

근사 관측기 형태를 이용한 비선형 시스템의 관측기

An Observer for Nonlinear Systems Using Approximate Observer Form

이 성 렬, 신 현 석, 박 민 용
(Sungryul Lee, Hyunseok Shin, and Mignon Park)

Abstract : This paper presents a state observer for nonlinear systems using approximate observer form. It is shown that if a nonlinear system is approximately error linearizable, then there exists a local nonlinear observer whose estimation error converges exponentially to zero. Since the proposed method relaxes strong geometric conditions of previous works, it improves the existing results for nonlinear observer design. Finally, some example is given to show the effectiveness of this scheme.

Keywords : nonlinear observer, approximate observer form, nonlinear systems

I. 서론

지난 10년 동안, 비선형 시스템의 상태 관측기 설계는 비선형 제어에서 가장 활발히 연구되고 있는 분야 중의 하나이다. 초기의 비선형 관측기 연구는 미분 기하학 이론을 이용하여 선형의 오차 다이내믹스를 가질 수 있는 시스템의 기하학적인 조건을 확립하는데 집중되었다. 이 분야의 최초의 연구로서 Krener는 오차선형화기법을 이용하여 선형 오차다이내믹스를 갖는 비선형 관측기를 설계할 수 있음을 보였다[1]. 또한, Marino는 Krener의 연구를 확장하여 불확실한 파라미터가 존재하는 단일 입출력 비선형 시스템에 대하여 상태 변수와 파라미터를 동시에 추정하는 적응 관측기에 대한 연구를 수행하였다[2]. Keller는 확장된 비선형 관측기 형태에 기반한 관측기 설계 방법을 제시하여 기존의 연구 결과를 확장하였다[3]. 미분 기하학이론에 기반한 초기의 연구들은 일반적인 비선형 시스템에서 만족하기 어려운 강한 기하학적인 조건을 필요로 하고 좌표변환의 계산이 매우 어려운 단점으로 인해 실제 시스템에 적용하기가 힘들다. 최근 들어 이러한 단점을 극복하기 위해 주로 대수적인 방법을 이용하여 접근하는 기법들이 제안되고 있다. Gauthier는 비선형 시스템이 임의의 입력에 대하여 관측가능할 조건을 유도하였고 이런 종류의 비선형 시스템에 대하여 리아푸노프 형태의 방정식을 이용하여 결정되는 이득을 갖는 비선형 관측기를 제안하였다[4]. Ciccarella는 피드백 선형화 가능한 시스템에 대하여 기존의 연구보다 완화된 제약조건하에서 대수적인 방법을 이용하여 지수적 수렴성을 보장하는 Luenberger형태의 비선형 관측기를 제안하였다[5]. Nam H. Jo는 근사 피드백 선형화에 기반하여 상대차수가 정의되지 않는 비선형 시스템으로 Ciccarella의 연구결과를 확장시켰다[6]. K. Nam은 기존의 비선형 관측기 형태를 근사화하여 완화된 약 조건을 유도하였고 이에 기반한 근사 관측기를 제안하였다[7]. 또한, Esfandiari와 Khalil은 고이득 관측기를 이용하여 출력

피드백을 이용한 비선형 시스템의 안정화 문제를 다루었다 [8][9]. 이들이 이용한 고이득 관측기는 모델의 불확실성에 강한 특성을 가지고 있어 비선형 시스템의 출력 피드백 제어에 많이 이용되고 있다. 본 논문에서는 K. Nam이 제안한 근사 관측기 형태에 기반한 Luenberger형태의 비선형 관측기를 제안한다. 이것은 기존의 Krener에 의해 개발된 오차선형화 기법의 강한 기하학적 조건을 완화함과 동시에 대수 방정식의 해를 구함으로써 비선형 좌표변환을 쉽게 유도할 수 있다는 장점을 가진다. 또한, 비선형 고차항에 대해 일반적으로 성립하는 대수적 가정을 이용하여 국부적인 영역에서 추정오차가 임의의 주어진 속도로 지수함수적으로 수렴함을 증명한다. 마지막으로 시뮬레이션 예제를 통해 본 논문의 타당성을 입증하고 기존의 연구결과를 확장하고 있음을 확인한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 본 논문의 주요 결과를 증명하기 위해 필요한 기존의 연구결과 및 보조정리를 제시하며, 3장에서는 본 논문에서 제안한 관측기의 설계 방법과 안정도 해석을 제시한다. 4장에서는 시뮬레이션 예제를 통해 제안한 관측기의 타당성을 검증하고, 5장에서 결론을 맺는다.

