

# 다중 Lyapunov 기반 하이브리드 시스템의 안정화 제어기 설계 및 군집 차량의 종방향 거리 제어시스템에의 응용

## Design of a Stabilizing Controller for Hybrid Systems with an Application to Longitudinal Spacing Control in a Vehicle Platoon

김진변, 최재원, 김영호  
(Jin Byun Kim, Jae Weon Choi, and Young Ho Kim)

**Abstract** : Many physical systems can be modeled by incorporating continuous and discrete event nature together. Such hybrid systems contain both continuous and discrete states that influence the dynamic behavior of the systems. There has been an increasing interest in these types of systems during the last decade, mostly due to the growing usage of computers in the control of physical plants but also as a result of the hybrid nature of physical processes. The stability theory for hybrid systems is considered as extension of Lyapunov theory where the existence of an abstract energy function satisfying certain properties verifies stability, called multiple Lyapunov theory. In this paper, a hybrid stabilizing controller is proposed using the control Lyapunov function method and multiple Lyapunov theory, and the proposed method is applied to longitudinal spacing control in a vehicle platoon for intelligent transportation systems (ITS).

**Keywords** : hybrid system, multiple Lyapunov theory, longitudinal spacing control, vehicle platooning, intelligent transportation system, control Lyapunov function

### I. 서론

1990년대 이후로 시스템의 기능이 세분화됨에 따라 전체 시스템의 구조와 모델링이 복잡해지는 추세를 보이고 있다. 이러한 시스템의 복잡성을 해결하기 위해 최근까지의 연구 [1]–[12]에서는 연속적인 시스템이 계층적으로 연동하여 상위 의사 결정 시스템의 명령을 받는 구조의 시스템으로 고려되거나, 이산적인 신호와 연속적인 거동을 동시에 가지는 특성을 지닌 물리 시스템으로 설계되기도 하였다. 그러나 이산적인 시스템과 연속적인 시스템의 단순한 구조적 결합으로 구성되는 복합시스템의 해석을 수행할 때 각각의 시스템에 대한 개별적인 해석으로는 복합 시스템의 성능과 안정성 확보에 있어서 본질적인 한계성을 내포하게 된다 [1]–[3]. 이러한 이유로 이산적인 시스템과 연속적인 시스템을 하나의 전체 시스템으로 동시에 고려하는 새로운 개념의 모델링과 제어기법의 연구가 제안되고, 제안된 연구에서 이러한 시스템을 연속적인 시스템 또는 이산적인 시스템과의 개념적인 차이를 표현하기 위하여 하이브리드 시스템이라는 새로운 개념의 시스템으로 정의하였다 [1]–[3].

여기서, 하이브리드 시스템이란 이산적인 시스템과 연속적인 시스템 사이의 구조적 결합 또는 연속적인

거동과 이산적 거동을 동시에 가지는 시스템을 의미한다. 이러한 하이브리드 시스템의 모델링방법은 많은 연구에서 여러 가지로 다양하게 제안되었는데, 크게 과거의 이산 사건 시스템 (discrete event system) 분야에서 사용된 수학적 기법을 이용하는 방법 [2]과 연속 동역학에 기반을 둔 상태 공간 기법으로 나눌 수 있다 [4]–[6]. 이산 사건 시스템 분야의 연구에서 제안하는 하이브리드 시스템 모델은 주로 공장자동화를 기반으로 연속 시스템을 부수적으로 다루는 기법을 제안하였는데 [7] 이러한 기법은 일반적으로 하이브리드 시스템으로 간주되는 다양한 모델에 대한 적응력이 떨어지는 단점을 가지고 있다. 한편, 연속 동역학에 기반을 둔 상태 공간 기법은 수학적 모델이 일반적인 비선형 시스템과 같이 함수 형태로 표현되므로 안정성의 판별이나 제어기의 설계시 이전의 연속 시스템에 대한 제어기 설계 기법을 적용할 수 있는 장점을 가진다. 특히, 상태 공간 기법을 적용한 방법들은 대체로 Branicky 등 [5]의 하이브리드 시스템의 통합 모델이나 Pettersson [8]이 제안한 모델이 많이 사용되고 있다.

한편, 이전의 단일 벡터 필드만을 고려하던 제어기 설계 기법으로는 일반적인 하이브리드 시스템에 대한 적용시 안정성이나 시스템의 성능을 보장할 수 없게 되므로, 하이브리드 시스템에 대한 제어기 설계는 각 벡터 필드에 대한 연속 제어기의 설계뿐만 아니라 각 벡터 필드 사이의 상호 작용을 고려한 이산 제어기가 동시에 설계되어야 한다. 과거의 연구에서는 이산 제어기로 시스템의 벡터 필드의 전환을 조절함으로써 시스템을 제어하는 기법 [8]과 하이브리드 시스템의 성능

접수일자 : 2000. 8. 23., 수정완료 : 2001. 3. 21.

김진변, 최재원 : 부산대학교 기계공학부 (jbkim@top-ranker.com/choijw@hyowon.pusan.ac.kr)

김영호 : 부산대학교 전자전기정보공학부 (yhkim@hyowon.cc.pusan.ac.kr)

※ 본 연구는 정보통신연구진흥원의 대학 S/W연구센터 지원 사업에 의하여 연구되었습니다.

을 최적화 문제로 나타내어 최적 제어기를 설계하는 기법[13]이 고려되었으며, 또한 벡터 필드의 견실 안정성을 보장하기 위한 견실 하이브리드 제어기 설계 기법[14], 하이브리드 시스템의 스위칭 제어기 설계 기법[15], 하이브리드 시스템의 이산 모드 제어 기법[16], 하이브리드 시스템의 안정화 제어기 설계 기법[17] 등의 다양한 제어 문제가 고려되어 왔다.

본 논문에서는 연속 벡터 필드의 안정성과 각 벡터 필드의 이산 거동에 대한 안정성을 동시에 고려하는 하이브리드 시스템의 제어기 설계 기법을 제안한다. 본 논문에서 제안된 하이브리드 안정화 제어기 설계 기법은 비선형 시스템에서 그 효용성을 검증받은 제어 Lyapunov 함수 기법(control Lyapunov function)을 하이브리드 시스템에 적합하도록 확장한 것이다. 또한 본 논문에서는 지능형 교통 시스템 구현을 위한 군집 차량의 차량간 종방향 거리 유지를 위한 제어기 설계에의 응용을 위하여 차량을 하이브리드 시스템으로 모델링하고, 모델링된 차량으로 구성된 군집 차량에 대하여 제안된 하이브리드 제어기 설계 기법을 차량간 종방향 거리 유지 제어기의 설계에 응용하여 그 타당성을 검증하였다.

**II. 하이브리드 시스템의 모델링**

먼저, 본 장에서는 참고문헌[8]에 기술된 하이브리드 시스템에 대한 수학적 모델링 기법을 간략히 언급한다. 하이브리드 시스템은 어떠한 시스템의 거동을 표현하는 지에 따라 다양한 방법으로 모델링될 수 있다. 그러나 하이브리드 시스템의 본질적인 특성은 두 가지의 개념적으로 다른 형태의 상태 변수, 즉 연속 상태 변수와 이산 상태 변수를 포함하는 것이므로 하이브리드 시스템의 수학적 모델은 연속 상태 변수와 이산 상태 변수를 모두 포함하여야 한다. 또한 일반적인 하이브리드 시스템을 연속 상태 변수와 이산 상태 변수의 상호작용의 종류에 따라 연속 시간 시스템(continuous time system)과 동조 이산 시간 시스템(synchronized discrete time system)으로 나눌 수 있는데[8], 본 논문에서는 하이브리드 시스템을 연속 시간 시스템으로 한정한다.

