2 I)$의 분포를 갖는다고 가정할 수 있다.

$$\rho = H\delta x + cB + v = [H \quad r]\begin{bmatrix} \delta x \\ cB \end{bmatrix} + v \tag{3}$$

(3)에 가중 최소 자승법을 적용하여 위치와 수신기 시계오차를 구하면 (4)가 되고, 공분산은 (5)가 된다.

$$\begin{bmatrix} \delta \hat{x} \\ c\hat{B} \end{bmatrix} = ([H \quad r]^T [H \quad r])^{-1} [H \quad r]^T \rho \tag{4}$$

$$\mathrm{cov}(\begin{bmatrix} \delta \hat{x} \\ c\hat{B} \end{bmatrix}) = ([H \quad r]^T [H \quad r])^{-1} \sigma_\Psi^2 \tag{5}$$

(6)에 구해진 추정치의 공분산을 이용하여 정의된 GDOP와 역 행렬 정리를[7] 이용하여 변형된 형태를 나타내었다. 여기서 tr은 행렬의 trace를 나타낸다.

$$\begin{aligned} GDOP &\equiv \sqrt{tr(\begin{bmatrix} H^T \\ r^T \end{bmatrix}[H \quad r])^{-1}} \\ &= \sqrt{tr((H^T H - \frac{H^T rr^T H}{m})^{-1}) + \frac{1}{m - r^T H(H^T H)^{-1} H^T r}} \end{aligned} \tag{6}$$

GPS를 이용하여 구해진 위치 및 시각의 오차는 (7)과 같이 GDOP와 측정 오차의 곱으로 나타낼 수 있다[4].

$$(Positioning + Time)\, error = GDOP \times \sigma_\Psi \tag{7}$$

여기서 측정 오차 σ_Ψ는 전리층 및 대류권 지연, 다중 경로 및 수신기 측정 잡음으로 구성된다. 전리층 및 대류권 지연은 DGPS(Differential GPS) 기법[8] 혹은 차분 기법에 의하여 제거할 수 있으며, 다중 경로 오차는 쵸크 링(Choke ring), 협 상관기(Narrow correlator)[9], MEDLL(Multipath Estimating Delay Lock Loop)[10] 등에 의하여 그 영향을 줄일 수 있다. 수신기 측정 잡음은 수신기의 해상도에 영향을 받으며 코드 측정치의 경우 1/2 칩(chip) 지연을 사용하는 상관기를 사용하면 대략 3m, 협 상관기를 사용하면 30cm 정도로 알려져 있다[9]. 반송파 위상 측정치의 경우에는 대략 3mm 정도의 해상도로 의사거리를 측정한다고 알려져 있다[1][5]. 사용하는 수신기와 측정치가 정해지면 측정 오차의 크기는 결정되므로 본 논문에서는 별도로 측정 오차를 줄이기 위한 별도의 노력은 하지 않았다.

2. 외부 시각 정보를 이용하는 경우의 오차해석

수신기가 외부의 정밀한 시계로부터 시각 정보를 받을 수 있고, 그 측정 오차가 $cB \sim N(0, \sigma_{cB}^2)$로 나타난다면 (3)은 (8)로 변형되며 이로부터 구해진 위치는 (9), 공분산은 (10)으로 나타난다.

$$\Delta\rho \equiv \rho - cB \cdot r = H\delta x + \zeta \tag{8}$$

$$\delta\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T \Delta\rho \tag{9}$$

$$\mathrm{cov}(\delta\hat{x}) = (H^T H)^{-1} H^T \mathrm{cov}(\Delta\rho) H (H^T H)^{-1} \tag{10}$$

여기서 측정치의 공분산은 의사거리 측정오차와 수신기 시계 측정오차의 합으로 구성되며 (11)로 나타낼 수 있다. (11)을 이용하면 (10)은 (12)가 된다.

$$\mathrm{cov}(\Delta\rho) = \sigma_\Psi^2 I + \sigma_{cB}^2 rr^T \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\delta\hat{x}) &= (H^T H)^{-1} H^T (\sigma_\Psi^2 + \sigma_{cB}^2 rr^T) H (H^T H)^{-1} \\ &= \sigma_\Psi^2 (H^T H)^{-1} + \sigma_{cB}^2 (H^T H)^{-1} H^T rr^T H (H^T H)^{-1} \end{aligned} \tag{12}$$

(12)의 공분산으로부터 GDOP과 같은 방법으로 PDOP을 (13)과 같이 정의할 수 있다. 이 경우 위치 오차는 $PDOP|_{cB}$와 σ_Ψ의 곱으로 나타나며, TDOP은 나타나지 않는다.

$$PDOP|_{cB} = \sqrt{tr(H^T H)^{-1} + \frac{\sigma_{cB}^2}{\sigma_\Psi^2} tr((H^T H)^{-1} H^T rr^T H (H^T H)^{-1})} = \sqrt{tr(H^T H)^{-1} + \frac{\sigma_{cB}^2}{\sigma_\Psi^2} r^T H (H^T H)^{-2} H^T r} \quad (13)$$

여기서 수신기 시계오차가 의사거리 측정오차에 비하여 무시할 수 있다면, 즉 $\sigma_{cB}^2 \ll \sigma_\Psi^2$ 라면 (13)은 다음과 같이 간략하게 나타낼 수 있다.

$$PDOP|_{cB=0} = \sqrt{tr(H^T H)^{-1}} \quad (14)$$

한편 (3)에서 각 측정치의 차분을 취하면 수신기 시계오차를 제거할 수 있으며 이는 (15)로 나타낼 수 있다. 여기서 $(m-1) \times m$ 행렬인 차분 연산자 $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 에 의하여 측정치의 수가 m개에서 $(m-1)$개로 줄어든다.