II. 기존의 연구 결과

본 논문에서는 다음 (1)과 같은 단일 입출력 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

위 식에서 $x \in R^n$ 는 시스템의 상태 벡터, $u \in R$ 는 입력, $y \in R$ 는 출력을 나타낸다. f 와 g 는 충분히 미분 가능한 벡터필드이며, h 는 충분히 미분가능한 함수이다. 또한, $f(x_e) = 0, h(x_e) = 0$ 라고 가정한다. 즉, x_e 는 입력이 없을 때 비선형 시스템 (1)의 평형점임을 의미한다. 다음에서는 논문의 주요 결과를 증명하기 위해 필요한 기존의 연구 결과를 소개한다.

정의 1 [7] : 단일 입출력 비선형 시스템 (1)을 근사 관측기 형태 (2)으로 변환시키는 국부적 디퍼모피즘 $\Phi : U_{x_e} \rightarrow V_0, z = \Phi(x)$ 이 존재한다면 시스템을 m 차 근사

접수일자 : 2000. 9. 14., 수정완료 : 2001. 3. 5.

이성렬, 신현석, 박민용 : 연세대학교 전기전자공학과(srlee@yeics.yonsei.ac.kr/hseokshin@yeics.yonsei.ac.kr/mignpark@yonsei.ac.kr)

오차선형화 가능하다고 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + q_a^m(y) + q_b^{m-1}(y)u + O_u(z^m) \\ y &= Cz \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 U_{x_e} 는 x_e 를 포함하는 개집합을, V_0 는 U_{x_e} 에 대한 \emptyset 의 상을 의미한다. $a_i, b_i \in R^n$ 에 대하여 $q_a^m(y), q_b^{m-1}(y), O_u(z^m)$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} q_a^m(y) &\equiv a_1y + \dots + a_my^m \\ q_b^{m-1}(y) &\equiv b_0 + \dots + b_{m-1}y^{m-1} \\ O_u(z^m) &\equiv O(z^{m+1}) + O(z^m)u \\ O(z^{m+1}) &\equiv \{ \varphi(z) \mid \lim_{\|z\| \rightarrow 0} \|\varphi(z)\| / \|z\|^{m+1} < \infty \} \end{aligned}$$

또한, 행렬 A, C 는 다음과 같다

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, C \equiv [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

위 정의는 K. Nam에 의해 개발된 기법으로서 기존의 오차선형화 기법이 요구하는 강한 제약조건을 완화시켰으며 좌표변환을 풀기 힘든 편미분방정식 대신에 간단한 대수방정식을 이용하여 유도할 수 있다는 점에서 장점을 가진다. (2)에서 $O_u(z^m) = 0$ 이면 위 식은 비선형 관측기 형태라고 부르고 선형 오차 다이내믹스를 갖는 비선형 관측기를 설계할 수 있다. 따라서, 이 방법은 오차선형화 기법을 확장하고 있음을 알 수 있다. 다음 정리에서는 단일 입출력 비선형 시스템 (1)이 근사 오차선형화 가능할 필요충분조건을 제공한다.

정리 1 [7]: 비선형 시스템 (1)이 m 차 근사 오차선형화 가능할 필요충분조건은 1-형식(one-form) w^1, \dots, w^n 이 다음 조건을 만족하면 된다.