다음의 정의 1 은 일반적인 하이브리드 시스템의 각 요소에 대한 정의를 기술한 것이다.

정의 1[8]: 하이브리드 시스템  $H = (\mathcal{X}^n \times M \times \mathcal{R}^p \times \Sigma, f, \phi)$  는 다음의 요소로 정의된다. 먼저, 공집합이 아닌 집합  $H = \mathcal{X}^n \times M$  는 하이브리드 시스템 H의 하이브리드 상태 공간(hybrid state space)으로 정의하고, 집합  $\mathcal{R}^p \times \Sigma$  는 하이브리드 시스템 H의 외부 입력 공간(external input space)으로 정의한다. 천이함수(transition function)인  $f: D_f \rightarrow \mathcal{X}^n$  과  $\phi: D_\phi \rightarrow M$  은 다음의 (1)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), m(t), u(t)) \\ m^+(t) &= \phi(x(t), m(t), u(t), \sigma(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서,

$$D_f \subseteq \mathcal{X}^n \times M \times \mathcal{R}^p, \quad D_\phi \subseteq \mathcal{X}^n \times M \times \mathcal{R}^p \times \Sigma$$

정의 1의 하이브리드 시스템 H에서 실수계의 상태 벡터  $x$  는 연속 상태 변수(continuous state variable)라고 정의하며, 이산적인 값을 가지는 벡터  $m$  은 이산 상태 변수(discrete state variable)라고 정의한다. 동일한 의미로 실수계의 입력 벡터  $u$  는 연속 제어 입력(continuous control input),  $\sigma$  는 이산 제어 입력(discrete control input) 또는 입력 사건(input event)으로 정의한다.

그리고 하이브리드 시스템에 외연적으로 드러나는 출력이나 설계자가 중요하게 여기는 상태에 대해 다음과 같은 정의가 필요하다.

정의 2[8]: 주어진 하이브리드 시스템 H의 출력은 다음과 같은 요소로 정의된다. 집합  $\mathcal{R}^q \times O$  는 하이브리드 시스템 H의 출력 공간(output space)으로 정의한다. 그리고 출력 함수인  $g: D_g \rightarrow \mathcal{R}^q$  와  $\varphi: D_\phi \rightarrow O$  는 다음의 (2)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} y(t) &= g(x(t), m(t), u(t)) \\ o^+(t) &= \varphi(x(t), m(t), u(t), \sigma(t)) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서,  $D_g \subseteq \mathcal{X}^n \times M \times \mathcal{R}^p, \quad D_\phi \subseteq \mathcal{X}^n \times M \times \mathcal{R}^p \times \Sigma$

정의 2에서 기술된 하이브리드 시스템 H의 실수계 출력 벡터  $y$  는 연속 출력 변수(continuous output variable)를 나타내며, 이산적인 값을 가지는 출력 벡터  $o$  는 이산 출력 변수(discrete state variable) 또는 이산 출력값(discrete output)을 나타낸다. 하이브리드 시스템은 대상 시스템에 따라 정의 1과 정의 2에서 기술된 표현을 적절히 사용함으로써 수학적으로 모델링될 수 있다. 그리고 전체 시스템에 대한 의사결정(decision making)의 경우와 같이 이산 상태 변수  $m$  이 단순히 스칼라 값인 경우에도 (1)과 (2)를 이용한 모델링에는 별다른 차이가 없다.

왜냐하면,  $M$  이 가산 집합(countable set)이기 때문에  $M$  의 원소와 일대일 대응하는 스칼라 값의 원소를 가지는 새로운  $\tilde{M}$  를 정의할 수 있고, 이런 경우  $\tilde{M}$  의 원소인 새로운 이산 상태 변수  $\tilde{m}$  는 다음 (3)과 같은 함수를 가지는 이산 상태 변수가 된다.

$$\tilde{m}^+(t) = \tilde{\phi}(x(t), \tilde{m}(t), \sigma(t)) \tag{3}$$

여기서  $\tilde{m} \in \tilde{M}$  이고,  $\tilde{m}^+ \in \tilde{M}^+$  는  $m^+ \in M^+$  에 대응되며, (1)과 동일한 모델링이 스칼라 값을 가지는 이산 상태 변수에 대해 적용된다. 실제 하이브리드 시스템에서는 이산 상태 변수가 스칼라 값을 가지는 경우가 좀 더 일반적이다. 또한 이산 상태 변수  $\tilde{m}$  가 의사결정과 같은 시스템의 벡터 필드의 지수(index)를 결정하는 변수인 경우에도 (3)을 이용하여 (1)의 연속 미분 방정식을 (4)와 같이 정의할 수 있다.

$$\dot{x} = \tilde{f}_{\tilde{m}(t)}(x(t), u(t)) \tag{4}$$

예를 들어, (4)에서 이산 상태 변수  $\tilde{m}$  가 {1,2}로 구성된다면, 전체 하이브리드 시스템은 서로 다른 벡터 필드  $\tilde{f}_1$  과  $\tilde{f}_2$  로 구성되며,  $\tilde{m}$  는 각 벡터 필드의 지수를 의미한다.

**III. 하이브리드 시스템의 안정성**

일반적인 연속 시스템에 대한 안정성 판별 기법인 Lyapunov 이론과 동일하게 하이브리드 시스템의 안정성은 각 벡터 필드의 평형점, 또는 벡터 필드들의 공통된 평형점에서 정의된다. 그러나 각 연속 벡터 필드가 안정성이 보장되어도 전체 하이브리드 시스템의 안정성이 보장되지는 않는다[8]. 즉, 연속 시스템에 대한 일반적인 Lyapunov 이론에 의해 각 연속 벡터 필드에서 해의 안정성이 보장되더라도 전체 하이브리드 시스템은 불안정한 경우가 존재한다. 또한 스위칭 집합이 전체 하이브리드 시스템의 안정성에 직접적인 영향을 주는 경우도 있다[8].

따라서, 하이브리드 시스템에서는 일반적인 알려진 연속적인 시스템의 안정성 판별 기법과는 달리 다음과 같은 두 가지 다른 방식의 안정성 판별 기법이 고려되어질 수 있다.

- 벡터 필드의 스위칭과 관계없는 하이브리드 시스템의 안정성 판별 기법
- 벡터 필드의 집합에서 시스템의 안정성을 보장하는 스위칭 집합 선택 기법

본 장에서는 벡터 필드의 스위칭과 관계없이 하이브리드 시스템의 안정성을 판별하기 위하여 제시된 다중 Lyapunov 함수 기법[8] [9]에 대하여 간략히 기술한다. 주어진 벡터 필드의 집합에서 시스템의 안정성을 보장하는 스위칭 집합의 선택은 Pettersson[8]의 LMI를 이용한 스위칭 집합 선택 기법이 제시되어 있다.

안정성 판별을 위해 하이브리드 시스템을 다음의 (5)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, m) \\ m^+ &= \phi(x, m) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서  $m \in M = \{m_1, \dots, m_N\}$  은 이산 상태이고,  $x \in \mathcal{X}^n$  은 연속 상태이다. 여기서  $N$  은 자연수이고, 하이브리드 상태 공간  $H$  는  $\mathcal{X}^n \times M$  이다. 또한 초기 하이브리드 상태를  $H_0 \subseteq H$  로 나타낸다. 이산 상태 변수의 변화를 (6)과 같은 스위칭 집합으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} S_{i,j} &= \{x \in \mathcal{X}^n \mid m_j = \phi(x, m_i)\}, \\ i &\in I_N, j \in I_N \end{aligned} \tag{6}$$

여기서,  $I_N$  은  $M$  에 포함되는 이산 상태의 개수를 상한으로 하는 자연수 집합을 의미한다. (5)와 (6)으로 정의되는 하이브리드 시스템은 다음과 같은 가정들이 성립한다고 가정한다.