$$C \cdot \rho = C \cdot \begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ cB \end{bmatrix} + C \cdot v = C \cdot H \delta x + C \cdot v \quad (15)$$

(15)를 이용하면 위치만을 구할 수 있으며 이 경우 PDOP는 다음과 같이 나타난다.

$$PDOP = \sqrt{tr(H^T C^T (CC^T)^{-1} CH)^{-1}} \quad (16)$$

여기서 차분 연산자에 대하여 (17)이 성립하며 이를 이용하면 PDOP는 다시 (18)로 나타낼 수 있다.

$$C^T (CC^T)^{-1} C = \begin{bmatrix} \frac{m-1}{m} & \frac{-1}{m} & \cdots & \frac{-1}{m} \\ \frac{-1}{m} & \frac{m-1}{m} & \cdots & \frac{-1}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{m} & \frac{-1}{m} & \cdots & \frac{m-1}{m} \end{bmatrix} = I - \frac{1}{m} rr^T \quad (17)$$

$$PDOP = \sqrt{tr((H^T H - \frac{H^T rr^T H}{m})^{-1})} = \sqrt{tr(H^T H)^{-1} + \frac{r^T H (H^T H)^{-2} H^T r}{m - r^T H (H^T H)^{-1} H^T r}} \quad (18)$$

(6)과 (18)로부터 TDOP는 (19)가 됨을 알 수 있다.

$$TDOP = \sqrt{\frac{1}{m - r^T H (H^T H)^{-1} H^T r}} \quad (19)$$

(6), (18)과 (19)로부터 GDOP, PDOP 및 TDOP의 해석적인 값을 얻을 수 있으며, 이로부터 시계오차와 위치오차와의 관계를 얻을 수 있다. 여기서 $\frac{r^T H (H^T H)^{-2} H^T r}{m - r^T H (H^T H)^{-1} H^T r} = TDOP^2 \times r^T H (H^T H)^{-2} H^T r$ 는 수신기 시계오차를 추정해야 하기 때문에 발생하는 항이고 (이 경우 m개의 측정치로 3+1개의 미지수를 추정한다), $(\sigma_{cB}^2 / \sigma_\Psi^2) \times r^T H (H^T H)^{-2} H^T r$ 는 수신기 시계를 정확하게 측정하지 못해서 발생하는 항임을 알 수 있다 (이 경우 m개의 측정치로 3개의 미지수를 추정한다). 따라서 $\sigma_{cB} / \sigma_\Psi > TDOP$ 인 경우는 알고 있는 외부의 시각 정보를 사용하지 않는 것이 유리함을 알 수 있다. 그러나 TDOP의 이론적 최소치가 $\sqrt{1/m}$ 이고 [3], 코드 측정치의 경우 $\sigma_\Psi \approx 3m$ 임을 고려한다면 $\sigma_{cB} \le 3/\sqrt{m}$ 을 만족하는 경우에는 알고 있는 수신기의 시계정보를 이용하는 것이 유리 할 것이다. 추가로 TDOP가 이론적 최소값을 갖는 경우에는 $r^T H (H^T H)^{-2} H^T r = 0$ 가 성립하며 이때는 위치오차에 시계오차의 영향이 나타나지 않음을 알 수 있다. 이론적인 GDOP의 최소 값은 $\sqrt{10/m}$ 이고 이중 TDOP은 $\sqrt{1/m}$ 이고 나머지 $3/\sqrt{m}$ 이 PDOP의 영향을 나타낸다. 이때 $r^T H (H^T H)^{-1} H^T r$ =0가 성립하며 TDOP가 PDOP에 영향을 주지 않는다.

III. 상대위치 결정에서의 오차해석

상대 위치 결정은 알고 있는 위치에 설치된 수신기와 구하고자 하는 위치에 설치된 수신기간의 기저선 벡터를 구함으로써 위치를 구하는 방법으로, 주로 측지와 자세 측정에서 사용된다. 정밀한 위치와 자세를 구하기 위하여 반송파 위상 측정치를 이용하며, 두 수신기에서 얻어진 측정치에 차분을 취하여 미지정수를 구한 후 위치를 구한다. 이 장에서는 단일 차분 측정치와 이중 차분 측정치를 이용하여 위치를 구하는 과정을 소개하고 각 경우에 대한 위치 오차를 해석하였다.

1. 단일 차분 측정치를 이용한 상대위치 결정

단일 차분 기법에는 수신기간 차분, 위성간 차분 및 시각간 차분 방법이 있지만 여기서는 가장 많이 사용되는 수신기간 차분에 대해서만 오차를 해석하였다. 수신기간 차분은 코드 측정치와 반송파 위상 측정치에 대하여 모두 적용할 수 있으며, 반송파 위상 측정치의 경우 미지정수가 포함되지만 여기서는 미지정수는 이미 결정되어 있다고 가정하였다. 수신기간 차분에 의하여 공간적으로 공통인 오차는 상쇄되지만 수신기 시계오차는 상쇄되지 않으므로 여기서는 두 수신기간 시각 동기를 전혀 고려하지 않은 경우, 두 수신기간 시각 동기를 PPS(Pulse Per Second)를 이용하여 유지하는 경우 및 동일한 발진기를 사용하여 수신기간 시각 동기를 유지하는 세 가지 경우에 대하여 오차를 해석하였다.

