

선형 축소차수 동적 관측자를 사용한 확장된 상태 추정 방법

Extended State Estimation Method Using Linear Reduced-Order Dynamic Observers

박종구
(Jong-Koo Park)

Abstract : In this paper, a new reduced-order dynamic observer method is presented. Two types of observers are pronounced, namely, the model based reduced-order dynamic observer and the Luenburger type reduced-order dynamic observer. Useful design algorithms are also provided for each structure. The essential features of the proposed observer design methods are addressed to be qualified as effective observers. The proposed method clarifies the duality between the controller and observer designs.

Keywords : observer, state estimation, reduced-order, output feedback control

I. 서론

다변수 제어 시스템을 효과적으로 다루기 위한 목적으로 연구된 현대의 고급 제어이론들은 다양한 제어기 설계 기법을 도출하게 되었으며, 고전적인 제어 기법들에서는 처리하기 어려웠던 문제까지 다룰 수 있게 되었다. 대표적인 현대 제어 기법으로는 H_2 , H^∞ 제어기 설계법을 들 수 있다[1]-[3]. 모델의 불확실성, 외란의 영향 감소, 견실한 안정도 및 성능의 요건 충족 등이 그러한 견실 설계 기법들로써 고려할 수 있는 설계 요소들이다.

많은 연구자들에 의하여 관측자 이론이 심도있게 연구되었고 그 결과 다양해졌지만[4]-[6], 최근까지 여러 관측자들의 기본적인 구조는 전통적인 개념, 즉 '관측자 설계 절차는 상태 되먹임 설계의 이원적인 것이다.'라는 고전적인 설계 구조에서 벗어나지 못하고 있었다. 이러한 인습적인 관측자 설계 기법의 제한성을 극복하는 방법으로, 본 저자는 동적 관측자라고 명명한 새로운 관측자 구조를 제안하였는데, 이는 출력 되먹임 제어기 설계 기법을 관측자 설계에 이용하는 새로운 관측자 설계 기법이다[7][8].

그런데 출력 측정치에 그다지 심한 측정 잡음이 관계되지 않은 비교적 정확한 값이라면, 추정하려는 상태 변수의 개수를 n 개라 할 때, n 개의 상태 변수 모두를 추정하는 것은 실용적이지 못하다. 이 경우에는 출력 측정치를 활용한 축소차수 관측자가 더 바람직하다. 이때 출력의 숫자가 상당할 경우, 축소차수 관측자는 전차수 관측자에 비하여 시스템 차수가 대폭 줄어들게 된다.

본 논문에서는 축소차수 관측자를 설계하는데 있어서, 발전된 현대의 출력 되먹임 제어기 설계 기법을 이용할 수 있는 대안적인 새로운 축소차수 관측자 설계 기법을 제안한다. 기존의 축소차수 관측자 설계 기법에서는 실제 출력과 추정된 상태로 계산되는 추정 출력 사이의 오차에 대한 상수 관측자 이득 행렬을 적절히 설계하는 것이었다면, 제안된 방법은 해당 오차를 관측자에 반영시 동특성을 갖는

시스템을 통과시키는 구조를 갖는다. 즉, 제안된 방법은 기존의 축소차수 관측자 설계 기법을 확장한 것으로 파악할 수 있으며, 종래의 것과 구별을 위하여 '축소차수 동적 관측자'라 명명하였다. 본 논문에서는 또한 유효한 설계 알고리즘을 제시하고, 이의 특성에 대한 해석을 할 것이다. 결과적으로 제시된 방법대로 축소차수 동적 관측자를 설계하는 경우, 관측자로서 갖추어야할 수렴 특성 및 분리 설계 가능 성질 등을 모두 만족시킨다는 것을 보인다.

2절에서는 문제 구성을 위한 시스템 기술 및 이에 따른 관측자 설계 목표에 대해 언급한다. 3절에서는 표준형 동적 관측자의 설계 지침을 제시하고 그의 특성을 분석한 결과를 기술하였다. Luenburger형 동적 관측자는 4절에서 다루었다. 5절에서는 제시한 축소차수 동적관측자의 효용성을 시뮬레이션을 통하여 예시한다. 마지막으로 6절에 결론을 실었다.

II. 문제의 설정

다음과 같은 선형 시불변 시스템을 고려하자.

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태, $u(t) \in R^p$ 는 제어 입력, $y(t) \in R^q$ 는 측정된 출력, 그리고 상수행렬 A, B, C, D 는 적절한 차원을 갖는다.

이러한 시스템에서 측정된 출력에 잡음이나 외란이 작용되지 않으며 행렬 C 는 전계수(full row rank) 행렬 ($\rho(C) = q$)이라 가정한다. 그러면 유사변환에 의하여 시스템은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\bar{S} : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t), \\ y(t) = [I_q \ 0] \bar{x}(t) + Du(t) \\ \quad = \bar{x}_1(t) + Du(t), \\ \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $\bar{x}(t) (= (\bar{x}_1^T(t), \bar{x}_2^T(t))^T) = Mx(t)$ 또는 $x(t) = N\bar{x}(t) (= M^{-1}\bar{x}(t))$ 이다. $\bar{x}_1(t)$ 는 $\bar{x}(t)$ 의 첫

음 q 개의 원소로 구성되며, $\bar{x}_2(t)$ 는 $\bar{x}(t)$ 의 나머지 원소로 구성된다. 행렬 $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{21}, \bar{A}_{22}, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ 는 적절히 분할되어 있다고 가정한다. 행렬 M 은 $M=[C^T R^T]^T$ 로 정의된 유사변환 행렬이다. 여기서 행렬 R 은 $(n-q) \times n$ 차원으로 행렬 M 이 비특이행렬로 보장되는 범위에서 임의의 행렬이다. 그리고 행렬 $N(=[N_1 N_2])$ 은 행렬 M 의 역행렬이다.