가정 1 : 벡터 필드  $f(x, m)$  는 각각의 이산 상태와

$x$  에 대하여 연속이다. 실제 물리 시스템에서 이러한 가정은 타당성을 가진다. 왜냐하면, 벡터 필드의 불연속점이 존재하는 대부분의 실제 물리 시스템의 경우에서 연속한 전체 벡터 필드의 영역이 불연속점을 기준으로 몇 개의 연속한 벡터 부분 필드(vector sub-field)의 영역으로 나누어지기 때문이다.

이러한 가정을 만족한다면, 하이브리드 시스템에서 각각의 벡터 부분 필드로 표현되는 연속 시스템의 영역에 대하여 이산 상태를 정렬하고, 벡터 부분 필드가 다른 벡터 부분 필드로 천이하는 불연속성에 대하여 스위칭 집합을 정의함으로써 (5)와 같은 이산 상태 변수를 포함하는 연속한 벡터 필드로 구성된 등가 하이브리드 시스템(equivalent hybrid system)을 정의할 수 있다.

가정 2 : 만일 하이브리드 시스템에 슬라이딩 거동이 발생한다면, 슬라이딩 모드에 대한 새로운 이산 상태를  $M$  에 포함되도록 추가하여 정의한다. 슬라이딩 모드에 관한 동역학은 참고문헌[8]에서 언급한 방법을 통하여 연속한 벡터 필드로 구성될 수 있고, 이런 경우에는 슬라이딩 거동을 포함하는 하이브리드 시스템도 가정 1을 만족하는 등가 하이브리드 시스템으로 정의된다.

가정 3 : 각 벡터 부분 필드가 지역 Lipschitz 조건(local Lipschitz condition)을 만족한다. 지역 Lipschitz 조건을 만족한다는 것은 이산 상태에 따른 각 벡터 부분 필드가 유일한 해의 지역적 존재성(local existence)을 만족한다는 것을 의미한다.

가정 4 : (5)의 하이브리드 시스템의 평형점은 연속 상태 공간의 원점으로 가정한다.

정리 1[8] :  $W$  가  $D \subseteq \mathcal{X}^n$  의 밀집 부분 집합(compact subset)이라고 정의한다. 그리고  $x_0 \in W$  를 만족하고 초기 상태  $(x_0, m_0) \in H_0$  에서 거동을 시작한 (5)의 연속 해  $x(t)$  가  $W$  에 모두 포함된다면, (5)를 만족하는 시스템의 해는 모든  $t > 0$ 에서 정의된다.

정리 1은 연속 궤적들이 각 벡터 필드 스위칭 사이에서 유일하게 존재한다는 것을 의미한다. 그러나 각 벡터 필드와 이산 상태의 유일성은 정리 1로는 보장할 수 없다. 그러므로 스위칭 집합에 대한 (7)과 같은 조건을 추가한다.

$$S_{i,j} \cap S_{i,k} = \emptyset, i \neq j \neq k, i, j, k \in I_N \tag{7}$$

(7)의 조건을 만족하는 스위칭 집합에 대하여 (5)의 하이브리드 시스템은 시간에 대하여 유일한 벡터 필드와 스위칭 집합을 가지게 된다

먼저, 하이브리드 시스템의 안정성을 증명하기 위해서 전체 하이브리드 상태 공간을 분할한다. 즉, 하이브리드 상태 공간  $\Omega \subseteq H$  를  $l$ 개의 하이브리드 상태 부분 공간(hybrid state subspace)  $\Omega_i (i=1, \dots, l)$ 로 분할하여 정의한다. 정의된  $\Omega_i$  는 (8)과 같은 성질을 만족한다.

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_l = \Omega, \quad \Omega_q \cap \Omega_r = \emptyset, \quad q \neq r \quad (8)$$

그리고  $q$  번째로 분할된 하이브리드 상태 부분 공간과  $r$  번째로 분할된 하이브리드 상태 부분 공간의 경계  $\Lambda_{q,r}(q \in I_q, r \in I_r, (q \neq r))$  을 (9)와 같이 정의한다.

$$\Lambda_{q,r} = \{(x, m) \in \Omega \mid \exists t > 0, \\ (x(t-\varepsilon), m(t-\varepsilon)) \in \Omega_q, \\ (x(t+\varepsilon), m(t+\varepsilon)) \in \Omega_r, \varepsilon \rightarrow 0\} \quad (9)$$

또한 각 하이브리드 상태 공간의 원소에 대하여 (10)을 정의한다.

$$\begin{aligned} \Omega^x &= \{x \in \mathfrak{R}^n \mid (x, m) \in \Omega\} \\ \Omega^{x,m_i} &= \{x \in \mathfrak{R}^n \mid (x, m_i) \in \Omega\} \\ \Omega^m &= \{m \in M \mid (x, m) \in \Omega\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, 위첨자는 각 분할된 영역에 포함되는 변수를 나타낸다. 그리고 하이브리드 상태 변수값이 주어진 초기 하이브리드 상태 변수값에서 임의의 분할된 영역에  $k$  번째로 포함되는 순간까지의 시간을  $t_k, k=1, 2, \dots$  로 정의하고, 하이브리드 상태 공간의 분할은 항상  $t_k < t_{k+1}$  의 관계를 만족한다.

분할된 영역  $\Omega_q$  에 대하여 다음의 (11)과 같은 함수를 정의한다.

$$V_q : \Omega_q^x \rightarrow \mathfrak{R}, \quad q \in I_l \quad (11)$$

(11)에서  $V_q$  는 영역  $\Omega_q$  안에서 연속적인 스칼라 함수이다. (11)에서 정의된 함수를 전체 하이브리드 상태 공간으로 확장하면 (12)와 같다.

$$V(x) = V_q(x), \quad (x, m) \in \Omega_q, \quad q \in I_l \quad (12)$$

여기서, 전체 하이브리드 상태 공간에 대하여  $V(x)$  는 분할된 영역의 경계인  $\Lambda_{q,r}, (q, r) \in I_\Lambda$  에서 불연속점을 가지는 불연속 함수이다. 그러나 초기 하이브리드 상태에 대하여  $t_k < t_{k+1}$  의 관계를 만족하도록 분할되었기 때문에 실제로는  $V(x)$  는 부분 연속(piece-wise continuous)이다.

하이브리드 시스템의 안정성은 다음의 정리 2를 이용하여 판별할 수 있다.

정리 2[8] : 만일 다음 조건을 만족하는  $V_q(x) : \Omega_q^x \rightarrow \mathfrak{R}, q \in I_l$  와 클래스 K에 속하는 함수  $\alpha : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  와  $\beta : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  가 존재한다면  $V_q(x)$  는 Lyapunov 함수라고 정의하고, 이때 하이브리드 시스템은 평형점 0에서 안정하다(stable in the sense of Lyapunov).

- 1)  $x \in \Omega_q^x, \alpha(\|x\|) \leq V_q(x) \leq \beta(\|x\|), q \in I_l$
- 2)  $(x, m) \in \Omega_q, \dot{V}_q(x) \leq 0, q \in I_l$
- 3)  $x \in \Lambda_{q,r}^x, V_r(x) \leq V_q(x), (q, r) \in I_\Lambda$

여기서, 다음 조건을 만족하는 함수를 클래스 K에 속하는 함수로 정의한다.