1.1 별도의 수신기를 사용하는 경우

수신기 A에서 위성 i에 대한 반송파 위상 측정치는 (20)으로 나타낼 수 있다. 여기서 λN_A^i 은 미지정수에 파장(λ)이 곱해진 값, w_A^i 는 측정오차를 나타내며 나머지 변수는 (1)에서와 같다.

$$\Psi_A^i = r_A^i + \lambda N_A^i + cB_A + w_A^i \quad (20)$$

수신기간 차분은 (21)로 정의되며 이 과정에서 공간적으로 공통 오차인 전리층 지연 및 대류권 지연오차는 상쇄된다. 다중 경로오차는 안테나 설치환경에 따라 변화하지만 쵸크링 등을 사용하여 그 영향을 줄일 수 있으므로 본 논문에서는 다중 경로 오차에 대한 영향을 무시하였다. 여기서 $r_{AB}^i, N_{AB}^i, cB_{AB}^i, w_{AB}^i$ 는 각각 차분된 거리, 차분된 미지정수, 차분된 수신기 시계오차 및 차분된 측정잡음을 나타낸다.

$$\Psi_{AB}^i \equiv \Psi_B^i - \Psi_A^i = r_{AB}^i + \lambda N_{AB}^i + cB_{AB} + w_{AB}^i \tag{21}$$

(21)에서 기준 수신기 A는 정확히 알고있는 위치에 설치되어있다고 가정하며, (2)에서와 같은 방법으로 기준점 A에서 선형화 하면 (22)를 얻는다.

$$l_{AB}^i \equiv \Psi_{AB}^i - r_{AB}^i\big|_A - \lambda N_{AB}^i = h_i^T \delta x + cB_{AB} + w_{AB}^i \tag{22}$$

$m \geq 4$개 이상의 위성이 수신기 A와 B에서 공통으로 관측된다면 (23)과 같은 형태로 나타낼 수 있다. 여기서 차분된 수신기 시계오차 cB_{AB}는 위성과는 무관하며 수신기에만 영향을 받으며 $l_{SD} = \begin{bmatrix} l_{AB}^1 & \cdots & l_{AB}^m \end{bmatrix}^T$, $H = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_m \end{bmatrix}^T$, $w_{SD} = \begin{bmatrix} w_{AB}^1 & \cdots & w_{AB}^m \end{bmatrix}^T$ 를 나타낸다.

$$l_{SD} = H\delta x + r \cdot cB + w_{SD} \tag{23}$$

위 식은 단일 차분 연산자를 이용하여 (24)로 표현할 수 있다.

$$S_D \cdot \Delta l_{SD} = H\delta x + S_D \cdot r \cdot cB + S_D \cdot \Delta w_{SD} \tag{24}$$

여기서 $\Delta l_{SD} = \begin{bmatrix} l_A^1 & l_B^1 & l_A^2 & l_B^2 & \cdots & l_A^m & l_B^m \end{bmatrix}^T$,

$\Delta w_{SD} = \begin{bmatrix} w_A^1 & w_B^1 & w_A^2 & w_B^2 & \cdots & w_A^m & w_B^m \end{bmatrix}^T$, $S_D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$는 단일 차분 연산자로 $m \times 2m$의 행렬을 나타낸다. 수신기의 채널간 특성이 같다면 측정잡음의 공분산은 다음과 같이 나타난다.

$$\mathrm{cov}(w_{SD}) = S_D \cdot \mathrm{cov}(\Delta w_{SD}) \cdot S_D^{\ T} = S_D \cdot \sigma_\Psi^2 \cdot S_D^{\ T} \equiv \sigma_\Psi^2 \cdot Q_{SD} \tag{25}$$

(23)과 (25)를 이용하면 (26)으로 수신기 B의 위치와 차분된 수신기 시계오차를 구할 수 있으며, 공분산은 (27)이 된다.

$$\begin{bmatrix} \delta\hat{x} \\ c\hat{B}_{AB} \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix}^T Q_{SD}^{-1} \begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix}^T Q_{SD}^{-1} l_{SD} \tag{26}$$

$$\mathrm{cov}(\begin{bmatrix} \delta\hat{x} \\ c\hat{B}_{AB} \end{bmatrix}) = (\begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix}^T Q_{SD}^{-1} \begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix})^{-1} \sigma_\Psi^2 \tag{27}$$

단일 차분 측정치를 이용한 상대위치결정에서의 SD_RGDOP는 다음 같이 정의할 수 있으며 (25)와 (27)의 관계로부터 (28)의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} SD\_RGDOP &\equiv \sqrt{tr(\begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix}^T Q_{SD}^{-1} \begin{bmatrix} H & r \end{bmatrix})^{-1}} \\ &= \sqrt{2} \times GDOP \end{aligned} \tag{28}$$

$$Q_{SD} = S_D \cdot S_D^{\ T} = 2 \cdot I_{m\times m} \tag{29}$$

(28)은 단일 차분을 이용하여 상대 위치를 구하는 경우의 SD_RGDOP와 절대위치에서의 GDOP의 관계를 보여주며, 단일 차분에 의하여 $\sqrt{2}$ 배 증폭됨을 알 수 있다. 그러나 단일 차분에 의하여 측정오차 중 대류권 지연 오차와 전리층 지연 오차 부분이 상쇄되므로 최종적인 위치 및 시각의 정확도는 상대위치 결정 기법을 이용하는 것이 향상된다.

상대 위치의 오차는 SD_RGDOP와 측정 오차 σ_Ψ 의 곱으로 나타낼 수 있다. 또 다른 방법으로는 GDOP는 변화가 없으며 측정 오차가 $\sqrt{2}\sigma_\Psi$ 로 증폭된 것으로 볼 수 있으며, 최종 위치 오차의 해석에는 변화가 없다. 본 논문에서는 측정 오차의 크기는 σ_Ψ 로 고정시키고 DOP의 변화를 살펴봄으로써 절대 위치 측정의 정확도와 비교할 수 있도록 하였다.

