

Lyapunov 부등식을 이용한 페루프시스템의 주파수하중 제어기 차수축소

Frequency Weighted Controller Reduction of Closed-Loop System Using Lyapunov Inequalities

오도창, 정은태, 이갑래, 김종해, 이상경

(Do-Chang Oh, Eun-Tae Jeung, Kap-Rai Lee, Jong-Hae Kim, and Sang-Kyung Lee)

Abstract : This paper considers a new weighted model reduction method using block diagonal solutions of Lyapunov inequalities. With the input and/or output weighting function, the stability of the reduced order system is guaranteed and an a priori error bound is proposed. To achieve this, after finding the solutions of two Lyapunov inequalities and balancing the full order system, we find the reduced order systems using the direct truncation and the singular perturbation approximation. The proposed method is compared with other existing methods using numerical examples.

Keywords : weighted model reduction, Lyapunov inequalities, block diagonal solutions, a priori error bound, stability, DT, SPA

I. 서론

모델 차수축소법은 과거 약 30동안 많이 연구되어 왔고 많은 방법들이 제안되어 왔다. 이는 고전적인 제어방법에서 고차의 플랜트를 다루기 힘들기 때문에 이용되기도 하였지만, LQG 혹은 H^∞ 과 같은 현대제어방법에서는 고차의 플랜트로부터 구해진 고차의 제어를 축소하기 위한 연구들이 주로 많았다[1]. 이중 대표적인 방법으로는 직접절단(Direct Truncation: DT)[2]과 Hankel 노음 근사화[3] 및 특이섭동근사(Singular Perturbation Approximation: SPA)[4] 등이 있으며 이들은 모두 Lyapunov 방정식의 해를 이용한 균형구현(balanced realization)이론에 근거하고 있으며 Hankel 특이치를 이용하여 오차한계치를 구할 수 있다. 또한 LMI(Linear Matrix Inequality)를 이용한 최적의 축소모델을 구하려는 연구도 진행중이나 반복적인 방법(iterative method)이며 수렴성 또한 보장이 되지 않는 등 매우 제한적이다[5]. 한편 DT에 의한 축소모델은 '∞'주파수에서 원래의 모델과 일치하며 SPA에 의한 축소모델은 '0'주파수에서 원래의 모델과 일치하는 특성을 가진다[4]. 따라서 고주파 특성이 중요할때는 DT를 사용하고 저주파 특성이 중요할때는 SPA를 사용한다. Enns[6]는 이러한 DT방법을 주파수하중함수를 가지는 가중적 차수축소(weighted reduction)로 확장하였다. 이때 입·출력 하중함수 및 모델은 모두 RH^∞ 에 속하는 안정한 함수들

이어야 한다. 그 이후 이 가중적 차수축소법의 안정성을 증명하고 오차한계치를 구하려는 노력들이 이루어 졌다[7]. 그러나 입력하중함수 혹은 출력하중함수중 하나만을 가지는 경우에 대해서는 안정성이 보장되나 입·출력 모두 하중함수를 가질 경우에는 불안정해질 수도 있다[8]. Sreeram[8] 등은 새로운 가중적 차수축소법을 제안하고 오차한계치를 구했으나 이 또한 반복적으로 구하는 단점을 가지는 방법이었다. 또한 Enns의 방법에서 오차한계치를 구한 Kim[7] 등의 방법도 저차 모델들의 ∞-노음을 많이 계산해야 하는 단점을 가지고 있다. Wang[9] 등은 최근 Enns의 방법을 변형한 새로운 가중적 차수축소법을 제안하고 오차의 한계치를 구하였다. 이 방법은 입·출력하중함수를 모두 가지는 경우에 대해서도 안정성이 보장되며, 오차한계치도 구할 수 있을 뿐만 아니라 다른 방법에 비해 매우 작은 등 많은 장점을 가지고 있다. 그러나 이 방법에서도 4개의 Lyapunov 방정식과 특이치분해의 과정을 포함하는 등 계산량이 많고 과정이 비교적 복잡하다.