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 0 \\ \alpha(z) &> 0, \quad z > 0 \\ \alpha(z_1) &\leq \alpha(z_2), \quad \text{for } z_1 < z_2 \end{aligned}$$

정리 2의 증명은 참고문헌[8]에 상세히 기술되어 있으므로 본 논문에서는 생략한다. 각각의 영역에 대한  $V_q$  가 동일한 함수로 표현되지 않더라도 정리 2를 만족한다면 전체 하이브리드 시스템은 안정하다. 즉, 다수의 Lyapunov 함수를 이용하여 각 벡터 필드의 안정성을 판별할 수 있으며, 일반적으로 이러한 안정성 판별 기법을 다중 Lyapunov 안정성 판별 기법이라고 알려져 있다[5] [8]. 또한 일반적으로 하이브리드 시스템의 안정성을 판별할 때는 각각의 벡터 부분 필드에 대하여  $V_q$  를 따로 정의하여 정리 2에 적용한다[8].

특히, 이런 경우에는 경계  $\Lambda_{q,r}^x$  은 스위칭 집합  $S_{i,j}$  로 대체되고 정리 2에서 제시된 조건 3은 하이브리드 시스템의 안정성 판별에서 잘 알려진 구속 조건인 비증가 조건(non-increasing condition)과 동일하게 된다. 비증가 조건이란 스위칭을 통하여 다른 벡터 필드로 시스템이 전환되는 경우에 Lyapunov 함수 또는 시스템의 에너지가 증가하지 않는다는 것을 의미하며, 이는 하이브리드 시스템이 각 벡터 부분 필드 내에서는 안정하다고 하여도 스위칭을 통하여 전환되었을 때 상태의 한계  $R$  이 증가한다면 무한 스위칭을 가지는 하이브리드 시스템이 불안정할 수 있는 가능성을 가지기 때문에 이에 대한 제한으로 제시된 조건이다.

정리 2는 실제로 영역 분할을 기본으로 하는 안정성 판별 정리이기 때문에 좀 더 일반적인 하이브리드 시스템의 안정성 판별 기법이라고 볼 수 있으며, 불연속점을 가진 비선형 시스템에 대하여도 적용이 가능하다. 또한 이러한 관점에서 보면 연속 시스템에 대하여도 다중 Lyapunov 함수가 분할 영역에서 정의된다면, 과거에 하나의 Lyapunov 함수로 시스템의 안정성을 판별하였던 일반적인 Lyapunov 이론 보다 좀 더 확장된 안정성 판별 기법으로 볼 수 있다.

#### IV. 하이브리드 안정화 제어기 설계

본 장에서는 II장에서 기술된 하이브리드 시스템의 모델링 기법과 III장의 하이브리드 시스템의 안정성 정리를 이용한 하이브리드 시스템의 안정화 제어기법을 제안한다. 하이브리드 안정화 제어기의 구조는 제어 Lyapunov 기법의 제어기 구조를 이용한다. 제어 Lyapunov 함수 기법은 Sontag[18]에 의하여 제안되었는데, 일반화된 비선형 시스템에 대하여 조직적인 Lyapunov 함수 선정기법을 제공하지는 못하지만 이전의 많은 연구에서 고려되어진 다양한 비선형 시스템들에 대하여는 거의 모두 적용이 가능하다. 또한 제어 Lyapunov 함수의 선정을 통하여 안정화 제어기법의 존재성과 결정이 동시에 이루어지는 장점을 가지고 있다.

먼저, 본 장에서는 이러한 특징을 가지고 있는 일반화된 비선형 시스템에 대한 제어 Lyapunov 함수 기

법을 하이브리드 시스템에 응용한다. 전역 점근적 안정화(globally asymptotic stabilization) 하이브리드 제어기를 설계하기 위해서 다음의 (13)과 같은 하이브리드 시스템을 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, m) + g(x, m)u \\ m^+ &= \phi(x, m) \\ f(x, m) &= \{f_1(x, m_1), f_2(x, m_2), \dots, f_N(x, m_N)\} \\ x &\in \mathcal{X}^n, u \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,  $x$ 는 연속 상태를 나타내고,  $m$ 은 이산 상태를 나타낸다. 또한  $f$ 는 각각의 이산 상태에 따라 천이되는 연속 벡터 필드의 집합을 나타내고,  $\phi$ 는 이산 상태의 변화를 나타내는 이산 상태 함수이다.

정의 3 : (13)의 하이브리드 시스템에 대하여 다음의 조건 1과 2를 만족하는 양의 한정하고 무제한 원만함수(smooth positive definite radially unbounded function)인 제어 Lyapunov 함수 집합  $V(x) = \{V_1(x), \dots, V_N(x)\}$ 를 다중 제어 Lyapunov 함수(multiple control Lyapunov function)로 정의한다.

- 1)  $(x, m) \in \Omega_q$ ,  
 $\inf_{u_q \in \mathcal{U}^m} \{L_{f(x,m)} V_q + L_{g(x,m)} V_q u_q\} < 0, q \in I_l$
  - 2)  $x \in \Lambda_{q,r}^x, V_r(x) \leq V_q(x), (q, r) \in I_\Lambda$
- 여기서,  $\Omega_q$ 는  $q$ 번째 벡터 필드의 영역을 나타내며,  $\Lambda_{q,r}^x$ 은  $q$ 번째 벡터 필드와  $r$ 번째 벡터 필드 사이의 경계를 나타낸다. 그리고  $L_{f(x,m)}$ 과  $L_{g(x,m)}$ 은 리대수(Lie algebra)를 나타낸다.

정의 3에서 벡터 필드의 분할 영역을 스위칭을 통한 벡터 필드의 전환으로 바꾸어 주면, 조건 1에서  $V_q$ 가 하이브리드 시스템의 각 연속 벡터 필드에 제어 Lyapunov 함수로 정의됨을 의미하며, 동시에 조건 2를 만족하는 경우에는 전체 벡터 필드로의 확장이 가능하기 때문에 정리 2의 조건 1과 조건 2는 별도로 고려하지 않아도 된다. 또한 제어 입력을 정의하기 위해 각각의 제어 Lyapunov 함수는 제어 Lyapunov 이론에 포함된 조건들을 만족해야 한다[18]. 그러나 하이브리드 시스템인 경우, 만일 불연속적인 제어 입력이 정의되고 그 경계 내에서 정의 3의 조건만 만족된다면 하이브리드 시스템의 안정성을 보장할 수 있다.

정의 3을 만족하는 다중 제어 Lyapunov 함수 집합에 대하여 각각의 벡터 필드의 제어 입력은 (14)와 같다.

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{L_{f_i} V_i + \sqrt{W(x)}}{L_{g_i} V_i (L_{g_i} V_i)^T} (L_{g_i} V_i)^T, L_{g_i} V_i \neq 0 \\ u_i &= 0, L_{g_i} V_i = 0, i=1, \dots, N \\ W(x) &= (L_{f_i} V_i)^2 + (L_{g_i} V_i (L_{g_i} V_i)^T)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

정리 3 : 만일 (13)의 하이브리드 시스템에 다중 제어 Lyapunov 함수가 정의된다면, (14)의 제어 입력으로 구성된 페루프 하이브리드 시스템은 전역에서 점근

적으로 안정하다.