1.2 PPS 신호를 사용하는 경우

대부분의 수신기는 PPS(Pulse Per Second) 신호를 제공하며[1] 이는 GPS time에 동기가 이루어져 출력된다. 따라서 만약 두 수신기가 PPS 신호에 동기된 출력을 제공한다면 수신기 시각을 추정한다고 볼 수 있으며 이때 오차는 두 수신기의 특성이 같다고 가정하여 $cB_A \sim N(0, \sigma_{cB}^2)$, $cB_B \sim N(0, \sigma_{cB}^2)$ 로 둘 수 있다. 이 경우 차분된 수신기 시계오차는 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$cB = cB_B - cB_A \sim N(0, 2\sigma_{cB}^2) \tag{30}$$

이 경우 (23)은 (31)과 같이 나타낼 수 있으며, 이를 이용하여 구해진 위치와 공분산은 (32)와 (33)으로 나타난다.

$$\nabla l_{SD} \equiv l_{SD} - r \cdot cB = H\delta x + w_{SD} \tag{31}$$

$$\delta\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T \nabla l_{SD} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\delta\hat{x}) &= (H^T H)^{-1} H^T \,\mathrm{cov}(\nabla l_{SD}) H (H^T H)^{-1} \\ &= 2\sigma_\Psi^2 (H^T H)^{-1} + 2\sigma_{cB}^2 (H^T H)^{-1} H^T r r^T H (H^T H)^{-1} \end{aligned} \tag{33}$$

(33)을 이용하여 RPDOP(Relative PDOP)를 다음과 같이 정의할 수 있으며 여기서 절대위치 결정에서의 PDOP가 $\sqrt{2}$ 배 증폭됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} SD\_RPDOP\big|_{cB} &= \sqrt{2\{tr(H^T H)^{-1} + \frac{\sigma_{cB}^2}{\sigma_\Psi^2} r^T H (H^T H)^{-2} H^T r\}} \\ &= \sqrt{2} \times PDOP\big|_{cB} \end{aligned} \tag{34}$$

여기서 수신기 시계오차가 의사거리 측정오차에 비하여 무시할 수 있다면, 즉 $\sigma_{cB}^2 / \sigma_\Psi^2 \approx 0$ 이라면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$SD\_RPDOP|_{cB=0} = \sqrt{2tr(H^TH)^{-1}} = \sqrt{2} \times PDOP|_{cB=0} \quad (35)$$

이상에서 단일차분을 사용하더라도 $\sigma_{cB}/\sigma_{\Psi} > TDOP$ 인 경우는 알고 있는 수신기 시계정보를 사용하지 않는 것이 유리함을 알 수 있다. 즉 이 경우는 m개의 측정치로부터 (32)를 이용하여 위치를 구하는 것에 비하여 (26)을 이용하여 위치와 수신기 시계오차를 동시에 구하는 것이 정확한 위치를 제공함을 알 수 있다.

1.3 같은 발진기를 사용하는 경우

자세 결정용 수신기등에서는 기준 수신기 A와 수신기 B가 같은 발진기를 사용하며[11], 이 경우 잘 설계된 수신기는 두 수신기의 시각을 정확하게 동기시킬 수 있다. 이런 경우에는 항상 (35)가 성립한다. 그러나 대부분의 경우 같은 발진기를 사용하더라도 정확하게 동기를 맞추기가 어려우며, 수신기 A의 시각에 수신기 B의 시각을 동기 시킨다. 이런 경우 차분된 수신기 측정오차는 $cB \sim N(0,\sigma_{cB}^2)$ 로 둘 수 있으며 이때 RPDOP는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} SD\_RPDOP|_{com} &= \sqrt{2tr(H^TH)^{-1} + \frac{\sigma_{cB}^2}{\sigma_{\Psi}^2} r^T H(H^TH)^{-2}H^T r} \\ &= \sqrt{2\,PDOP|_{cB}^2 - \frac{\sigma_{cB}^2}{\sigma_{\Psi}^2} r^T H(H^TH)^{-2}H^T r} \end{aligned} \quad (36)$$

(36)은 같은 발진기를 사용하여 두 수신기의 동기를 맞추는 것이 두 수신기의 시계를 별도로 예측하여 사용하는 것에 비하여 성능이 나아짐을 보여준다. 일반적으로 수신기 B의 시각은 기준 수신기에 대하여 바이어스가 존재하며, $cB \sim N(\bar{b},\sigma_{cB}^2)$ 로 나타난다. 이 경우 구해진 위치에도 다음과 같은 바이어스가 존재한다.

$$E(\delta\hat{x}) = (H^TH)^{-1}H^T\bar{b} \quad (37)$$

그러나 고정된 하드웨어에서 바이어스 값은 미리 구해 둘 수 있으므로 두 수신기가 같은 발진기를 사용하는 것이 가장 유리할 것으로 예측된다.

2. 이중 차분 기법을 사용한 상대위치 결정

이중 차분에 의하여 수신기 시계오차와 공간적으로 공통 오차들은 상쇄되므로 전용 수신기가 아닌 일반 수신기를 사용하여 상대위치를 구하는 경우 이중 차분 기법을 많이 사용하고 있다. 이중 차분은 수신기간 차분과 위성간 차분을 동시에 수행하며 (38)의 측정치를 이용한다.

$$\Psi_{AB}^{ij} \equiv \Psi_{AB}^{j} - \Psi_{AB}^{i} = r_{AB}^{ij} + \lambda N_{AB}^{ij} + w_{AB}^{ij} \quad (38)$$

기준점 A에서 선형화하면 (39)를 얻는다. 여기서 $r_{AB}^{ij}\big|_A$ 는 계산된 거리, $h_{ij} = h_j - h_i$ 는 차분된 시선 벡터를 나타낸다.

$$l_{AB}^{ij} \equiv \Phi_{AB}^{ij} - r_{AB}^{ij}\big|_A - \lambda N_{AB}^{ij} = h_{ij}^T\delta x + w_{AB}^{ij} \quad (39)$$