위의 (2)로부터 $\bar{x}_1(t)=y(t)-Du(t)$ 이므로, 상태 $\bar{x}_2(t)$ 만 추정하면 된다. 앞으로 본 논문에서는 불필요한 수학적 복잡성을 피하기 위하여, 시스템 \bar{S} 가 추정하려고 하는 궁극적인 시스템이라 가정한다. 식 $\bar{x}_1(t)=y(t)-Du(t)$ 를 이용하여 \bar{S} 를 다음과 같이 재 서술할 수 있다.

$$\dot{y}(t) = \bar{A}_{11}y(t) + \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t) + (\bar{B}_1 - \bar{A}_{11}D)u(t) + D\dot{u}(t), \quad (3)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_{22}\bar{x}_2(t) + \bar{A}_{21}y(t) + (\bar{B}_2 - \bar{A}_{21}D)u(t). \quad (4)$$

이때 다음을 정의하자.

$$\bar{u}(t) := \bar{A}_{21}y(t) + (\bar{B}_2 - \bar{A}_{21}D)u(t), \quad (5)$$

$$\bar{y}(t) := \dot{y}(t) - \bar{A}_{11}y(t) - (\bar{B}_1 - \bar{A}_{11}D)u(t) - D\dot{u}(t). \quad (6)$$

그러면 (3), (4)는 다음과 같이 간결하게 표현할 수 있다.

$$\bar{S}_c : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_{22}\bar{x}_2(t) + \bar{u}(t), \\ y(t) = \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t). \end{cases} \quad (7)$$

여기서 정의된 신호 $\bar{u}(t), \bar{y}(t)$ 는 이미 알고있는 신호 $u(t), y(t)$ 들로 구성되어 있음을 주목하라. 이제 동적 시스템 (7)이 검출가능(detectable)하다면, 상태 $\bar{x}_2(t)$ 를 위한 관측자를 구성할 수 있다. 이에 대해 다음과 같은 알려진 내용이 있다.

보조정리 1 [9] : (1)에서 (C, A) 쌍이 검출가능하면 (7)에서 $(\bar{A}_{12}, \bar{A}_{22})$ 쌍 역시 검출가능하고, 그 역도 성립한다.

이제 다음 절부터는 (7)에 주어진 시스템에 대한 관측자 설계를 다루도록 한다.

III. 표준형 축소차수 동적 관측자

본 절에서는 선형 시불변 시스템에 대한 표준형 축소차수 동적 관측자를 제안하고 그 특성을 해석한다. 축소차수 동적 관측자의 추정 오차식을 기술하고 분리 설계 가능 성질(separation property)에 대해서도 언급한다.

본 논문에서 제안되는 축소차수 동적 관측자는 다음과 같이 기술된다.

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = \bar{A}_{22}\hat{x}_2(t) + \bar{u}(t) + \xi_r(t), \quad (8)$$

여기서 $\xi_r(t) \in R^{n-q}$ 는 보상 신호로서, 그것의 동특성은 다음과 같다.

$$\dot{x}_r(t) = \Phi_r x_r(t) + \Gamma_r \xi_r(t), \quad (9)$$

$$\xi_r(t) = \Sigma_r x_r(t) + \Lambda_r \xi_r(t), \quad (10)$$

$$\xi_r(t) = \bar{y}(t) - \bar{A}_{12}\hat{x}_2(t), \quad (11)$$

여기서 $x_r(t) \in R^q$ 는 부가적인 상태변수이고, 상수행렬 $\Phi_r, \Gamma_r, \Sigma_r, \Lambda_r$ 은 적절한 차원을 갖는다.

축소차수 동적 관측자의 전체적인 동특성은 다음과 같이 재 서술할 수 있다.

$$RDO : \dot{x}_{ro}(t) = A_{ro}x_{ro}(t) + B_{ro}\bar{y}(t) + C_{ro}\bar{u}(t), \quad (12)$$

여기서 $x_{ro}(t) = (x_r^T(t), \hat{x}_2^T(t))^T$ 이고

$$A_{ro} := \begin{bmatrix} \Phi_r & -\Gamma_r \bar{A}_{12} \\ \Sigma_r & \bar{A}_{22} - \Lambda_r \bar{A}_{12} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B_{ro} := \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ \Lambda_r \end{bmatrix}, \quad C_{ro} := \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-q} \end{bmatrix}$$

이다. 이 형태는 $\bar{y}(t)$ 항이 $y(t), u(t)$ 의 미분치를 포함하므로 실제적이지 못하다. 이는 다음과 같은 변수를 도입함으로써 해결가능하다.