증명 : (14)를 다중 Lyapunov 함수의 시간 미분식에 대입하면 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -\sqrt{(L_{f_i} V_i)^2 + (L_{g_i} V_i (L_{g_i} V_i)^T)^2} \\ &\leq -\gamma_i (\|x\|^2) \end{aligned} \quad (15)$$

(14)와 (15)로부터 구성된 페루프 하이브리드 시스템은 정리 2를 만족한다는 것을 확인할 수 있다. 따라서 (14)의 제어기를 적용하면 페루프 하이브리드 시스템의 안정성을 보장한다. 그리고 전역 점근적 안정성을 증명하기 위해서는 해가 평형점으로 수렴함을 증명하여야 한다. 평형점으로 수렴함 ( $\|x\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ )

은 모든  $\mu > 0$ 에 대하여 다음 (16)을 만족하는  $T$ 가 존재한다는 것을 의미한다.

$$\|x(t)\| < \mu, \quad \forall t > T \quad (16)$$

이때, 임의의 양의 실수  $r$ 이  $0 < \mu < \|x_0\| < r$ 를 만족한다면, 클래스 K 함수의 특성에 의하여  $\beta(\delta) < \alpha(\mu)$ 인  $\delta(\mu) > 0$ 를 정의할 수 있다.

만일, 다음 (17)과 (18)을 만족한다면 (19)가 성립한다.

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(T)) \\ &\quad - \int_T^t \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau, \quad \forall t > T \end{aligned} \quad (17)$$

$$\|x(t)\| \leq \delta, \quad \forall t > T \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\|x(t)\|) &\leq V(x(t)) \leq V(x(T)) \leq \beta(\|x(T)\|) \\ &\leq \beta(\delta) < \alpha(\mu), \quad \forall t > T \end{aligned} \quad (19)$$

결과적으로 (19)가 성립하면 모든 시간  $t > T$ 에 대하여  $\|x(t)\| < \mu$ 가 성립한다. 그러므로 (16)과 (17)이 성립함을 보임으로 정리 3은 증명할 수 있다.

이제, (16)을 증명하기 위해서 궤적이 시간  $t \in [T, t_1)$ 에서 영역  $\Omega_q$  안에 존재한다고 가정한다. 궤적이 영역  $\Omega_q$ 에 존재하고 (14)의 제어 입력을 이용하여 페루프 하이브리드 시스템을 구성하면, 다음의 (20)과 같이 다중 제어 Lyapunov 함수를 정의할 수 있다.

$$V(x(t)) = V_q(x(t)), \quad t \in [T, t_1) \quad (20)$$

이때, (20)의 다중 제어 Lyapunov 함수는 정의 3의 조건을 만족하므로 (15)가 성립되고 이를 시간 구간  $t \in [T, t_1)$ 에서 적분하면 다음의 (21)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(T)) - \int_T^t \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau, \\ t &\in [T, t_1) \end{aligned} \quad (21)$$

만일, 시간  $t_1$ 이 무한하다면, 즉 궤적이 영역  $\Omega_q$ 를 벗어나지 않는다면 (16)은 성립한다. 그렇지 않는 경우에는 시스템의 궤적이 영역  $\Omega_q$ 를 벗어난다. 궤적이  $\Lambda_{q,r}$ 에 도달하는 시간을  $t_{k+1}$ 이라고 정의하면, 시스템

의 궤적이 영역  $\Omega_q$  내에 존재하는 시간  $t$ 는 시간 간격  $(t_k, t_{k+1})$  내에 존재한다. 그러므로 (21)을 이용하여 궤적이  $t_{k+1}$  이후에 존재하는 영역  $\Omega_r$ 에 대하여 (22)를 얻을 수 있다.

$$V(x(t)) \leq V(x(t_{k+1})) - \int_{t_{k+1}}^t \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau, \quad (22)$$

$$t \in (t_{k+1}, t_{k+2})$$

그리고, 정리 3의 조건 2에서 (23)이 성립한다.

$$V_r(x(t_{k+1} + \varepsilon)) \leq V_q(x(t_{k+1} - \varepsilon)), \quad (23)$$

$$\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

따라서 (21)과 (23)의 조건을 이용하면, (22)를 다음 (24)와 같이 유도할 수 있다.

$$V(x(t)) \leq V(x(t_{k+1})) - \int_{t_{k+1}}^t \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau$$

$$\leq V(x(T)) - \int_T^{t_{k+1}} \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau - \int_{t_{k+1}}^t \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau$$

$$= V(x(T)) - \int_T^t \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau, \quad (24)$$

$$t \in (t_{k+1}, t_{k+2})$$

시간 간격  $(t_k, t_{k+1})$ 에서 (24)가 만족함으로 시간 간격  $(t_k, t_{k+2})$  내에서도 (24)가 성립함은 명백하다. 그러므로  $k \rightarrow \infty$ 의 시간 간격 내에서도 (24)가 성립하며, 이는 모든 시간 간격 내에서 (18)이 성립함을 의미한다.

다음으로 (18)을 증명하기 위해서 모든 시간  $t > 0$ 에 대하여  $\|x(t)\| > \delta$ 라고 가정한다. (17)이 만족하기 때문에 다음 (25)와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$0 < \alpha(\delta) \leq \alpha(\|x(t)\|) \leq V(\|x(t)\|)$$

$$\leq V(x_0) - \int_0^t \gamma(\|x(\tau)\|) d\tau \quad (25)$$

$$\leq V(x_0) - \int_0^t \gamma(\delta) d\tau \leq V(x_0) - t\gamma(\delta)$$

(25)에서 우변은 시간이  $t \rightarrow \infty$ 일 때 음수가 되므로 (25)는 모순이다. 그러므로 모든 시간  $t > 0$ 에 대하여  $\|x(t)\| \leq \delta$ 가 성립한다.

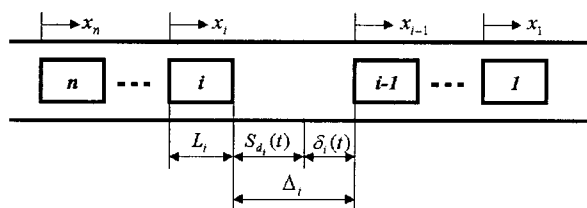


그림 1. 군집 차량 주행 모델.  
Fig. 1. A model of platoon vehicles.

V. 차량간 종방향 거리유지 제어시스템에의 응용

1. 유지 제어시스템에의 응용

본 논문에서는 제안된 하이브리드 시스템의 안정화 제어가 설계기법을 지능형 교통 시스템 분야에서 다루어지는 군집 차량의 차량간 종방향 거리 유지를 위한 제어기 설계에 응용하였다. 본 논문에서는 차량의 군집 주행(vehicle platooning)의 모델링을 위해 자동 변속 기어 박스를 가지는 차량으로 구성된 군집 차량 모델을 상정하고, 군집 차량 내의 각 차량이 차량간 종방향 거리를 일정한 안전 거리로 유지하고 상대 속도는 영으로 유지되도록 제어를 설계하였다. 그림 1은 본 논문에서 고려한 군집 차량 주행모델을 도시한 것이다. 그림에서  $L_i$ 는  $i$ 번째 차량의 길이이고,  $\Delta_i$ 는 선행 차량과의 간격을 나타낸다.