$m \geq 4$개 이상의 위성이 수신기 A와 B에서 공통으로 관측된다면 (40)의 형태로 나타낼 수 있다. 여기서 $l_{DD} = \begin{bmatrix} l_{AB}^{12} & \cdots & l_{AB}^{(m-1)m} \end{bmatrix}^T$, $H_C = \begin{bmatrix} h_{12} & \cdots & h_{(m-1)m} \end{bmatrix}^T$, $w_{DD} = \begin{bmatrix} w_{AB}^{12} & \cdots & w_{AB}^{(m-1)m} \end{bmatrix}^T$ 을 나타낸다.

$$l_{DD} = H_C\delta x + w_{DD} \quad (40)$$

(40)은 다시 이중 차분 연산자

$$D_D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

를 이용하면 (41)로 나타낼 수 있다. 여기서 $\Delta l_{DD} = \begin{bmatrix} l_A^1 & l_B^1 & l_A^2 & l_B^2 & \cdots & l_A^m & l_B^m \end{bmatrix}^T$, $\Delta w_{DD} = \begin{bmatrix} w_A^1 & w_B^1 & w_A^2 & w_B^2 & \cdots & w_A^m & w_B^m \end{bmatrix}^T$ 로 정의된다.

$$D_D \cdot \Delta l_{DD} = C \cdot H\delta x + D_D \cdot \Delta w_{DD} \quad (41)$$

각 수신기의 채널간 특성이 같다는 가정을 이용하면 측정치의 공분산은 (42)가 되고, 구해진위치는 (43), 공분산은 (44)가 된다.

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(w_{DD}) &= D_D \cdot \mathrm{cov}(\Delta w_{DD}) \cdot D_D^T \\ &= D_D \cdot \sigma_{\Psi}^2 \cdot D_D^T \equiv \sigma_{\Psi}^2 \cdot Q_{DD} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\delta\hat{x} = (H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1} H_C^T Q_{DD}^{-1} l_{DD} \quad (43)$$

$$\mathrm{cov}(\delta\hat{x}) = (H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}\sigma_{\Psi}^2 \quad (44)$$

이중 차분된 측정치를 이용한 RPDOP는 (46)로 정의할 수 있으며, (45)의 관계를 이용하면 PDOP와의 관계를 얻는다[3]. (46)에서 이중 차분을 이용하는 경우 수신기 시계오차가 상쇄되어 그 영향이 나타나지 않으므로 PDOP에만 영향을 받음을 알 수 있다.

$$Q_{DD} = D_D \cdot D_D^T = 2 \cdot CC^T \quad (45)$$

$$\begin{aligned} DD\_RPDOP &= \sqrt{tr(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}} \\ &= \sqrt{2tr(H^TC^T(CC^T)^{-1}CH)^{-1}} = \sqrt{2} \times PDOP \end{aligned} \quad (46)$$

IV. 이중 주파수 수신기를 이용한 상대위치 결정에서의 오차 해석

단일 주파수 수신기를 이용하는 경우 미지정수의 결정에 많은 시간이 소요되므로 최근의 많은 측지용 수신기는 L1 및 L2의 반송파 위상 측정치를 동시에 제공하며 이를 이용하면 미지정수의 결정이 용이해진다. 이 장에서는 이중 주파수를 이용하는 대표적인 방법인 확장 파장법 (Wide lane method)[5], 축소 파장법 (Narrow lane method)[5] 및 L1, L2 독립법[12] 에서 사용되는 측정치와 이를 이용하여 구해진 위치의 오차해석을 나타내었다.

1. L1, L2 독립 법에서의 오차해석

수신기 A, B에서 동시에 측정된 의사거리 측정치를 이중 차분을 취한 후 선형화하면 (47)로 나타낼 수 있다. 여기서 하 첨자 1, 2는 각각 L1, L2 반송파를 나타내며 λ_1,λ_2는 각각 19.04cm 와 24.44cm인 파장을 나타내고, 측정 오차는 각각 $w_{1DD} \sim N(0,\sigma_{\Psi 1}^2 Q_{DD})$, $w_{2DD} \sim N(0,\sigma_{\Psi 2}^2 Q_{DD})$이다.

$$\begin{aligned} l_{1DD} &= H_C\delta x + \lambda_1 N_1 + w_{1DD} \\ l_{2DD} &= H_C\delta x + \lambda_2 N_2 + w_{2DD} \end{aligned} \quad (47)$$

L1, L2 독립법에서는 L2의 측정치를 잉여 측정치로 두고 미지정수를 구하며 구해진 미지정수를 이용하여 다음의 식을 이용하여 위치를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} l_{1DD} \\ l_{2DD} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 N_1 \\ \lambda_2 N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_C \\ H_C \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} w_{1DD} \\ w_{2DD} \end{bmatrix} \quad (48)$$

여기서 측정잡음 w_1 과 w_2 가 서로 독립이므로 $\begin{bmatrix} w_{1DD} \\ w_{2DD} \end{bmatrix} \sim N(0, \begin{bmatrix} \sigma_{\Psi 1}^2 Q_{DD} & 0 \\ 0 & \sigma_{\Psi 2}^2 Q_{DD} \end{bmatrix})$가 된다. (48)을 이용하여 위치를 구하면 (49), 공분산은 (50)이 된다.

$$\begin{aligned} \delta\hat{x} = &\frac{\sigma_{\Psi 2}^2}{\sigma_{\Psi 1}^2 + \sigma_{\Psi 2}^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1} H_C^T Q_{DD}^{-1}(l_{1DD} - \lambda_1 N_1) \\ &+ \frac{\sigma_{\Psi 1}^2}{\sigma_{\Psi 1}^2 + \sigma_{\Psi 2}^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1} H_C^T Q_{DD}^{-1}(l_{2DD} - \lambda_2 N_2) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\operatorname{cov}(\delta\hat{x}) = \frac{2\sigma_{\Psi 1}^2 \sigma_{\Psi 2}^2}{\sigma_{\Psi 1}^2 + \sigma_{\Psi 2}^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1} \quad (50)$$