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} := x_{ro}(t) - B_{ro}[y(t) - Du(t)]. \quad (14)$$

그러면 (12)는

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_{ro}\{z(t) + B_{ro}[y(t) - Du(t)]\} \\ &\quad - B_{ro}[\bar{A}_{11}y(t) + (\bar{B}_1 - \bar{A}_{11}D)u(t)] \\ &\quad + C_{ro}[\bar{A}_{21}y(t) + (\bar{B}_2 - \bar{A}_{21}D)u(t)] \\ &= A_{ro}z(t) + (A_{ro}B_{ro} + C_{ro}\bar{A}_{21} - B_{ro}\bar{A}_{11})y(t) \\ &\quad + [C_{ro}(\bar{B}_2 - \bar{A}_{21}D) \\ &\quad - A_{ro}B_{ro}D - B_{ro}(\bar{B}_1 - \bar{A}_{11}D)]u(t) \end{aligned} \quad (15)$$

으로 표현되며, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{z}(t) = A_z z(t) + B_z y(t) + C_z u(t), \quad (16)$$

여기서 $A_z := A_{ro}$ 이고

$$B_z = \begin{bmatrix} B_{z,1} \\ B_{z,2} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$C_z = \begin{bmatrix} C_{z,1} \\ C_{z,2} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$B_{z,1} = \Phi_r \Gamma_r - \Gamma_r \bar{A}_{12} \Lambda_r - \Gamma_r \bar{A}_{11},$$

$$B_{z,2} = \Sigma_r \Gamma_r + (\bar{A}_{22} - \Lambda_r \bar{A}_{12}) \Lambda_r + (\bar{A}_{21} - \Lambda_r \bar{A}_{11}),$$

$$C_{z,1} = -\Phi_r \Gamma_r D + \Gamma_r \bar{A}_{12} \Lambda_r D - \Gamma_r (\bar{B}_1 - \bar{A}_{11} D),$$

$$C_{z,2} = (\bar{B}_2 - \bar{A}_{21} D) - \Sigma_r \Gamma_r D - (\bar{A}_{22} - \Lambda_r \bar{A}_{12}) \Lambda_r D - \Lambda_r (\bar{B}_1 - \bar{A}_{11} D)$$

이다.

$L_r(s) = \Lambda_r + \Sigma_r (sI - \Phi_r)^{-1} \Gamma_r$ 라 할 때, 축소차수 동적 관측자의 설계 목적을 다음과 같이 기술할 수 있다. 초기 시간 t_0 에서의 초기 상태 $\hat{x}_2(t_0)$ 와 $\bar{x}_2(t_0)$ 사이에 오차가 크다고 하더라도 궁극적으로 $\hat{x}_2(t_0)$ 가 $\bar{x}_2(t_0)$ 에 수렴하며, 그때의 수렴 특성이 만족할만 하도록 $L_r(s)$

의 매개변수들을 설계하도록 한다.

제안된 축소차수 동적 관측자 구조에 있어서, 이를 효과적으로 설계하는 여러 방법이 있을 수 있다. 여기서 다음과 같은 설계 방법을 제시하도록 한다.

알고리즘 1

1단계 : 다음과 같이 기술된 가상의 시스템을 고려하자.

$$S_v : \begin{cases} \dot{x}_v(t) = \bar{A}_{22}x_v(t) + I_{n-q}u_v(t), \\ y_v(t) = \bar{A}_{12}x_v(t), \end{cases} \quad (19)$$

여기서 $x_v(t)$, $u_v(t)$, $y_v(t)$ 는 적절한 벡터 차수를 갖는다. 이때 임의의 효과적인 선형 제어기 설계법을 적용하여 다음과 같은 형태의 동적 제어기를 설계한다.

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e_v(t), \\ u_v(t) = C_c x_c(t) + D_c e_v(t), \\ e_v(t) = r_v(t) - y_v(t), \end{cases} \quad (20)$$

여기서 $r_v(t)$ 는 가상 시스템의 기준 입력이다. 제어기는 전체 폐루프 시스템이 안정하고 추종 성능이 만족하도록 설계하도록 한다. 위의 (19)에 주어진 가상 시스템은 항상 안정가능(stabilizable)하므로, 이와 같은 제어기는 구성 가능하다.

그러면 폐루프 시스템의 동특성은

$$CS_v : \dot{x}(t) = A x(t) + B r_v(t) \quad (21)$$

이고, 여기서 $x(t) := (x_c^T(t), x_v^T(t))^T$ 이고

$$A := \begin{bmatrix} A_c & -B_c \bar{A}_{12} \\ C_c & \bar{A}_{22} - D_c \bar{A}_{12} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$B := \begin{bmatrix} B_c \\ D_c \end{bmatrix} \quad (23)$$

이다.

2단계 : 그 다음 축소차수 동적 관측자의 매개변수들 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_r & \Gamma_r \\ \dots & \dots \\ \Sigma_r & \Lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ \dots & \dots \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \quad (24)$$

알고리즘 1에 제시된 대로 축소차수 동적 관측자가 설계된 경우, 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 1 : (2)에 기술된 검출가능한 시스템 \bar{S} 에서, 축소차수 동적관측자가 알고리즘 1과 같이 설계되었다고 하자. 그러면 RDO의 상태 $\hat{x}_2(t)$ 는 시간이 경과함에 따라 $\bar{x}_2(t)$ 에 궁극적으로 수렴하며 $x_r(t)$ 는 0으로 소멸되는 관측자로서 작용한다. 또한 $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1^T(t), \bar{x}_2^T(t))^T$ 의 추정치는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} I_q & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_r & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) - Du(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

여기서 $z(t)$ 의 동특성은 (16)에 기술되어 있다.