먼저, 군집 차량의 차량간 종방향 거리 유지를 위한 제어기 설계를 위하여 자동 변속 기어 박스를 가지는 차량 모델에 대한 하이브리드 시스템 모델링을 수행한다. 차량의 기어 박스는 엔진의 회전각속도가 일정 값 이상이 되는 경우에 기어를 변속하여 차량의 엔진 토크를 조절하기 때문에 차량의 엔진 회전각속도 변화에 의해 이산적으로 거동하는 이산 시스템으로 볼 수 있다. 이러한 기어 박스의 이산적인 거동과 연속적인 차량 동역학을 본 논문에서는 하이브리드 시스템으로 모델링하였다. 먼저, 모델링된 차량 엔진의 매니폴더(manifold) 압력  $P$ 는 (26)과 같은 한계를 가지고 입력 토크는 (27)과 같은 한계를 가진다[8].

$$P \leq \frac{1}{1250}(-\omega^3 + 700\omega^2 + 127000\omega) \quad (26)$$

$$T \leq \frac{1}{1250}(-\omega^2 + 700\omega + 127000) \quad (27)$$

여기서,  $\omega$ 는 차량 엔진의 회전각속도이다.

기어 박스를 통하여 차량에 인가되는 토크  $T_1$ 과 바퀴의 각속도  $\omega_1$ 은 다음 (28)과 같다.

$$T_1 = pT, \quad \omega_1 = \frac{1}{p}\omega \quad (28)$$

여기서,  $p$ 는 기어 변속비이다. 만일 바퀴의 원주가  $r$ 이라면 엔진을 통하여 차량에 인가되는 힘과 차량의 속도는 (29)와 같다.

$$F = T_1/r, \quad v = r\omega_1 \quad (29)$$

이런 경우에 대하여 차량의 운동 방정식은 (30)과 같이 간략히 표현할 수 있다.

$$M\dot{v} = F - F_f \quad (30)$$

여기서,  $M$ 은 차량의 질량을 나타내며,  $F_f$ 은 차량에 인가되는 마찰력으로 (31)과 같이 속도의 제곱에 비례하는 노면 마찰력과 노면 기울기  $\alpha$ 로 인하여 생기는 중력 마찰력으로 구성되어 있다고 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_f = kv^2 \text{sign } v + Mg \sin \alpha \quad (31)$$

여기서,  $k$  는 마찰계수이다. 그리고 (30)과 (31)로부터 다음의 (32)와 같은 차량의 운동 방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{p_r T}{M} - \frac{k}{M} v^2 \text{sign } v - g \sin \alpha \\ \omega &= p_r v \end{aligned} \quad (32)$$

여기서,  $p_r$  은  $p/r$  을 의미한다. 실제 차량의 기어 변속비는 엔진 회전각속도에 따라서 변하는 이산 상태로 간주할 수 있으므로 (33)과 같은 이산 상태로  $p_r$  을 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{discrete set : } \{p_{r_1}, p_{r_2}, p_{r_3}, p_{r_4}\}, \\ p_{r_1} > p_{r_2} > p_{r_3} > p_{r_4} \end{aligned} \quad (33)$$

차량의 자동 변속 기어 박스는 일정 회전각속도  $\omega_{high}$  로 증가되었을 때는 기어를 한 단 올리고, 반대로  $\omega_{low}$  로 감소되었을 때는 한 단 아래로 내리는 이산 거동을 가진다. 이러한 이산 거동을 하이브리드 시스템의 스위칭 집합으로 표현하면 다음 (34)와 같다.

$$\begin{aligned} S_{i,i+1} &= \{v \in \mathfrak{R} \mid v = \frac{1}{p_{r_i}} \omega_{high}\}, \\ S_{i+1,i} &= \{v \in \mathfrak{R} \mid v = \frac{1}{p_{r_{i+1}}} \omega_{low}\}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (34)$$

여기서  $S_{i,i+1}$  은 기어가  $i$  번째 단에서  $i+1$  번째 단으로 승단하는 스위칭을 나타내며, 반대로  $S_{i+1,i}$  는  $i+1$  번째 단에서  $i$  번째 단으로 강단하는 스위칭을 나타낸다.

각 스위칭 집합의 스위칭 조건은 차량의 각속도가 일정 이상 혹은 일정 이하가 되는 경우에 대하여 스위칭이 일어나는 것을 의미한다. 각 군집 차량은 선행차(lead car)와 추종차(following car)로 구성되며, 선행차에는 인가되는 명령 속도 입력을 추종하며 자동 주행하도록 자동 주행(auto cruising) 제어가 설계되고, 추종차는 앞차와의 간격  $\Delta_i$  를 일정 수준으로 유지하도록 하는 차량간 거리 제어를 설계한다.

Ioannou와 Chien[19]이 제안한 안전 거리 규정을 근거로 실제 차간 거리에서 안전 거리를 뺀 차간 거리 오차  $\delta_i(t)$  는 다음 (35)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta_i = x_{i-1} - x_i - L_i - (\lambda_2 v_i + \lambda_3) \quad (35)$$

여기서,  $\lambda_2, \lambda_3$  는 안전 거리 계수로 각각의 항들을 가중하기 위해 선정된 상수이다. (35)에서 나타난 차간 거리 오차식을 미분한 결과는 다음 (36)과 같다.

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_{i-1} - v_i - \lambda_2 a_i \quad (36)$$

군집 차량 주행에서 차량간 거리 제어 시스템은 최소한의 필요한 안전 거리만을 유지하며 선행 차량의 속도를 잘 추종해야 하는데, 이러한 목적으로 본 논문

에서는 하이브리드 시스템으로 모델링된 군집 차량에 대하여 제안한 제어기 설계 기법을 적용하였다. 다음의 (37)은 (36)에 (32)를 대입해 얻은 식이다.

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_i}{dt} &= v_{i-1} - v_i + \frac{\lambda_2 k}{M_i} v_i^2 \text{sign } v_i \\ &+ \lambda_2 g \sin \alpha - \frac{\lambda_2 p_r^i T_i}{M_i} \end{aligned} \quad (37)$$

(37)에서 제어 입력은  $i$  번째 차량의 엔진 토크  $T_i$  이고,  $M_i$  는  $i$  번째 차량의 질량을 나타내며,  $p_r^i$  는  $i$  번째 차량의 기어 변속비를 나타낸다. (37)의 상태 공간 방정식과 차량의 상태 공간 방정식은 다음의 (38)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{i,1} &= \delta_{i,2} \\ \dot{\delta}_{i,2} &= x_{i-1,2} - x_{i,2} + \frac{\lambda_2 k}{M_i} x_{i,2}^2 \text{sign } x_{i,2} \\ &+ \lambda_2 g \sin \alpha - \frac{\lambda_2 p_r^i T_i}{M_i} \\ \dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} \\ \dot{x}_{i,2} &= -\frac{k}{M_i} x_{i,2}^2 \text{sign } x_{i,2} + g \sin \alpha - \frac{p_r^i T_i}{M_i} \\ \Omega_{i,1} &= \delta_i, \quad \Omega_{i,2} = \dot{\delta}_i, \quad x_{i,1} = x_i, \quad x_{i,2} = v_i, \\ \Omega_i &= [\Omega_{i,1} \quad \Omega_{i,2}] \end{aligned} \quad (38)$$

(38)의 차간 거리 오차의 비선형 상태 방정식을 되먹임 선형화 기법을 통하여 선형화하는 되먹임 제어 입력은 (39)와 같다.