- 1) 행렬 $Q(x_e)$ 가 비특이하다.
- 2) $2 \leq k \leq n-1$ 에 대하여 $dw^k = 0 + O((x-x_e)^{m-1})$
- 3) $1 \leq k \leq n$ 에 대하여 $L_g w^k \wedge dh = 0 + O((x-x_e)^{m-1})$

여기서 $Q(x), w^i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} Q(x) &\equiv \begin{bmatrix} dh(x) \\ L_f dh(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} dh(x) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix} &\equiv [ad_{-f}^{n-1} p(x) \ \dots \ p]^{-1} \\ p(x) &\equiv Q(x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

위 식에서 사용한 연산은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L_g h &\equiv \frac{\partial h}{\partial x} g, L_f^j h \equiv L_f L_f^{j-1} h \\ ad_f g &\equiv L_f g - L_g f, ad_f^n g \equiv ad_f ad_f^{n-1} g \end{aligned}$$

증명 : [7]을 참조. ■

보조정리 1 [5]: 음이 아닌 스칼라 함수 $m(t)$ 와 상수 $\eta > 0$ 가

$$m(t) \leq e^{\lambda t} m(0) + \eta \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} m(\tau) d\tau \quad (3)$$

을 만족하면 다음 식이 성립한다.

$$m(t) \leq e^{(\lambda + \eta)t} m(0)$$

증명 : [5]를 참조. ■

보조정리 2 [10]: 개집합 $D \subset R^n$ 위에서 정의된 벡터 함수 $f: D \rightarrow R^n$ 이 연속적으로 미분 가능하다고 가정하자. 만약 D 내부의 모든 x 에 대하여 $\partial f / \partial x$ 가 존재하며 연속이라면, 벡터함수 f 가 개집합 D 위에서 국부적으로 Lipschitz하다.

증명 : [10]을 참조. ■

보조정리 1은 Gronwall의 부등식으로 알려진 정리로서, 적분 부등식으로부터 어떤 주어진 함수의 한계를 유도하는데 유용하다. 또한 본 논문에서 관측기의 추정 오차의 지수함수적 수렴성을 증명하는데 사용한다. 보조정리 2는 충분히 미분 가능한 함수는 컴팩트한 집합 위에서 국부적으로 Lipschitz한 성질을 가짐을 보여준다. 즉, 벡터함수 f 가 충분히 미분가능하면 상수 $r > 0, L > 0$ 에 대하여 D 의 부분 집합 $D_0 = \{x \in D \mid \|x - x_0\| \leq r, x_0 \in D\}$ 가 존재하여 모든 $x, y \in D_0$ 에 대하여 다음 (4)가 성립한다.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \quad (4)$$

III. 관측기 설계 및 안정도 해석

본 절에서는 근사 관측기 형태로 변환 가능한 비선형 시스템에 대해 Luenberger 형태의 관측기를 설계하고 비선형 항의 Lipschitz가정을 통해 관측기의 추정오차가 지수함수적으로 0으로 수렴함을 보인다. 먼저 안정도 증명에 필요한 보조정리를 제시한다. 증명은 [5]의 보조정리 1로부터 쉽게 얻을 수 있다.

보조정리 3 : 다음 (5)와 같은 Vandermonde행렬에 대하여

$$V(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^{n-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^{n-1} & \lambda_n^{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

임의의 상수 $a > 0$ 가 주어진다면 아래조건 1), 2)를 만족하는 상수 $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \dots < \lambda_1 < 0$ 와 $c > 0$ 가 항상 존재한다.