본 논문에서는 입·출력으로 가중된 모델에 대해 두 Lyapunov 부등식에서 블럭대각해가 항상 존재함을 보이고, 이를 이용하여 가중적 차수축소를 제안한다. 먼저 가중된 모델에 대해 MATLAB을 이용하여 LMI의 블럭대각해를 구하고[10], 이로부터 균형구현을 구하여 DT와 SPA에 의한 축소모델을 구한다. 이로부터 축소모델의 입·출력하중함수를 모두 가지는 경우에 대해서 안정성과 오차한계치를 보이기 위해 Zhou[11]와 Oh[12]등의 구조적으로 균형화된 제어기 차수축소법(structurally balanced controller order reduction)의 결과를 이용하며, 저주파 및 고주파영역에서 상대적으로 작은 오차를 가지도록 선택할 수 있음을 보인다. 마지막으로 Enns와 Wang 등의 논문에서 사용되었던 두가지 예제를 통하여 제안된 방법의 타당성을 보인다. 본 논문의 구성을 보면 2장에서 기존의 구조적 차수축소의 결과를 보이고 3장에서 주요결과인 새로운 가중적

접수일자 : 2000. 8. 31., 수정완료 : 2001. 1. 8.

오도창 : 건양대학교 정보전자통신공학부(docoh@kytis.konyang.ac.kr)

정은태 : 창원대학교 제어계측공학과(jet26@sarim.changwon.ac.kr)

이갑래 : 두원공과대학교 컴퓨터응용제어과(krlee@doowon.ac.kr)

김종해 : 경북대학교 센서기술연구센터(kimjh@strc.knu.ac.kr)

이상경 : 두원공과대학교 공장자동화학과(leesk@doowon.ac.kr)

※ 본 논문은 1999년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-1999-003-E00416).

차수축소법을 보이며 4장에서는 두가지 예제를 보이고 5장에서 결론을 맺는다.

II. 구조적인 차수축소

이 장에서는 Zhou와 Oh 등이 제안한 구조적으로 균형화된 차수축소에 대해 소개한다. 두 Lyapunov 부등식의 해를 이용하여 균형구현(balanced realization)을 구하고 직접절단(DT)과 특이섭동근사(SPA)를 이용한 구조적 차수축소법과 그 특성을 보인다. 그림 1은 선형분수변환(Linear Fractional Transformation: LFT) 구조를 나타내며 w, z, u, y 는 각각 외부입력, 제어될 출력, 제어입력, 측정출력신호이다. 여기서 P 와 K 는 일반화된 표준플랜트 $P(s)$ 와 제어기 $K(s)$ 를 나타낸다.

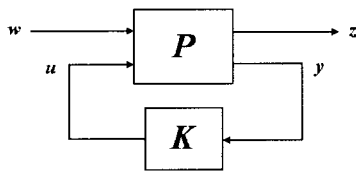


그림 1. 선형분수변환형태의 페루프시스템.
Fig. 1. Closed loop system with LFT form.

그림 1의 LFT구조에서 표준플랜트 $P(s)$ 를

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

와 같이 분리하여 표현할때 w 에서 z 까지의 LFT형태의 페루프 전달함수는

$$F_L(P, K) := P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2)$$

이고 $F_L(P, K)$ 를 선형분수변환식이라 한다. 여기서 $P(s)$ 와 $K(s)$ 를

$$P(s) := \begin{bmatrix} A_P & B_{P1} & B_{P2} \\ C_{P1} & D_{P1} & D_{P2} \\ C_{P2} & D_{P3} & D_{P4} \end{bmatrix}, \quad K(s) := \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (3)$$

라 정의하고 w 에서 z 까지의 페루프전달함수를 $T_{zw}(s)$ 라 두면 상태공간에서

$$T_{zw}(s) := \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$:= \begin{bmatrix} A_P + B_{P2}LD_KC_{P2} & B_{P2}LC_K & B_{P1} + B_{P2}LD_KD_{P3} \\ B_KFC_{P2} & A_K + B_KFD_{P4}C_K & B_KFD_{P3} \\ C_{P1} + D_{P2}D_KFC_{P2} & D_{P2}LC_K & D_{P1} + D_{P2}D_KFD_{P3} \end{bmatrix}$$