$$\begin{aligned} T_i &= \rho_i(\Omega_i, x_i) + \tau_i(\Omega_i, x_i) + \mu(\Omega_i) \\ \rho_i(\Omega_i, x_i) &= \frac{M_i}{\lambda_2 p_r^i} \left( -\frac{\lambda_2 g}{M_i} \sin \alpha - \frac{k \lambda_2}{M_i} x_{i,2}^2 \text{sign } x_{i,2} \right. \\ &\quad \left. - x_{i-1,2} + x_{i,2} \right) \\ \tau_i(\Omega_i, x_i) &= K_{i,1} \Omega_{i,1} + K_{i,2} \Omega_{i,2}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mu(\Omega_i) = \begin{cases} -\chi_i^T (\chi_i \chi_i^T)^{-1} (Q_i(\Omega_i) + \sqrt{Q_i(\Omega_i)^2 + (\chi_i \chi_i^T)^2}), & \chi_i \neq 0 \\ 0, & \chi_i = 0 \end{cases}$$

$$\chi_i = 2\Omega_i^T \begin{bmatrix} 0 \\ P_{i,2} \end{bmatrix}$$

여기서,  $\rho_i(\Omega_i, x_i)$  는 되먹임 선형화 제어 입력이고,  $\tau_i(\Omega_i, x_i)$  는 선형화된 차간 거리 오차 상태 방정식을 안정화하는 제어 입력이다.  $\tau_i(\Omega_i, x_i)$  는 차간 거리 오차 상태에 대하여  $K_{i,1}$  과  $K_{i,2}$  의 안정화 제어 이득을 포함한다.

(39)의 제어 입력  $T_i$  에 첨가된  $\mu(\Omega_i)$  는 차량 하이브리드 시스템의 안정성을 확보하기 위해 다음의 (40)에서 나타난 제어 Lyapunov 함수를 이용하여 IV

장에서 제안한 하이브리드 시스템의 제어 Lyapunov 기법을 적용한 결과이다.  $\mu(\Omega_i)$  의 각 항은 다음의 (41)과 같다.

$$V_{i,j} = \Omega_i^T P_{i,j} \Omega_i, \quad j=1, \dots, N \quad (40)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_{i,1} & K_{i,2} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_i = \begin{bmatrix} P_{i,1} & 0 \\ 0 & P_{i,2} \end{bmatrix}$$

$$Q_i(\Omega_i) = \Omega_i^T \begin{bmatrix} 0 & K_{i,1}P_{i,2} + P_{i,1} \\ K_{i,1}P_{i,2} + P_{i,1} & 2K_{i,2}P_{i,2} \end{bmatrix} \Omega_i \quad (41)$$

**VI. 시뮬레이션 및 결과 고찰**

본 장에서는 V장에서 설계한 군집 차량의 차간 거리 유지를 위한 제어시스템에 대하여 시뮬레이션을 수행하고 그 결과를 고찰한다.

시뮬레이션은 다음 표 1 [8]에 주어진 계수를 동일하게 사용하고, 차량의 기어 변속비는 다음과 같이 둔다.

$$p_1 = 50, p_2 = 32, p_3 = 20, p_4 = 14$$

(39)의 되먹임 선형화 제어기의 제어 이득  $K_{i,1}$  과  $K_{i,2}$  는 모든 차량에 대하여 동일하게 -2와 -3으로 선정하고, 추종 차량의 차간 거리 오차에 관한 제어기는 모든 차량 내에서 V장에서 제안한 하이브리드 제어기를 이용하며,  $i$  번째 차량의 기어 변속에 따른 각 하이브리드 상태의 제어 Lyapunov 함수는 아래와 같이 정의된 계수  $P_{i,j}$  를 이용한 이차식으로 정의한다. 이렇게 정의된 제어 Lyapunov 함수는 정의 3의 조건 2와 정리 2를 만족한다.

$$P_{i,1} = 0.52, P_{i,2} = 0.8, P_{i,3} = 1.2, P_{i,4} = 1.5$$

선행차의 속도 추종 제어기는 다음 (42)와 같이 선정한다.

$$T_1 = T_p + T_l + \frac{k}{p_r} v_1^2 \text{sign } v_1$$

$$T_p = K_r(v_{ref} - v), \quad \dot{T}_l = \frac{K_r}{T_r}(v_{ref} - v_1) \quad (42)$$

여기서,  $K_r = \{3.75, 5.86, 9.37, 13.39\}$ .

시뮬레이션을 수행하기 위해 다음과 같은 상황을 설정한다. 군집 차량의 차량 대수는 3대이며, 선행차의 명령 속도는 30m/s로 설정한다. 또한 추종 차량 2의 초기 차간 거리 오차는 1.5m이며, 추종 차량 3의 초기

표 1. 시뮬레이션 차량 모델의 파라미터.  
Table 1. Parameters of vehicle model.

각 차량의 질량	$M_i = 1500kg$
마찰 계수	$k = 0.7kg/m$
안전 거리 계수	$\lambda_2 = 0.27, \lambda_3 = 0.08$
차량의 길이	$L_i = 10m$
변속 회전각속도(강단)	$\omega_{low} = 230rad/s$
변속 회전각속도(승단)	$\omega_{high} = 500rad/s$

차간 거리 오차는 2.5m로 설정한다.

시뮬레이션 수행 결과는 그림 2에서 그림 7에 도시하였다. 먼저, 그림 2는 선행차의 속도 추종을 나타낸 것으로 선행차의 속도가 완만한 궤적을 그리며 명령 속도 30m/s에 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

그림 3은 선행차 엔진의 각속도 추이를 나타낸 것인데 그림에서와 같이 기어의 변속에 의하여 각속도는 이산적인 거동을 보인다. 그림 4는 선행차의 제어 입력의 추이를 도시한 것인데 제어 입력  $T$ 는 기어 변속비가 변하는 순간 원하는 제어 입력량을 차량에 인가하기 위해 이산적으로 감소하는 특징을 보인다. 기어 변속은 그림 5와 같이 이산적인 거동을 보인다.

그림 6은 선행차와 추종 차량 2 및 추종 차량 3의 차간 거리 오차의 추이를 나타내는 그림이다. 추종 차량 2와 추종차량 3은 각각의 차간 오차를 완만히 감소

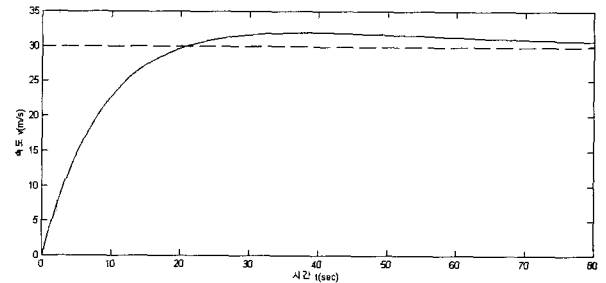


그림 2. 선행차 속도의 시간 추이(명령입력 30m/s).  
Fig. 2. Velocity profile of leader vehicle.

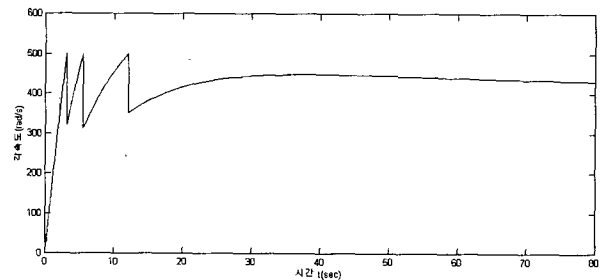


그림 3. 선행차 엔진 각속도의 시간 추이.  
Fig. 3. Angular velocity for leader vehicle of engine.