- 1) 상수 $N > 1$ 에 대하여 $\|V^{-1}(\lambda)\| \leq N$
- 2) $\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\| \|V(\lambda)\| c = -a$

증명 : [5]의 보조 정리 1로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 임의의 주어진 $a > 0, N > 1$ 과 상수 $c = 1$ 에 대하여 $\|V^{-1}(\lambda)\| \leq N$ 와 $\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\| = -a$ 를 동시에 만족하는 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ 가 존재한다. 여기서 위의 조건식 2)에서 $c = 1 / \|V(\lambda)\|$ 으로 놓으면 위 사실로부터 이 정리는 쉽게 증명된다. ■

정리 2 : (1)과 같은 비선형 시스템이 개집합 $U \subset R^n$ 의 모든 x 에서 m 차 근사 오차선형화 가능하다고 가정하자.

만약 적당한 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$ 와 이득행렬 $K \in R^n$ 이 존재하여 시스템 (1)이 다음 두 가지 조건 1), 2)를 만족하면,

- 1) 모든 $t \geq 0$ 에 대하여, $x(t) \in B_{\delta_1}, u(t) \in B_{\delta_2}$,

여기서 $B_\delta = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq \delta\}$.

- 2) $\|\hat{x}(0) - x(0)\| \leq \delta_3$.

다음 (6)와 같은 비선형 관측기의 추정오차가 지수 함수적으로 0으로 수렴한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + q_a^m(y) + q_b^{m-1}(y)u + O_u^m(\hat{z}) + K(y - C\hat{z}) \\ \hat{x} &= \Phi^{-1}(\hat{z}) \end{aligned} \quad (6)$$

증명 : 비선형 시스템 (1)이 m 차 근사 오차선형화 가능하다고 가정하면 정의 1에 의해 새로운 좌표계 $z = \Phi(x)$ 에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + q_a^m(y) + q_b^{m-1}(y)u + O_u(z^m) \\ y &= Cz \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ 를 $(A-KC)$ 의 고유값들로 이루어진 벡터로 정의하면 행렬 $(A-KC)$ 은 동반(companion)행렬이므로 (5)와 같은 Vandermonde 행렬을 이용하여 대각행렬로 변환할 수 있다. 따라서 아래 (8)은 선형이론으로부터 쉽게 얻을 수 있다.

$$e^{(A-KC)t} = V^{-1}(\lambda)e^{At}V(\lambda) \quad (8)$$

여기서 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. 또한, 보조정리 3으로부터 주어진 $\alpha > 0$ 에 대하여 다음 두 가지 조건을 만족하는 벡터 λ 와 상수 $\gamma > 0$ 가 존재한다.

- 1) $\|V^{-1}(\lambda)\| \leq N$
- 2) $\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\| \|V(\lambda)\| \gamma = -\alpha$

이제 증명에서 필요한 몇 가지 상수들을 정의해보자. 먼저 $B_{r_1} \subset U$ 인 $r_1 > 0$ 을 선택한다. $O_u(z^m)$ 가 $\Phi(U)$ 에서 충분히 미분 가능하므로 보조정리 2로부터 다음 두 가지 성질을 만족하는 $r_2 > 0$ 와 $0 < M < \gamma$ 을 구할 수 있다.

- 1) $B_{(N+1)r_2} \subset \Phi(U)$ 이고 $\Phi^{-1}(B_{(N+1)r_2}) \subset B_{r_1}$
- 2) 만약 $z, \hat{z} \in B_{(N+1)r_2}$ 이면

$$\sup_{u \in B_{\delta_2}} \|O_u(\hat{z}^m) - O_u(z^m)\| \leq M \|\hat{z} - z\|$$

또한, 다음 각 조건을 만족하도록 상수 $\delta_1 > 0, \delta_3 > 0$ 를 선택한다.