증명 : 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2(t) &:= \bar{x}_2(t) - \{z_2(t) + \Lambda_r[y(t) - Du(t)]\} \\ &= \bar{x}_2(t) - \hat{x}_2(t). \end{aligned} \quad (26)$$

그러면 (2), (5), (6), (7)을 참조하여 (12)를 다음과 같이 서술할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= \Phi_r x_r(t) - \Gamma_r \bar{A}_{12} \hat{x}_2(t) + \Gamma_r \bar{A}_{12} \bar{x}_2(t) \\ &= \Phi_r x_r(t) + \Gamma_r \bar{A}_{12} \tilde{x}_2(t), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2(t) &= \hat{x}_2(t) - \hat{x}_2(t) \\ &= [\bar{A}_{21} \bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22} \bar{x}_2(t) + \bar{B}_2 u(t)] \\ &\quad - \{\Sigma_r x_r(t) + (\bar{A}_{22} - \Lambda_r \bar{A}_{12}) \hat{x}_2(t) \\ &\quad + \Lambda_r [\bar{A}_{12} \bar{x}_2(t) + \bar{A}_{21} \bar{x}_1(t) \\ &\quad + Du(t)] + (\bar{B}_2 - \bar{A}_{21} D) u(t)\} \\ &= -\Sigma_r x_r(t) + (\bar{A}_{22} - \Lambda_r \bar{A}_{12}) \tilde{x}_2(t). \end{aligned} \quad (28)$$

즉,

$$\dot{x}_{re}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_r & \Gamma_r \bar{A}_{12} \\ -\Sigma_r & \bar{A}_{22} - \Lambda_r \bar{A}_{12} \end{bmatrix} x_{re}(t) \quad (29)$$

이고, 여기서 $x_{re}(t) := (x_r^T(t), \tilde{x}_2^T(t))^T$ 이다. 이때 $\bar{x}_{re}(t) := V x_{re}(t)$ 라 하자, 여기서 V 는 다음과 같이 주어진 유사변환행렬이다.

$$V = \begin{bmatrix} -I_l & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

그러면 (29)를 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\dot{\bar{x}}_{re}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_r & -\Gamma_r \bar{A}_{12} \\ \Sigma_r & \bar{A}_{22} - \Lambda_r \bar{A}_{12} \end{bmatrix} \bar{x}_{re}(t). \quad (31)$$

(24)를 (31)에 대입하면

$$\dot{\bar{x}}_{re}(t) = A_{rm} \bar{x}_{re}(t) \quad (32)$$

를 얻는다. 여기서 A_{rm} 은 (22)에 주어지 있다. 알고리즘 1에 의하여 A_{rm} 은 안정행렬이므로 임의의 $\bar{x}_2(t_0)$, $x_r(t_0)$ 일지라도 궁극적으로 $\bar{x}_{re}(t) \rightarrow 0$ 이게 된다. 이는 궁극적으로 $\hat{x}_2(t) = z_2(t) + \Lambda_r[y(t) - Du(t)] \rightarrow \bar{x}_2(t)$ 이고 $x_r(t) \rightarrow 0$ 임을 의미한다. 또한 $\hat{x}_1(t) = \bar{x}_1(t) = y(t) - Du(t)$ 와 $\hat{x}_2(t) = z_2(t) + \Lambda_r[y(t) - Du(t)]$ 를 결합함으로써 (25)를 얻을 수 있다. ■

알고리즘 1에서 $r_v(t) = 0$ 이라면, 제어기 설계 문제는 레귤레이터 설계 문제가 된다. 이 경우 전체 시스템 방정식 CS_v 는 축소차수 동적 관측자 방정식과 일치하게 된다. 따라서 축소차수 동적 관측자 설계 문제는 시스템 S_v 에 대한 레귤레이터 설계 문제로 파악할 수 있다.

이제 제시된 축소차수 동적 관측자 기법의 분리 설계 가능 성질 충족 여부 및 기준 입력에서 출력까지의 전달함수 행렬의 특성 등에 대한 해석을 하도록 한다. 우선 다음 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) - x(t) &= N [\hat{x}(t) - \bar{x}(t)] \\ &= [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) - \bar{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) - \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= N_2 \tilde{x}_2(t). \end{aligned} \quad (33)$$

이때 다음과 같은 상태 되먹임 제어를 고려하자.

$$u(t) = r(t) - K\hat{x}(t), \quad (34)$$

여기서 K 는 되먹임 이득이다. (34)를 (1)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B[r(t) - K\hat{x}(t)] \\ &= (A - BK)\hat{x}(t) - BKN_2 \tilde{x}_2(t) + Br(t), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= C\hat{x}(t) + D[r(t) - K\hat{x}(t)] \\ &= (C - DK)\hat{x}(t) - DKN_2 \tilde{x}_2(t) + Dr(t). \end{aligned} \quad (36)$$

(12), (35), (36)으로부터, 축소차수 동적 관측자 기반 상태 되먹임 시스템의 전체 동특성은

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{re}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & \vdots & 0 & -BKN_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & A_{ro} & \\ \vdots & B \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{x}_{re}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t), \quad (37)$$

$$y(t) = [C - DK \ 0 \ -DKN_2] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{x}_{re}(t) \end{bmatrix} + Dr(t) \quad (38)$$

와 같다. 따라서 축소차수 동적 관측자에 대한 다음과 같은 정리들을 말할 수 있다.

정리 2 : 축소차수 동적 관측자와 상태 되먹임 제어기는 서로 독립적으로 설계 가능하며, 전체 폐루프 시스템의 고유치(eigenvalue)는 축소차수 동적 관측자와 상태 되먹임 제어기의 고유치의 합이 된다.