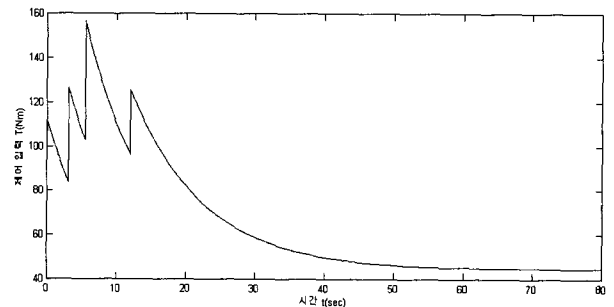


그림 4. 선행차에 인가되는 제어 입력의 시간 추이.  
Fig. 4. Input profile for leader vehicle.



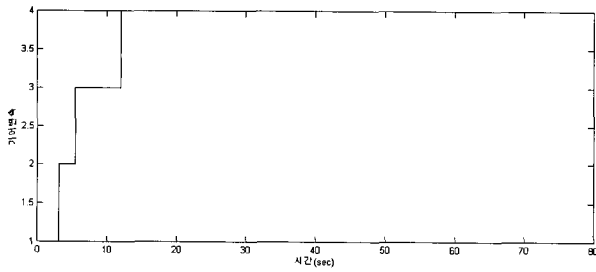


그림 5. 선행차의 기어 변속.  
Fig. 5. Gear change of leader vehicle.

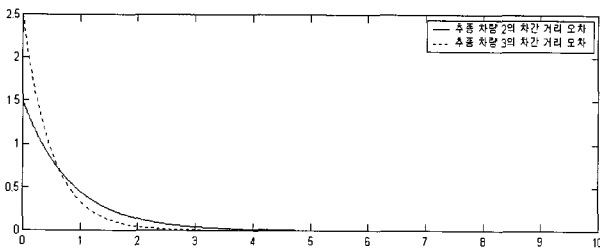


그림 6. 추종 차량에 대한 차간 거리 오차의 시간 추이.  
Fig. 6. Distance error of following vehicle.

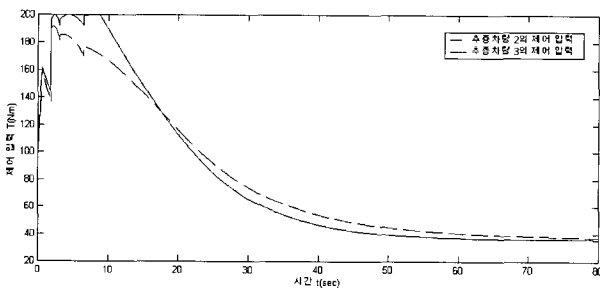


그림 7. 각 추종 차량에 인가되는 제어 입력의 시간 추이.  
Fig. 7. Input profile for each following vehicle.

시켜 원하는 안전 거리를 추종하는 것을 확인할 수 있다. 마지막으로, 그림 7은 각 추종 차량의 제어 입력이 이산적으로 변하는 시간 추이를 나타낸 그림이다.

**VII. 결론**

본 논문은 제어 Lyapunov 함수 기법에 기반을 둔 하이브리드 시스템의 안정화 제어기 설계 기법을 제안하였다. 제안된 기법은 하이브리드 시스템의 안정성을 보장하기 위해 Lyapunov 함수가 제한 조건을 만족해야 하는 보수적인 제약에 대하여 제어 Lyapunov 함수 기법의 특정한 제어기 구조를 이용해 전체 페루프 하이브리드 시스템의 안정성을 보장할 수 있는 일반적인 비선형 벡터 필드를 가지는 하이브리드 시스템의 안정화 제어기 설계 알고리즘이다.

또한 본 논문에서는 제안된 하이브리드 시스템의 안정화 제어기 설계기법을 지능형 교통 시스템 분야 중 하나인 군집 차량의 차량간 종방향 거리 유지를 위한 제어기 설계에 대하여 응용하여 그 유용성을 검증하였다.

**참고문헌**

- [1] R. Brockett, "Hybrid systems in classical mechanics," *Proceedings of the 13<sup>th</sup> IFAC World Congress*, pp. 473-476, June, 1996.
- [2] R. Alur, C. Courcoubetis, T. A. Henzinger, and P.-H. Ho, "Hybrid automata: An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems," *Proceedings of the Workshop on Theory of Hybrid Systems*, Lyngby, Denmark, pp. 209-229, 1992.
- [3] C. G. Cassandras, *Discrete Event Systems, Modeling and Performance Analysis*, Aksen Associates and Irwin, 1993.
- [4] A. Gollu and P. Varaiya, "Hybrid dynamical systems," *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, pp. 2708-2712, December, 1989.
- [5] M. S. Branicky, V. S. Borkar, and S. K. Mitter, "A unified framework for hybrid control," *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, Florida, pp. 3498-3503, December, 1994.
- [6] M. Andersson, *Object-Oriented Modeling and Simulation of Hybrid Systems*, Ph.D. Thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1994.
- [7] F. E. Cellier, *Combined Continuous/Discrete System Simulation by Use of Digital Computers: Techniques and Tools*, Ph.D. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, 1979.
- [8] S. Pettersson, *Analysis and Design of Hybrid Systems*, Ph.D. Thesis, Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1999.
- [9] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, pp. 475-482, 1998.
- [10] B. Lennartson, M. Tittus, B. Egardt, and S. Pettersson, "Hybrid systems in process control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 16, no. 5, pp. 45-55, 1996.
- [11] H. Ye, A. N. Michel, and L. Hou, "Stability theory for hybrid dynamical systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 4, pp. 461-474, 1998.
- [12] M. Dogruel and Uozguner, "Stability of hybrid systems," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 129-134, 1994.

- [13] M. S. Branicky and S. M. Mitter, "Algorithms for optimal hybrid control," *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, pp. 2661-2666, December, 1995.
- [14] A. S. Morse, "Control using logic-based switching," In *Trends in Control: A European Perspective*, Springer-Verlag, pp. 69-113, 1995.
- [15] C. Horn and P. J. Ramadge, "Robustness issues for hybrid systems," *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, pp. 1467-1472, December, 1995.
- [16] M. V. Mohrenschild, "Hybrid systems: Solutions, stability, control," *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, Chicago, pp. 692-
- 698, June, 2000.
- [17] R. K. Yedavalli and A. G. Sparks, "Satellite formation flying control design based on hybrid control system stability analysis," *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, Chicago, pp. 2210-2214, June, 2000.
- [18] E. D. Sontag, "A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability," *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 21, pp. 462-471, 1983.
- [19] P. A. Ioannou and C. C. Chien: "Autonomous intelligent cruise control," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 42, no. 4, pp. 657-672, November, 1993.



김진변

1998년 부산대 제어기계공학과 졸업. 동대학원 석사(2000), 2000년~현재 Top-ranker.com 정보기술연구소 근무. 관심분야는 하이브리드 제어, 차량제어 시스템, 분산처리 콤보넌트 시스템.



김영호

1982년 서울대 컴퓨터공학과 졸업. 동 대학원 석사(1984). 동대학 박사(1991). 1989~현재 부산대학교 전자전기정보공학부 교수. 관심분야는 High-Tech Information System, Time Synchronization, Parallel Processing, Micro Robot Control.



최재원

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1989), 동대학원 박사(1995). 1995.2-1995.3 일본 NA-SDA/TKSC방문연구원. 1995.9~1996.3 미국 USC 방문연구원. 1998.1~1998.2 미국

LSU 방문연구원. IFAC 항공우주 및 선형시스템 기술분과운영위원. 1996년~현재 부산대학교 기계공학부 조교수. 관심분야는 견실 고유구조 지정 이론, 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템, 표적추적필터.