- 1) $B_{\delta_1} \subset U$ 이고 $\Phi(B_{\delta_1}) \subset B_{r_2}$.
- 2) 만약 $\|\hat{x}(0) - x(0)\| \leq \delta_3$ 이 성립하면

$$\|\hat{z}(0) - z(0)\| \leq \min(r_2, r_2 / \|V(\lambda)\|).$$

지금까지 정의한 상수들을 가지고 정리에서 제시한 가정 1), 2)가 만족되면, 가정의 결과로서 다음과 같은 사실을 쉽게 얻는다.

$$z(t) \in B_{r_2}, \forall t \geq 0.$$

이제 관측기의 추정오차를 다음과 같이 정의하자

$$e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$$

그러면 오차방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\dot{e}(t) = (A-KC)e + O_u(\hat{z}^m) - O_u(z^m) \quad (9)$$

위 (9)의 양변을 적분하고 (8)을 이용하면 다음을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\lambda)e(t) &= e^{At}V(\lambda)e(0) \\ &+ \int_0^t e^{A(t-\tau)}V(\lambda)[O_u(\hat{z}^m(\tau)) - O_u(z^m(\tau))]d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

위 (10)의 양변에 놈(norm)을 취하고 전개하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \|V(\lambda)e(t)\| &\leq e^{\lambda_1 t} \|V(\lambda)e(0)\| + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \|V(\lambda)\| \|O_u(\hat{z}^m) - O_u(z^m)\| d\tau \\ &\leq e^{\lambda_1 t} \|V(\lambda)e(0)\| + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \|V(\lambda)\| M \|e(\tau)\| d\tau \\ &\leq e^{\lambda_1 t} \|V(\lambda)e(0)\| + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \|V\| \|V^{-1}\| M \|V(\lambda)e(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

위 (11)에서 보조정리 1과 3을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \|V(\lambda)e(t)\| &\leq \|V(\lambda)e(0)\| e^{(\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\| \|V(\lambda)\|)Mt} \\ \|e(t)\| &\leq \|V^{-1}\| \|V(\lambda)e(t)\| \\ &\leq \|V^{-1}(\lambda)\| \|V(\lambda)e(0)\| e^{(\lambda_1 + \|V^{-1}\| \|V\| M)t} \\ &\leq N \|V(\lambda)\| \|e(0)\| e^{(\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\| \|V(\lambda)\| \gamma)t} \\ &\leq N \|V(\lambda)\| \|e(0)\| e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

정리에서 가정한 조건들과 위 결과를 관찰하면 $\hat{z}(t) \in B_{(N+1)r_2}, \forall t \geq 0$ 임을 알 수 있고 이것은 $\hat{x}(t) \in B_{r_1} \subset U, \forall t \geq 0$ 을 의미한다. 마지막으로 Φ 와 Φ^{-1} 가 각각 U 와 $\Phi(U)$ 에서 충분히 미분가능하기 때문에 보조정리 2로부터 다음을 만족하는 상수 $l_\Phi > 0, l_{\Phi^{-1}} > 0$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned} \|\Phi(\hat{x}) - \Phi(x)\| &\leq l_\Phi \|\hat{x} - x\|, \forall \hat{x}, x \in B_{r_1} \\ \|\Phi^{-1}(\hat{z}) - \Phi^{-1}(z)\| &\leq l_{\Phi^{-1}} \|\hat{z} - z\|, \forall \hat{z}, z \in B_{(N+1)r_2} \end{aligned}$$

위 식을 이용하면 다음 결과를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t) - x(t)\| &\leq l_{\Phi^{-1}} \|\hat{z}(t) - z(t)\| \\ &\leq l_{\Phi^{-1}} N \|V(\lambda)\| \|e(0)\| e^{-\alpha t} \\ &\leq N l_{\Phi^{-1}} l_\Phi \|V(\lambda)\| \|\hat{x}(0) - x(0)\| e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

따라서 관측기의 추정오차가 지수함수적으로 0으로 수렴한다. ■

보조정리 4 : 근사 관측기 형태로 변환 가능한 비선형 시스템 (1)에 대하여 $O_u(z^m) = 0$ 이라면 제안된 비선형 관측기 (6)은 선형 오차 다이내믹스를 갖는 관측기가 된다.