정리 3 : 기준 입력으로부터 출력으로의 전달함수 행렬에서 축소차수 동적 관측자는 소거되어 영향을 미치지 않는다. 전달함수 행렬은 $G(s) = (C - DK)(sI_n - A + BK)^{-1} B + D$ 이다.

정리 1, 2, 3으로부터 제안된 축소차수 동적 관측자는 관측자로서 갖추어야 할 주요 성질을 모두 충족시킨다는 것을 알 수 있다. 축소차수 동적 관측자는 알고리즘 1에 제시된 바와 같이 최근에 발달된 제어기 설계 기법을 그대로 적용할 수 있으므로 여러 설계 목적에 부합하는 관측자를 설계하기가 용이하므로, 그것의 활용도는 크다고 할 수 있다.

IV. Luenburger형 축소차수 동적 관측자

다음과 같이 기술된 $(n - q + l)$ 차의 동적 시스템을 고려하자.

$$LRDO : \dot{z}_r(t) = \bar{F}z_r(t) + \bar{G}y(t) + \bar{H}u(t), \quad (39)$$

여기서 $z_r(t) = (z_{1r}^T(t), z_{2r}^T(t))^T$, $z_{1r}(t) \in R^l$, $z_{2r}(t) \in R^{n-q}$ 이고

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 & \bar{F}_4 \end{bmatrix}, \bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{bmatrix}, \bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

로 정의되며, $\bar{F}_i, \bar{G}_i, \bar{H}_i$ 는 적절히 분할되어 있는 행렬이다.

(2)에 기술된 시스템 \bar{S} 에서, $T_4 \bar{x}_2(t)$ 를 추정하고자 한다고 가정한다. 여기서 T_4 는 $(n - q) \times (n - q)$ 차의 비특이 행렬이다. 이를 바탕으로 아래와 같이 구성된 $(n - q + l) \times n$ 차의 행렬을 고려하자.

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

여기서 T_1, T_2, T_3 는 행렬 T_4 에 관계된 부가 행렬로서 적절한 차수를 갖고 있다. 뒤에 LRDO가 의미있는 축소차수 동적 관측자이기 위한 T_1, T_2, T_3 의 합당한 선택에 대해 언급하겠다.

정리 4 : 위의 (2)에 기술된 검출가능한 시스템 \bar{S} 를 고려하자. 이때 (41)에 주어진 임의의 $(n - q + l) \times n$ 차 전계수(full row rank) 상수행렬 T 와 임의의 $\bar{x}(t_0), z_r(t_0), u(t)$ 에 대하여 다음과 같은 조건을 만족시킨다면, (39)에 주어진 동특성 방정식은 궁극적으로 $z_r(t) \rightarrow T\bar{x}(t)$ 인 축소차수 동적 관측자의 역할을 한다: 1. $T\bar{A} - \bar{F}T = \bar{G}[I_q \ 0]$; 2. $\bar{H} + \bar{G}D = T\bar{B}$; 3. \bar{F} 가 안정한 고유치만을 갖는다. 그리고 그 역도 성립한다.

증명 : $\tilde{z}_{re}(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{z}_{re}(t) = z_r(t) - T\bar{x}(t), \quad (42)$$

그러면 (39)로부터

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_{re}(t) &= \bar{F}(z_{re}(t) + T\bar{x}(t)) + \bar{G}([I_q \ 0]\bar{x}(t) \\ &\quad + Du(t)) + \bar{H}u(t) - T(\bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t)) \\ &= \bar{F}z_{re}(t) + (\bar{F}T - T\bar{A} + \bar{G}[I_q \ 0])\bar{x}(t) \\ &\quad + (\bar{H} + \bar{G}D - T\bar{B})u(t) \end{aligned} \quad (43)$$

이다. 만약 조건 1에서 3까지 만족한다면, 임의의 $\bar{x}(t_0), z_{re}(t_0), u(t)$ 에 대하여 궁극적으로 $z_{re}(t) \rightarrow 0$ 이 된다. 즉 $z_r(t)$ 는 $T\bar{x}(t)$ 의 추정치가 된다. 필요 조건의 증명은 [9]을 참고하면 쉽게 해결할 수 있으므로 생략한다. ■

이와 같은 정리에 근거하여 이제 Luenburger형 축소차수 동적 관측자의 설계 알고리즘을 제시한다.

알고리즘 2

1단계 : 알고리즘 1의 1단계를 따른다.

2단계 : 주어진 $(n - q) \times (n - q)$ 차의 비특이 상수 행렬 T_4 에 대하여, (41)의 행렬 T 를 다음과 같이 구성한다.

$$T = \begin{bmatrix} -B_c & 0 \\ -T_4 D_c & T_4 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

그리고 Luenburger형 축소차수 동적 관측자의 매개변수를 아래와 같이 선택한다.