로 표현될 수 있으며 여기서 $L = (I - D_KD_{P4})^{-1}$ 이고 $F = (I - D_{P4}D_K)^{-1}$ 이다. 또한 $T_{zw}(s) \in RH^\infty$ 이고 $K(s) \in RH^\infty$ 는 페루프시스템을 안정하게 하는 제어기이다. 이때 Lyapunov 부등식

$$A_T M + M A_T^T + B_T B_T^T \leq 0, \quad M = \text{diag}(M_1, M_2) \geq 0 \quad (5)$$

$$A_T^T N + N A_T + C_T^T C_T \leq 0, \quad N = \text{diag}(N_1, N_2) \geq 0 \quad (6)$$

를 만족하는 블록대각행렬 M 과 N 이 존재하면, 유사변환을 위한 비특이(nonsingular) 행렬 T_1 과 T_2 를 이용하여

$$T_1 M_1 T_1^T = T_1^{-T} N_1 T_1^{-1} = \text{diag}(\eta_{c1}, \eta_{c2}, \dots, \eta_{cn}), \quad (7)$$

$$\eta_{c1} \geq \eta_{c2} \geq \dots \geq \eta_{cn}$$

$$T_2 M_2 T_2^T = T_2^{-T} N_2 T_2^{-1}$$

$$= E \text{diag}(\nu_{c1}, \nu_{c2}, \dots, \nu_{cr}, \nu_{c(r+1)}, \dots, \nu_{cm})$$

$$=: \Lambda_C = \text{diag}(\Lambda_{C1}, \Lambda_{C2}), \quad \nu_{c1} \geq \nu_{c2} \geq \dots \geq \nu_{cm} \quad (8)$$

을 만족하도록 대각화할 수 있다. 여기서 $\Lambda_{C1} = \text{diag}(\nu_{c1}, \dots, \nu_{cr})$ 이고 $\Lambda_{C2} = \text{diag}(\nu_{c(r+1)}, \dots, \nu_{cm})$ 이며 Λ_{C1} 과 Λ_{C2} 는 공통인 대각요소가 없다고 가정한다. (4)와 같은 페루프시스템의 구조로부터 T_2 에 의해 제어기 $K(s)$ 의 균형구현을 구할 수 있으며, 이것을 (A_k, B_k, C_k, D_k) 로 표현할때

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} T_2 A_K T_2^{-1} & T_2 B_K \\ \hline C_K T_2^{-1} & D_K \end{array} \right] =: \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & B_{k1} \\ A_{k3} & A_{k4} & B_{k2} \\ C_{k1} & C_{k2} & D_K \end{bmatrix} \quad (9)$$

와 같이 $\text{diag}(\Lambda_{C1}, \Lambda_{C2})$ 와 차원이 일치하도록 분리된다.

정리 1 [11][12] : (9)에 주어진 T_2 에 의한 제어기 $K(s) \in RH^\infty$ 의 균형구현에 대하여 DT와 SPA에 의한 저차의 제어기를 각각

$$K_{dr} := \left[\begin{array}{c|c} A_{k1} & B_{k1} \\ \hline C_{k1} & D_K \end{array} \right] \quad (10)$$

$$K_{sr} := \left[\begin{array}{c|c} A_{k3} & B_{k2} \\ \hline C_{k2} & D_K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{k1} - A_{k2}A_{k4}^{-1}A_{k3} & B_{k1} - A_{k2}A_{k4}^{-1}B_{k2} \\ \hline C_{k1} - C_{k2}A_{k4}^{-1}A_{k3} & D_K - C_{k2}A_{k4}^{-1}B_{k2} \end{array} \right] \quad (11)$$

로 표현할때 다음의 i), ii)가 만족된다.

i) $K_{dr}(s)$ 와 $P(s)$ 로 이루어진 페루프시스템을 $T_{del}(s)$ 라 하면

$$K_{dr}(s) \in RH^\infty, \quad T_{del}(s) \in RH^\infty,$$

$$\|T_{zw}(s) - T_{del}(s)\|_\infty \leq 2\text{tr}(\Lambda_{C2}) \quad (12)$$

을 만족한다.

ii) $K_{sr}(s)$ 과 $P(s)$ 로 이루어진 페루프시스템을 $T_{sci}(s)$ 라 하면

$$K_{dr}(s) \in RH^\infty, \quad T_{sci}(s) \in RH^\infty,$$

$$\|T_{zw}(s) - T_{sci}(s)\|_\infty \leq 2\text{tr}(\Lambda_{C2}) \quad (13)$$

을 만족한다.