증명 : $O_u(z^m) = 0$ 이면 비선형 관측기 (6)은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + q_a^m(y) + q_b^{m-1}(y)u + K(y - C\hat{z})$$

따라서, 아래와 같은 선형 오차다이내믹스를 갖고 추정오차는 지수함수적으로 0으로 수렴한다. ■

$$\dot{e}(t) = (A-KC)e$$

위 보조정리 4는 널리 알려진 오차선형화기법의 결과와 같다. 따라서 본 논문에서 제안한 관측기는 기존의 오차선형화에 기반한 결과를 확장함과 동시에 기존의 제약을 완화시킬 수 있다. 또한 근사 선형화의 차수가 높아질수록 오차다이나믹스의 수렴영역이 더 넓어진다. 그러나 Ciccarella의 연구결과 보다는 더 강한 조건을 필요로 한다.

IV. 시뮬레이션 예제

(12)와 같은 단일 입출력 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2(1+x_1^2) \\ -2x_1x_2^2+3x_1+x_2^3x_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1^3x_2^2 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $x = [x_1 \ x_2]^T \in R^2$ 는 상태 벡터, $u \in R$ 는 시스템의 입력, $y \in R$ 는 시스템의 출력을 나타낸다.

[7]에서 위와 같은 비선형 시스템 (12)가 모든 점 $x \in R^2$ 에서 5차까지 근사 오차 선형화 가능함을 증명했다. [7]에서 주어진 다음 식과 같은 좌표 변환을 이용하면

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2(1+x_1^2) \end{bmatrix}$$

비선형 시스템 (12)를 다음 (13)과 같은 근사 관측기 형태로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 3z_1(1+z_1^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+z_1^2 \end{bmatrix} u \\ &+ O_u(z^5) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $O_u(z^5)$ 는 다음 (14)과 같이 나타나고 보조정리 2에 의해 임의의 컴팩트한 집합의 모든 점에서 Lipschitz함을 알 수 있다.

$$O_u(z^5) = \frac{z_1^3 z_2^3}{(1+z_1^2)^2} + \frac{z_1^3 z_2^2}{(1+z_1^2)} u \quad (14)$$

따라서, 정리 2에 의해 제안된 관측기는 다음 (15)와 같이 설계된다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3\hat{z}_1(1+\hat{z}_1^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\hat{z}_1^2 \end{bmatrix} u \\ &+ O_u(\hat{z}^5) + K(y - C\hat{z}) \end{aligned} \quad (15)$$

또한, (13)은 근사 선형화된 형태이므로 [11]의 결과를 이용하면 시스템의 출력이 $0.5 \sin \pi t$ 를 근사적으로 추적하도록 다음 (16)과 같은 비선형 출력 추종제어기를 설계할 수 있다.

$$u = \frac{1}{1+\hat{z}_1^2} \left[-7\hat{z}_1 - 3\hat{z}_1^3 - 4\hat{z}_2 + \left(2 - \frac{\pi^2}{2} \right) \sin \pi t + 2\pi \cos \pi t \right] \quad (16)$$

따라서, 시스템 (12)와 제어입력 (16)은 정리 2의 조건들을 만족하므로 관측기의 추정오차를 지수 함수적으로 수렴시키는 이득행렬 K 가 존재한다.

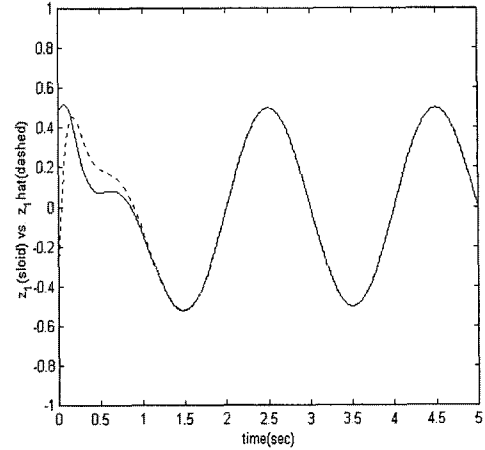


그림 1. 실제값 z_1 과 추정값 \hat{z}_1 .
Fig. 1. True state z_1 and estimated state \hat{z}_1 .