$$\begin{cases} \bar{F}_1 = A_c, \\ \bar{F}_2 = -B_c \bar{A}_{12} T_4^{-1}, \\ \bar{F}_3 = T_4 C_c, \\ \bar{F}_4 = T_4 (\bar{A}_{22} - D_c \bar{A}_{12}) T_4^{-1}, \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} \bar{G}_1 = A_c B_c - B_c (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} D_c), \\ \bar{G}_2 = T_4 [(\bar{A}_{22} - D_c \bar{A}_{12}) D_c \\ + (\bar{A}_{21} - D_c \bar{A}_{11}) + C_c D_c], \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} \bar{H}_1 = -A_c B_c D - B_c [\bar{B}_1 + (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} D_c) D], \\ \bar{H}_2 = T_4 [(\bar{B}_2 - D_c \bar{B}_1) - (\bar{A}_{21} - D_c \bar{A}_{11}) D \\ - (\bar{A}_{22} - D_c \bar{A}_{12}) D_c D - C_c D_c D]. \end{cases} \quad (47)$$

정리 5 : (2)에 기술된 검출가능한 시스템 \bar{S} 에서, Luenburger형 축소차수 동적 관측자가 임의의 $(n-q) \times (n-q)$ 차의 비특이 상수행렬 T_4 에 대하여 알고리즘 2와 같이 설계되었다고 하자. 그러면 LRDO의 상태 $z_r(t)$ 는 시간이 경과함에 따라 $T\bar{x}(t)$ 에 궁극적으로 수렴하는 관측자로서 작용한다. 게다가 본래의 상태 $\bar{x}(t)$ 의 추정치는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} I_q & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ D_c & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) - Du(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

증명 : 다음을 정의하자.

$$\bar{z}_{re}(t) := Wz_r(t), \quad (49)$$

여기서 W 는 유사변환 행렬로서 아래와 같다.

$$W = \begin{bmatrix} -I_l & 0 \\ 0 & -T_4^{-1} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

그러면 (43)은

$$\begin{aligned} & \bar{z}_{re}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 T_4 \\ T_4^{-1} \bar{F}_3 & T_4^{-1} \bar{F}_4 T_4 \end{bmatrix} \bar{z}_{re}(t) - \begin{bmatrix} \bar{E}_1 & \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 & \bar{E}_4 \end{bmatrix} \bar{x}(t) \\ & \quad - \begin{bmatrix} \bar{H}_1 + \bar{G}_1 D - T_1 \bar{B}_1 - T_2 \bar{B}_2 \\ T_4^{-1} (\bar{H}_2 + \bar{G}_2 D - T_3 \bar{B}_1 - T_4 \bar{B}_2) \end{bmatrix} u(t) \\ \bar{E}_1 &= \bar{F}_1 T_1 + \bar{F}_2 T_3 - T_1 \bar{A}_{11} - T_2 \bar{A}_{21} + \bar{G}_1 \\ \bar{E}_2 &= \bar{F}_1 T_2 + \bar{F}_2 T_4 - T_1 \bar{A}_{12} - T_2 \bar{A}_{22} \\ \bar{E}_3 &= T_4^{-1} (\bar{F}_3 T_1 + \bar{F}_4 T_3 - T_3 \bar{A}_{11} \\ & \quad - T_4 \bar{A}_{21} + \bar{G}_2) \\ \bar{E}_4 &= T_4^{-1} (\bar{F}_3 T_2 + \bar{F}_4 T_4 - T_3 \bar{A}_{12} - T_4 \bar{A}_{22}) \end{aligned} \quad (51)$$

와 같이 변환된다. 이때 (44)-(47)을 (51)에 대입하면

$$\dot{\bar{z}}_{re}(t) = A_{rm} \bar{z}_{re}(t), \quad (52)$$

를 얻는다. 여기서 A_{rm} 은 (22)에 정의되어 있다.

그러나 알고리즘 2에 의하여 A_{rm} 은 안정행렬이므로 궁극적으로 $\bar{z}_{re}(t) \rightarrow 0$ 임을 의미하며, 이는 임의의 $\bar{x}(t_0)$, $z_r(t_0)$ 에 대하여 $z_r(t) - T\bar{x}(t) \rightarrow 0$ 임을 뜻한다. 이 사실과 $\hat{\bar{x}}_1(t) = \bar{x}_1(t) = y(t) - Du(t)$ 를 결합하면, (48)을 얻을 수 있다. ■

위의 (44)-(47)과 같이 관측자의 설계 변수들이 선택된다면, 정리 4의 모든 조건을 만족시킨다. 알고리즘 2에 의하여 Luenburger형 축소차수 동적 관측자의 설계 문제는 적절한 선행 출력 되먹임 제어기 설계 문제로 전환할 수 있다.

V. 시뮬레이션 예제

다음과 같이 기술된 시스템을 고려하자[5].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [1 \ 0] x(t) = x_1(t). \end{aligned} \quad (53)$$

이 시스템의 출력 $y(t)$ 는 상태 $x_1(t)$ 를 지시하므로, 상태 $x_2(t)$ 에 대한 관측자만을 구성하도록 한다. 먼저 $y(t) = x_1(t)$ 임을 이용하여 (53)을 다시 기술하면 다음과 같다.

$$\dot{x}_2(t) = \bar{u}(t), \quad \bar{y}(t) = x_2(t), \quad (54)$$

여기서 $\bar{u}(t) = y(t) - u(t)$, $\bar{y}(t) = \dot{y}(t)$ 이다.