위의 정리에 따르면 페루프시스템의 차수축소에서 (5)와 (6)을 만족하는 블록대각행렬 $M \geq 0$ 과 $N \geq 0$ 이 존재할 경우 페루프시스템의 안정성과 오차한계치를 보장하는 저차의 제어기를 구할 수 있다. 여기서 DT는 '∞' 주파수에서

원래 모델과 응답이 일치하며 SPA는 '0' 주파수에서 원래의 모델과 일치한다.

III. Lapunov 부등식을 이용한 가중적 차수축소

이 장에서는 기존의 가중적 차수축소와 다른 LMI를 이용한 가중적 차수축소를 제안하고 그 특성에 대해 조사한다. 실제적인 모델 및 제어기 차수축소 문제는 주파수 하중 함수가 포함되어 있으므로 아래와 같이 가중적 차수축소의 문제로 표현가능하다.

$$\text{find } \|W_o(K - K_r)W_i\|_\infty < \gamma \quad (14)$$

$\text{deg}(K_r) \leq r$

여기서 $r < n(\text{deg}(K))$ 이고 $\text{deg}(\cdot)$ 는 차수를 의미하며 γ 는 오차한계치이다. 또한 W_o 는 출력 하중함수이며 W_i 는 입력 하중함수이며, $K(s)$ 와 모든 하중함수는 RH^∞ 공간에 속하는 것으로 가정한다. (14)와 같은 문제에서 지금까지 알려진 바에 따르면 최적해를 구하는 해석적인 방법이 없다. Helmersson[5] 등이 제안한 반복적인 방법을 하중함수가 있는 경우로 응용하여 해를 구할 수는 있으나 그 수렴성이 보장에 관한 증명은 어려울 것으로 예측되며 오차의 한계치도 구하기가 어렵다. Enns[6]가 제안한 방법은 최적해는 아니나 그 이후 저차모델의 안정성을 증명하고 오차의 한계치를 구하려는 연구들이 많이 진행되어 왔었다.

여기서는 가중적 차수축소를 위해 2장의 구조적 축소방법을 응용하고자 한다. (2)에서 소개된 LFT형태의 전달함수 $T_{zw} = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$ 로부터 $P_{11}(s) = 0$, $P_{12}(s) = W_o(s)$, $P_{22}(s) = 0$, $P_{21}(s) = W_i(s)$ 로 두면 하중함수를 가지는 전달함수는 $T_{zw}(s) = W_o(s)K(s)W_i(s)$ 이다. 이것의 상태공간표현을 구하기 위해 표준플랜트를

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & W_o(s) \\ W_i(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{wo} & 0 & 0 & B_{wo} \\ 0 & A_{wi} & B_{wi} & 0 \\ C_{wo} & 0 & 0 & D_{wo} \\ 0 & C_{wi} & D_{wi} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

과 같이 구성한다. 여기서 하중함수들은 상태공간에서 $W_i(s) := (A_{wi}, B_{wi}, C_{wi}, D_{wi})$ 와 $W_o(s) := (A_{wo}, B_{wo}, C_{wo}, D_{wo})$ 로 두었다. (4)와 같은 방법으로 $T_{zw}(s)$ 의 상태공간표현을 구하면

$$T_{zw}(s) = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{wo} & B_{wo}D_KC_{wi} & B_{wo}C_K & B_{wo}D_KD_{wi} \\ 0 & A_{wi} & 0 & B_{wi} \\ 0 & B_KC_{wi} & A_K & B_KD_{wi} \\ C_{wo} & D_{wo}D_KC_{wi} & D_{wo}C_K & D_{wo}D_KD_{wi} \end{bmatrix} \quad (16)$$

이다. 여기서 (5)와 (6)의 Lyapunov 부등식을 만족하는 블록대각해 M 과 N 이 존재하면 역시 정리 1에 따라 안정성이 보장되는 저차의 제어기를 구할 수 있고 DT와 SPA에 대해 (12) 및 (13)과 같은 오차한계치가 구해질 수 있다. 이는 Enns의 방법을 포함한 기존의 몇가지 방법에서 축소

모델의 안정성을 보장할 수 없고 오차한계치를 구하기 어렵다는 단점을 해결할 수는 있으나, Lyapunov 행렬부등식을 만족하는 블록대각해에 대한 존재성의 문제가 발생되며 오차 및 오차한계치가 과연 다른 방법에 비교해서 어느정도 작은가 하는 문제가 논의되어야 할 것이다. 따라서 정리 2에서는 블록대각해에 대한 존재성을 다룬다.