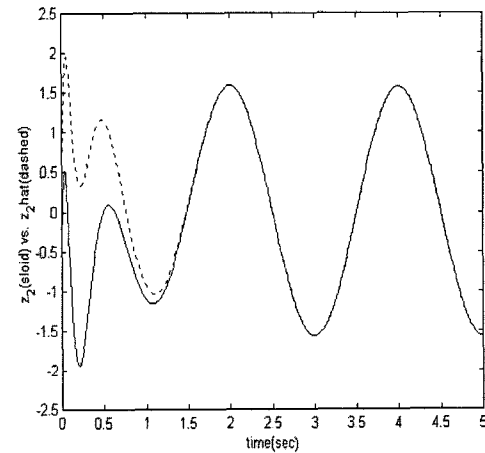


그림 2. 실제값 z_2 과 추정값 \hat{z}_2 .
Fig. 2. True state z_2 and estimated state \hat{z}_2 .

그림 1과 그림 2는 각각 시스템의 상태 변수 z_1 과 z_2 의 실제값(실선)과 추정값(점선)에 대한 시뮬레이션 결과를 보여주고 있다. 시스템의 초기값은 $z_1(0)=0.5, z_2(0)=-0.5$ 로 설정하였고 관측기 초기값은 $\hat{z}_1(0)=-0.3, \hat{z}_2(0)=0.3$ 로 설정하였다. 이득 행렬은 $\lambda_1=-5, \lambda_2=-7$ 이 되도록 $K=[12 \ 35]^T$ 로 설계 하였다. 약 2초 후에는 모든 추정값이 실제값으로 수렴함을 알 수 있고 시스템의 출력은 원하는 궤적을 추적하고 있음을 확인할 수 있다. 그림 3과 그림 4는 각각 z_1 과 z_2 의 관측기의 이득에 따른 추정오차를 보여주고 있다. 실선은 이득이 $K=[12 \ 35]^T$ 인 경우이고 점선은 $K=[22 \ 120]^T$ 인 경우의 시뮬레이션 결과이다. 이득이 큰 경우 수렴속도는 빠른 반면에 큰 오버슈트를 보이고 있다. 초기값은 그림 1, 2와 같은 값을 사용하였다.

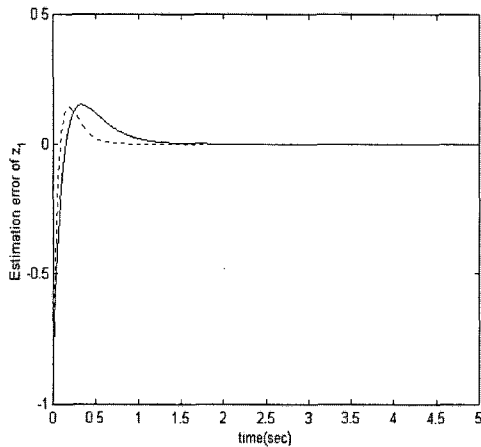


그림 3. 이득에 따른 z_1 의 추정오차.
Fig. 3. Estimation error of z_1 w.r.t an observer gain.