먼저 축소차수 정적 관측자를 설계하도록 하자. 축소차수 정적 관측자는

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(t) &= \bar{u}(t) + l(\bar{y}(t) - \hat{x}_2(t)) \\ &= -l \hat{x}_2(t) + l \bar{y}(t) + \bar{u}(t) \end{aligned} \quad (55)$$

의 형태를 갖는다. 여기서 l 은 관측자 이득으로서 관측자의 극점이 -1.5 에 위치하도록 설계되었으며, 이에 해당하는 수치는 $l=1.5$ 이다[10]. 그런데 위의 (55)는 출력 $y(t)$ 의 미분치 $\bar{y}(t) (= \dot{y}(t))$ 를 포함하므로, 이를 해결하기 위하여 $z_s(t) = \hat{x}_2(t) - l y(t)$ 로 정의되는 새로운 변수 $z_s(t)$ 를 사용하여 다시 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_s(t) &= -l z_s(t) - (l^2 - 1)y(t) - u(t) \\ &= -1.5 z_s(t) - 1.25 y(t) - u(t). \end{aligned} \quad (56)$$

$x_1(t) = y(t) = \hat{x}_1(t)$ 와 $\hat{x}_2(t) = z_s(t) + l y(t)$ 를 결합하면 원래의 플랜트 (53)에 대한 상태 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z_s(t) \end{bmatrix} \quad (57)$$

이제 대상 시스템에 대하여 본 논문에서 제시된 축소차수 동적 관측자를 설계하자. 알고리즘 1에 기술된 절차에 따라 우선 (54)에 기술된 시스템에 대하여 출력 되먹임 제어를 설계하도록 한다. 제어기는 PI 제어기를 선택하였는데, 축소차수 정적 관측자의 성능과 공정한 비교를 위해 페루프 시스템의 극점은 $-1 \pm j1$ 에 위치하도록 하였다. 이 극점의 위치는 축소차수 정적 관측자의 시정수보다 오히려 큰 값이다. 이에 해당하는 제어기는 다음과 같다.

$$K(s) = 2 + \frac{2}{s}. \quad (58)$$

따라서 알고리즘 1의 2단계에 따라 동적 관측자는 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = \bar{u}(t) + \xi_r(t), \quad (59)$$

$$\dot{z}_r(t) = \zeta_r(t), \quad (60)$$

$$\xi_r(t) = 2z_r(t) + 2\zeta_r(t), \quad (61)$$

$$\zeta_r(t) = \bar{y}(t) - \hat{x}_2(t). \quad (62)$$

이를 통합하여 다시 기술하면

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_r(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_r(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bar{y}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}(t) \quad (63)$$

이다. 이 형태 역시 출력의 미분치를 포함하므로, 다음과 같이 새로운 변수 $z(t)$ 를 정의한다.

$$z(t) := \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{x}_r(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y(t). \quad (64)$$

이를 이용하여 (63)을 다시 기술하면

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} z(t) - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (65)$$

이다. 따라서 원래의 플랜트 (53)에 대한 상태 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \quad (66)$$

추정대상 플랜트의 초기치를 $x^T(0) = (-0.6, 0.35)$ 라 가정한 상태에서 축소 차수 정적 및 동적 관측자의 상태

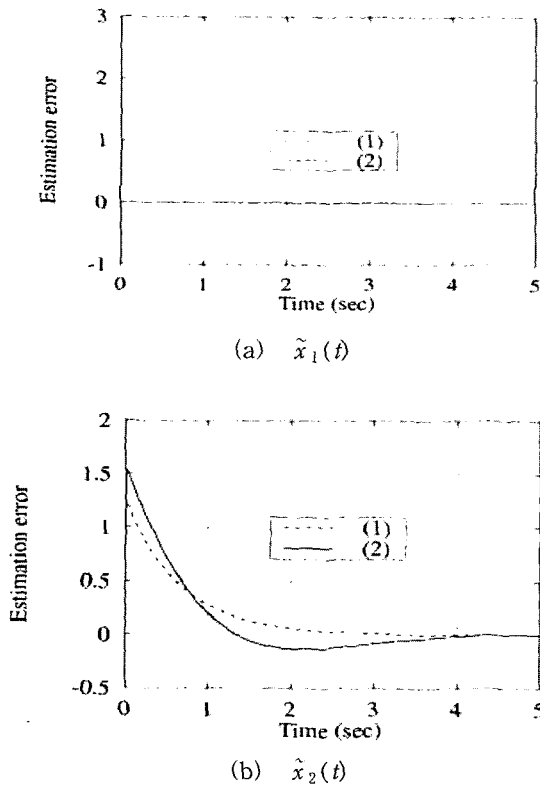


그림 1. 축소차수 정적 및 동적 관측자의 오차 응답 특성 ((1): 축소차수 정적 관측자 ($z_s(0)=0$), (2): 축소차수 동적 관측자 ($z^T(0)=(0, 0)$)).

Fig. 1. Error responses of reduced-order static and dynamic observers ((1): Reduced-order static observer ($z_s(0)=0$); (2): Reduced-order dynamic observer ($z^T(0)=(0, 0)$)).