(50)을 이용하여 RPDOP를 정의하면 (51)이 되며 이는 (44)의 단일 주파수에 대한 이중 차분에 대한 결과와 일치한다. 그러나 이 경우는 수신기의 측정 잡음이 단일 주파수 수신기와는 달리 (52)로 변형되어야 하며 최종 위치 오차는 둘의 곱으로 나타난다. 만약 $\sigma_{\Psi 1} = \sigma_{\Psi 2}$ 라면 $\sigma_{\Psi\_L1L2} = \sigma_{\Psi 1}$ 가 되며 이는 L2의 측정치를 이용하더라도 위치의 정확도 향상에는 도움이 되지 않음을 나타낸다.

$$RPDOP_{L1L2} = \sqrt{tr(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}} \quad (51)$$

$$\sigma_{L1L2} = \sqrt{\frac{2\sigma_{\Psi 1}^2 \sigma_{\Psi 2}^2}{\sigma_{\Psi 1}^2 + \sigma_{\Psi 2}^2}} \quad (52)$$

일반적으로 통용되는 가정인 이중 주파수 수신기가 L1, L2의 반송파 위상의 측정치를 각각 1%의 해상도로 측정할 수 있다면[5] 이중 주파수 측정치 사이에 다음의 관계가 성립하며, 이를 이용하면 (50)은 (54)가 된다.

(54)를 이용하여 RPDOP를 정의하면 (55)가 되며 이 경우 위치오차는 DD_RPDOP_{L1L2}와 측정 오차 $\sigma_{\Psi 1}$의 곱으로 나타난다.

$$\sigma_{\Psi 2}^2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 \sigma_{\Psi 1}^2 \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\delta\hat{x}) &= \frac{2\sigma_{\Psi 1}^2 \sigma_{\Psi 2}^2}{\sigma_{\Psi 1}^2 + \sigma_{\Psi 2}^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1} \\ &= \frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}\sigma_{\Psi 1}^2 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} DD\_RPDOP_{L1L2} &= \sqrt{\frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \times DD\_RPDOP = 2\sqrt{\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \times PDOP \end{aligned} \quad (55)$$

여기서 $\sqrt{2\lambda_2^2/(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}$ =1.1168임을 감안하면 이중 주파수 측정치를 이용하여 위치를 구하면 L1 단일 주파수를 이용하여 위치를 구하는 것에 비하여 오차가 증폭됨을 알 수 있다. 즉 이중 주파수 수신기를 사용하는 경우라도 최종 위치는 L1 반송파 위상 측정치를 이용하여 구하는 것이 유리함을 알 수 있다.

2. 확장 파장 법에서의 오차해석

확장파장기법에서는 검색범위를 줄이기 위하여 측정치를 (56)과 같이 변형한다.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2 l_{1DD} - \lambda_1 l_{2DD}}{\lambda_2 - \lambda_1} = &H_C\delta x + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(N_1 - N_2) \\ &+ \frac{\lambda_2 w_{1DD} - \lambda_1 w_{2DD}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \quad (56)$$

여기서 $l_{WL} = \frac{\lambda_2 l_{1DD} - \lambda_1 l_{2DD}}{\lambda_2 - \lambda_1}, w_{WL} = \frac{\lambda_2 w_{1DD} - \lambda_1 w_{2DD}}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $\lambda_{WL} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, N_{WL} = (N_1 - N_2)$ 로 정의하면 다음과 같이 간략한 형태로 나타낼 수 있다.

$$l_{WL} = H_C\delta x + \lambda_{WL} N_{WL} + w_{WL} \quad (57)$$

여기서 새로운 파장 $\lambda_{WL} = 86.25cm$ 를 확장파장이라고 부르며, 측정치를 변형하는 과정에서 측정잡음의 평균은 $E(w_{WL}) = 0$, 공분산은 (58)이 된다.

$$Q_{WL} = E(w_{WL} w_{WL}^T) = \frac{\lambda_2^2\sigma_{\Psi 1}^2 + \lambda_1^2\sigma_{\Psi 2}^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} Q_{DD} \quad (58)$$

(57)과 (58)을 이용하여 위치를 구할 수 있으며 그 때의 공분산은 다음과 같다.

$$\operatorname{cov}(\delta\hat{x}) = \frac{\lambda_2^2\sigma_{\Psi 1}^2 + \lambda_1^2\sigma_{\Psi 2}^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1} \quad (59)$$

여기서 RPDOP를 $\sqrt{tr(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}}$ 으로 정의하면 이는 (44)와 일치한다. 그러나 이때 측정 오차는 $\sigma_{Wide} = \sqrt{(\lambda_2^2\sigma_{\Psi 1}^2 + \lambda_1^2\sigma_{\Psi 2}^2)/(\lambda_2 - \lambda_1)^2}$ 가 되며 최종 위치 오차는 둘의 곱으로 나타난다. 만약 $\sigma_{\Psi 1} = \sigma_{\Psi 2}$ 라면

$\sigma_{Wide} = \sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_1^2)/(\lambda_2-\lambda_1)^2}\sigma_{\Psi1} = 5.7373\sigma_{\Psi1}$ 가 되며 이는 (57)을 이용하여 위치를 구하는 것이 불리함을 나타낸다.