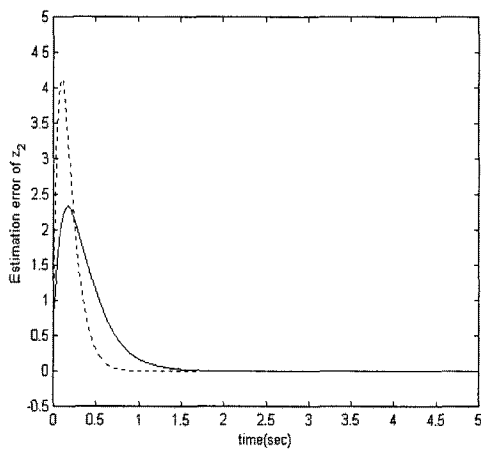


그림 4. 이득에 따른 z_2 의 추정오차.
Fig. 4. Estimation error of z_2 w.r.t an observer gain.

V. 결론

본 논문에서는 비선형 시스템의 관측기 설계 문제가 다루어졌다. 제안한 비선형 관측기는 최근에 개발된 근사 관측기 형태에 기반하여 설계된다. 또한 이 관측기의 추정오차가 임의로 주어진 수렴속도를 가지고 지수 함수적으로 0으로 수렴함이 보여졌다. 제안된 방법은 오차 선형화 기법의 강한 제약 조건을 완화함으로써 오차 선형화가 불가능한 시스템에 적용 가능하다는 점에서 장점을 가진다. 오차

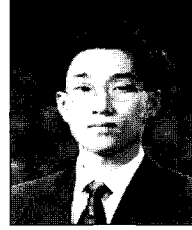
선형화는 근사 오차 선형화 가능한 차수를 무한대로 증가한 경우로 볼 수 있으므로 제안된 비선형 관측기는 오차 선형화에 기반한 관측기를 포함하며, 자코비언 선형화에 기반한 선형 관측기보다는 더 넓은 수렴반경을 갖는다. 추후 과제로서는 이 관측기를 이용한 비선형 시스템의 출력피드백 제어기의 설계 및 안정도 해석을 포함한다.

참고문헌

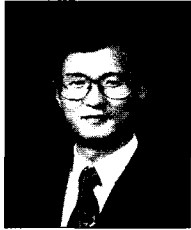
[1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 2nd ed. Berlin : Springer-Verlag, 1989.
 [2] R. Marino, "Adaptive observers for single output nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 1054-1058, 1990.
 [3] H. Keller, "Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form," *Int. J. Contr.*, vol. 46, pp. 1915-1930, 1987.
 [4] J. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 6, pp. 875-880, 1992.
 [5] G. Ciccarella, M. Dallamora, and A. Germani, "A luenberger-like observer for nonlinear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 57, no. 3, pp. 537-556, 1993.
 [6] Nam H. Jo and Jin H. Seo, "A state observer for nonlinear systems and its application to ball and beam system," *IEEE, Trans. Automat. Contr.* vol. 45, no. 5, pp. 968-973, 2000.
 [7] K. Nam, "An approximate nonlinear observer with polynomial coordinate transformation maps," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 4, pp. 522-527, 1997.
 [8] F. Esfandiari and H. K. Khalil, "Output feedback stabilization of fully linearizable systems," *Int. J. Contr.*, vol. 56, no. 5, pp. 1007-1037, 1992.
 [9] H. K. Khalil and F. Esfandiari, "Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. 38, no. 9, pp. 1412-1415, 1993.
 [10] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed., Prentice Hall, 1996.
 [11] J. Hauser, "Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 392-398, 1992.

**이 성 렬**

1973년 1월 7일생. 1996년 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1998년 동대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1998년~현재 동대학원 전기전자공학과 박사과정 재학중. 관심분야는 비선형제어, 적응제어, 로보틱스.

**신 현 석**

1972년 5월 28일생. 1996년 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1998년~현재 동대학원 전기전자공학과 박사과정 재학중. 관심분야는 비선형제어, 로보틱스, 지능제어.

**박 민 용**

1950년 9월 6일생. 1973년 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1977년 동대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1982년 동경대학교 전자공학과 졸업(공학박사). 1982년~현재 연세대학교 기계전자공학부 교수. 관심분야는 퍼지

제어 및 응용, 로보틱스, 의용공학.