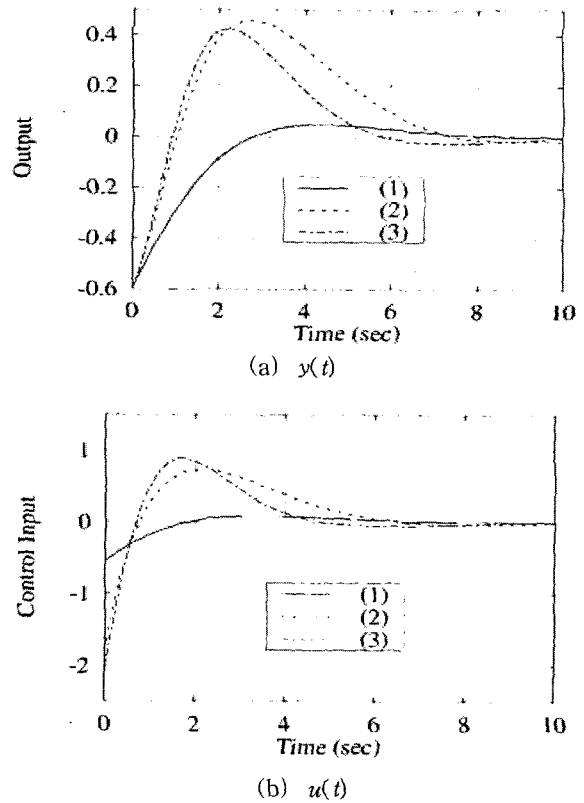


그림 2. 관측자-제어기 구조에서의 축소차수 정적 및 동적 관측자의 응답 특성 ((1): 정확한 상태 추정인 경우, (2): 축소차수 정적 관측자를 사용한 경우, (3): 축소차수 동적 관측자를 사용한 경우).

Fig. 2. Responses of reduced-order static and dynamic observers in the observer-controller structure ((1): Exact state measurement, (2): Reduced-order static observer, (3): Reduced-order dynamic observer).

추정성능을 시뮬레이션을 통해 비교해 보았다. 각각의 관측자의 초기상태는 0이라고 가정하였다. 그림 1의 점선은 축소차수 정적 관측자의 추정오차 곡선을, 실선은 축소차수 동적 관측자의 추정오차 곡선을 도시한 것이다. 상태 x_1 의 경우 출력 y 에 해당되므로 상태추정오차는 0이다. 상태 x_2 에 대한 추정오차 곡선을 보면 축소차수 동적 관측자로 도입한 경우의 응답특성이 더 만족할만 하다는 것을 알 수 있다.

상태 관측자 및 상태 제어기 페루프 구조에서의 제시한 축소차수 동적 관측자의 성능을 살펴보기 위한 시뮬레이션도 수행하였다. 상태 되먹임 제어기는 $u(t) = r(t) - K\hat{x}(t)$ 이며, 페루프 시스템의 극점이 $-0.5 \pm j0.5$ 에 위치하도록 설계되었으며, 이에 해당하는 수치는 $K = (-1.5, -1)$ 이다[10]. 기준입력 $r(t) = 0$ 그리고 초기치는 마찬가지로 $x^T(0) = (-0.6, 0.35)$ 라 가정한 상태에서 시뮬레이션을 수행하였다. 그림 2의 실선은 상태를 정확히 추정가능하다고 가정한 상황에서의 시스템 응답특성이고 파선은 상태를 축소차수 정적 관측자를 사용하여 추정

했을 때의, 일점쇄선은 축소차수 동적 관측자를 사용했을 때의 응답특성이다. 축소차수 동적 관측자를 사용한 경우가 더욱 근사하게 원하는 특성에 근접하다는 것을 알릴 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 축소차수 동적 관측자의 개념과 설계 방법을 제시하였다. 제시된 관측자 설계 기법의 주요 이점은 축소차수 관측자 설계 문제를 선형 출력 되먹임 제어기 설계 문제로 전환할 수 있다는 점이다. 선형 제어기 설계법으로는 H_2 , H^∞ 혼합 H_2 , H^∞ 제어기 설계법 등 임의의 발달된 제어기 설계법을 적용할 수 있다. 따라서 설계자는 최근에 발전된 제어기 설계법의 유용한 장점들을 축소차수 동적 관측자 설계에 충분히 이용할 수 있다. 제시된 방법을 유효하게 사용하기 위해서는, 단지 제어기 설계 이론에 익숙하기만 하면 된다. 본 논문의 결과로서, 제어기 설계법과 관측자 설계법 사이의 이원성이 보다 명확해 졌다.

참고문헌

- [1] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State space solutions of standard H_2/H^∞ control problems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- [2] J. Doyle, K. Zhou, K. Glover, and B. Bodenheimer,

"Mixed H_2 and H^∞ performance objectives, II. optimal control," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, no. 8, pp. 1575-1587, 1994.

- [3] J. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, Workinghan, England, 1989.
- [4] X. Ding, L. Guo, and P. M. Frank, "Parameterization of linear observers and its application to observer design," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, no. 8, pp. 1648-1652, 1994.
- [5] J. O'Reilly, *Observer for linear systems*, New York: Academic, 1983.
- [6] J. F. Tu and J. L. Stein, "Model error compensation for observer design," *Int. J. Control*, vol. 69, no. 2, pp. 329-345, 1998.
- [7] J.-K. Park, "The concept and design of dynamic state estimation," *Proc. of Am. Contr. Conf.*, San Diego, CA, pp. 2412-2416, 1999.
- [8] 박종구, "동적 관측자를 사용한 선형 시불변 시스템의 확장된 상태 추정 방법," *대한전기학회 논문지*, vol. 49D, no. 3, pp. 89-94, 2000.
- [9] C. T. Chen, *Linear system theory and design*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [10] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.



박종구

1987년 서울대학교 제어계측공학과 졸업. 동 대학원 석사(1989). 동 대학원 박사(1993). 1995~현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 부교수. 관심분야는 제어이론 및 응용, 컴퓨터 응용 제어 시스템, 추정이론, 가상현실 및

응용.