일반적인 1% 측정 오차를 가정하여 (53)을 이용하면 (59)는 다음과 같이 변형된다.

$$\mathrm{cov}(\delta\hat{x}) = \frac{2\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}\sigma_{\Psi1}^2 \tag{60}$$

(60)을 이용하여 RPDOP를 정의하면 (61)이 되며 이 경우 위치 오차는 DD_RPDOP_{Wide} 와 측정 잡음 $\sigma_{\Psi1}$의 곱으로 나타난다.

$$\begin{aligned} DD\_RPDOP_{Wide} &= \sqrt{\frac{2\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{2\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}} \times DD\_RPDOP = 2\sqrt{\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}} \times PDOP \end{aligned} \tag{61}$$

여기서 $\sqrt{2\lambda_2^2/(\lambda_1-\lambda_2)^2}$ =6.4006임을 감안하면 확장 파장 측정치를 이용하여 위치를 구하면 L1 단일 주파수를 이용하여 위치를 구하는 것이나 L1, L2 독립 측정치를 이용하여 위치를 구하는 것에 비하여 오차가 증폭됨을 알 수 있다.

3. 축소 파장 법에서의 오차해석

축소파장기법에서도 확장파장기법에서와 비슷한 방법으로 주어진 측정치를 다음과 같이 변형한다.

$$\frac{\lambda_2 l_{1DD}+\lambda_1 l_{2DD}}{\lambda_2+\lambda_1} = H_C\delta x + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_1}(N_1+N_2) + \frac{\lambda_2 w_{1DD}+\lambda_1 w_{2DD}}{\lambda_2+\lambda_1} \tag{62}$$

여기서 $\lambda_{NL} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_1}$, $N_{NL} = (N_1+N_2)$, $l_{NL} = \frac{\lambda_2 l_{1DD}+\lambda_1 l_{2DD}}{\lambda_2+\lambda_1}$, $w_{NL} = \frac{\lambda_2 w_{1DD}+\lambda_1 w_{2DD}}{\lambda_2+\lambda_1}$ 로 정의하면 다음과 같은 간단한 형태로 나타낼 수 있다.

$$l_{NL} = H_C\delta x + \lambda_{NL}N_{NL} + w_{NL} \tag{63}$$

여기서 새로운 파장 $\lambda_{NL} = 10.70cm$ 를 축소파장이라고 부르며, 측정잡음의 평균은 $E(w_{NL}) = 0$, 공분산은 다음과 같이 나타난다.

$$Q_{NL} = E(w_{NL}w_{NL}^T) = \frac{\lambda_2^2\sigma_{\Psi1}^2+\lambda_1^2\sigma_{\Psi2}^2}{(\lambda_2+\lambda_1)^2}Q_{DD} \tag{64}$$

(63)과 (64)를 이용하여 위치를 구할 수 있으며 그 때의 공분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{cov}(\delta\hat{x}) = \frac{\lambda_2^2\sigma_{\Psi1}^2+\lambda_1^2\sigma_{\Psi2}^2}{(\lambda_2+\lambda_1)^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1} \tag{65}$$

여기서 RPDOP를 $\sqrt{tr(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}}$ 으로 정의하면 이는 (44)와 일치한다. 그러나 이때 측정 오차는 $\sigma_{Wide} = \sqrt{(\lambda_2^2\sigma_{\Psi1}^2+\lambda_1^2\sigma_{\Psi2}^2)/(\lambda_2+\lambda_1)^2}$ 가 되며 최종 위치 오차는 둘의 곱으로 나타난다. 만약 $\sigma_{\Psi1} = \sigma_{\Psi2}$ 라면 $\sigma_{Wide} = \sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_1^2)/(\lambda_2+\lambda_1)^2}\sigma_{\Psi1} = 0.7125\sigma_{\Psi1}$ 가 되며 이는 (63)을 이용하여 위치를 구하는 것이 유리함을 나타낸다.

일반적인 1% 측정 오차를 가정하여 (53)을 이용하면 (65)는 다음과 같이 변형된다.

$$\mathrm{cov}(\delta\hat{x}) = \frac{2\lambda_2^2}{(\lambda_2+\lambda_1)^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}\sigma_{\Psi1}^2 \tag{66}$$

(66)를 이용하여 RPDOP를 정의하면 (67)이 되며 이 경우 측정 잡음은 $\sigma_{\Psi1}$로 두고 해석할 수 있다.

$$\begin{aligned} DD\_RPDOP_{Narrow} &= \sqrt{\frac{2\lambda_2^2}{(\lambda_2+\lambda_1)^2}(H_C^T Q_{DD}^{-1} H_C)^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{2\lambda_2^2}{(\lambda_2+\lambda_1)^2}} \times DD\_RPDOP = 2\sqrt{\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2+\lambda_1)^2}} \times PDOP \end{aligned} \tag{67}$$

여기서 $\sqrt{2\lambda_2^2/(\lambda_1+\lambda_2)^2}$ =0.7949임을 감안하면 축소 파장 측정치를 이용하여 위치를 구하는 것이 오차의 증폭이 최소화 됨을 알 수 있다.

이상에서 이중 주파수 수신기를 이용하는 경우 효율적인 미지 정수의 검색을 위해서는 확장 파장 측정치 혹은 L1, L2 독립 측정치를 이용하는 것이 유리하지만 최종 위치를 구하기 위해서는 축소 파장 측정치를 이용하는 것이 유리함을 알 수 있다. 즉 미지 정수의 검색이 완료된 후에 다시 축소 파장 측정치에서의 미지정수를 결정하고 이를 이용하여 최종 위치를 구하는 것이 가장 위치의 정확도를 향상시키는 방법이 될 것이다.

표 1. 측정치의 처리 방법에 따른 오차 해석.
Table 1. An error analysis of.GPS.

위치 결정 기법	처리 방법	위치(시각) 오차($XDOP\times\sigma$)
절대위치(단일 주파수 수신기)	시각 정보 없음	$GDOP = \sqrt{PDOP^2+TDOP^2}$
	외부 시각 정보 추가	$PDOP\|_{cB} \le PDOP,\ if\ \frac{\sigma_{cB}}{\sigma} \le TDOP$
상대위치 결정 (단일 주파수 수신기)	단일 차분(별도 수신기 사용)	$SD\_RGDOP = \sqrt{2}\times GDOP$
	단일 차분 (1PPS 사용)	$SD\_RPDOP\|_{cB} = \sqrt{2}\times PDOP\|_{cB}$
	단일 차분(같은 발진기 사용)	$SD\_RPDOP\|_{com} \le SD\_RPDOP\|_{cB}$
	이중 차분	$DD\_RPDOP = \sqrt{2}\times PDOP$
상대위치 결정 (이중 주파수 수신기)	L1, L2 독립법	$DD\_RPDOP_{L1L2} = 2\sqrt{\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\times PDOP$
	확장 파장법	$DD\_RPDOP_{Wide} = 2\sqrt{\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}}\times PDOP$
	축소 파장법	$DD\_RPDOP_{Narrow} = 2\sqrt{\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}}\times PDOP$

본 논문에서 다룬 오차 해석의 결과를 표 1에 정리하였다. 표에서 σ 는 코드 혹은 L1반송파 위상을 이용하는 경우 의사거리 측정 잡음의 표준 편차를, σ_{cB} 는 외부 시각 정보 오차의 표준 편차를 각각 나타낸다. 이중 주파수 수신기를 사용하는 경우 L1, L2 반송파는 1%의 해상도로 측정할 수 있다고 가정하였다.

V. 결론

본 논문에서는 GPS를 이용하여 위치 및 시각을 구하는 방법에 따른 오차를 해석하였다. 먼저 절대위치 결정과정에서의 구해진 위치와 시각의 정확도를 나타내는 척도인 GDOP, PDOP 및 TDOP와의 관계를 유도하였으며 이로부터 수신기 외부에 별도의 시계를 사용하여 위치를 구하는 것이 수신기 시계오차와 위치를 동시에 추정하는 방법에 비하여 항상 나은 성능을 주지 않는다는 것을 밝혔다. 또한 별도의 시계를 사용하는 것이 유리한 조건을 유도하였으며, 위치오차와 시계오차가 분리되는 조건을 제시하였다.

추가로 단일 차분 측정치를 이용한 상대위치 결정과정에서의 RGDOP, RPDOP와 절대위치 결정과정에서의 GDOP, PDOP와의 관계를 유도하였다. 이로부터 단일 차분을 이용하는 경우 두 수신기가 같은 발진기를 이용하여 동기를 유지하는 것이 가장 나은 성능을 제공할 수 있음을 밝혔다. 이중 차분 측정치를 이용하는 경우 RGDOP와 PDOP의 관계에서 수신기 시계오차는 영향을 주지 않음을 보였다.

또한 이중 주파수 수신기를 사용하는 경우 RPDOP의 크기는 단일 주파수 수신기를 사용하는 경우와 같으나 측정 오차의 크기가 변화한 것으로 해석할 수도 있으며, 측정 오차의 크기는 일정하지만 RPDOP의 크기가 변화한 것으로도 해석할 수 있었다. 해석의 결과 축소 파장 측정치를 이용하여 최종 위치를 구하는 것이 가장 유리함을 보였다.

이상의 결과는 GPS를 이용하여 구해진 위치 및 시각의 정확도 해석뿐 아니라 수신기의 설계에도 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] B. W. Parkinson and J. J. Spilker Jr., *et al.*, *Global Positioning System: Theory and Applications,* vol. 1, AIAA, 1996.

[2] D. B Wolfe, C. L. Judy, E. L. Haukkala, and D. J. Godfrey, "Implementing and engineering an NDGPS network in the united states", *Proc. of ION GPS 2000,* Salt Lake City, USA. Sept., 2000.

[3] 박찬식, 김일선, 지규인, 이장규, "GPS 위치결정 오차의 평가척도 사이의 관계", 제어・자동화・시스템공학회지, 4권, 2호, 1998.

[4] G. M. Siouris, *Aerospace Avionics Systems - A Modern Synthesis,* Academic Press, San Diego, fornia, USA, 1993.

[5] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins, *Global Positioning System : Theory and Practice,* Springer-Verlag, Wien, Austria, 1993.

[6] C. Park and I. Kim, "Comments on 'Relationships between dilution of precision for point positioning and for relative positioning with GPS'", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronics Systems,* vol. 36, no. 1, pp. 315-316, 2000.

[7] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations,* The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, USA, 1987.

[8] A. Brown, "Extended differential GPS". *Global Positioning System* vol. IV, The Institute of Navigation. Washington, D.C., pp. 107-128, 1997.

[9] A. J. van Dierendonck, P. Fenton, and T. Ford, "Theory and performance of narrow correlator technology in GPS Receiver", *NAVIGATION: Journal of The Institute of Navigation,* 39, 3, pp. 265-283, 1992.

[10] R. van Nee, J. Siereveld, P. Fenton, and B. Townsend, "The multipath estimating delay lock Loop: Approaching theoretical accuracy limits", *Proc. IEEE Position, Location and Navigation Symposium,* pp. 246-251, April, 1994.

[11] 박찬식, 지규인, 이영재, 이장규, "GPS 반송파 위상을 이용한 정밀 자세 측정", 제어・자동화・시스템공학회지, 3권, 6호, 1997.

[12] 손석보, 박찬식, 이상정, "GPS 이중 주파수 측정치를 이용한 효율적인 실시간 미지정수 결정기법", 제어자동화 시스템공학회지, 6권 8호, 2000.

박 찬 식

1984년 서울대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 1986년 동 대학원 졸업(공학석사). 1997년 동 대학원 졸업(공학박사). 1984~1997 삼성전자 수석연구원. 1997~현재 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 조교수. 관심분야는 무선 항법, GPS 수신기, 미지정수 결정 기법, 실내 측위.