정리 2 : (16)의 입·출력으로 가중된 전달함수 $T_{zw}(s) = (A_T, B_T, C_T, D_T)$ 에 대해 Lyapunov 부등식을 만족하면

$$A_TM + MA_T^T + B_TB_T^T \leq 0 \quad (17)$$

$$A_T^TN + NA_T + C_T^TC_T \leq 0 \quad (18)$$

서 '0'이 아닌 블록대각해 $M = \text{diag}(M_1, M_2) \geq 0$ 과 $N = \text{diag}(N_1, N_2) \geq 0$ 은 항상 존재한다.

증명 : 우선 (17)을 만족하는 M 의 존재를 증명하기 위해 $M_1 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$ 로 두고 (17)에 (16)을 대입하여 전체를 요소별로 다시 정리하면

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (19)$$

로 표현된다. 여기서 행렬식 좌변의 각 행렬요소들은 각각

$$L_{11} = \begin{bmatrix} A_{wo} & B_{wo}D_KC_{wi} \\ 0 & A_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} A_{wo}^T & 0 \\ C_{wo}^T & D_{wo}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{wo}D_KD_{wi} \\ B_{wi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{wo}^T & D_{wi}^T \\ D_{wi}^T & B_{wi}^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$L_{12} = \begin{bmatrix} B_{wo}C_KM_2 + M_{12}C_{wi}^TB_K^T + B_{wo}D_KD_{wi}D_{wi}^TB_K^T \\ M_{22}C_{wi}^TB_K^T + B_{wi}D_{wi}^TB_K^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$L_{22} = A_KM_2 + M_2A_K^T + B_KD_{wi}D_{wi}^TB_K^T \quad (22)$$

이다. 한편 (19)를 만족할 $M = \text{diag}(M_1, M_2) \geq 0$ 이 존재할 필요충분조건은

$$L_{22} \leq 0, \quad L_{11} - L_{12}L_{22}^+L_{12}^T \leq 0 \quad (23)$$

의 두 부등식을 만족하는 $M = \text{diag}(M_1, M_2) \geq 0$ 이 존재하는 것이다[10]. 여기서 '+'는 pseudoinverse를 의미한다. 먼저 $K(s) = (A_K, B_K, C_K, D_K)$ 가 RH^∞ 에 속하는 안정한 함수이므로 (23)의 첫번째식 $L_{22} = A_KM_2 + M_2A_K^T + B_KD_{wi}D_{wi}^TB_K^T \leq 0$ 을 만족하는 해 $M_2 \geq 0$ 는 반드시 존재하게 된다. 다음으로 $P = -L_{22} \geq 0$ 으로써 positive-semidefinite 행렬 P 를 정의하고 (23)의 두 번째식을 다시 표현하면

$$L_{11} + L_{12}P^+L_{12}^T \leq 0 \quad (24)$$

이고 $P^+ \geq 0$ 이므로 $L_{12}P^+L_{12}^T \geq 0$ 도 만족이 된다. 또한 i 번째 고유치(eigenvalue)의 실수부를 $\text{Re}\{\lambda_i(\cdot)\}$ 로 표현할때, 하중함수 $W_i(s)$ 와 $W_o(s)$ 가 RH^∞ 공간에 속하므로 (20)에서 모든 i 에 대해 $\text{Re}\{\lambda_i(\begin{bmatrix} A_{wo} & B_{wo}D_KC_{wi} \\ 0 & A_{wi} \end{bmatrix})\} < 0$

으로 안정한 시스템이고

$$\begin{bmatrix} B_{wo} D_K D_{wi} \\ B_{wi} \end{bmatrix} [D_{wi}^T D_K^T B_{wo}^T \ B_{wi}^T] + L_{12} P^+ L_{12}^T \geq 0 \quad (25)$$

도 만족이 되므로 $L_{11} - L_{12} L_{22}^+ L_{12}^T \leq 0$ 를 만족하는 $M_1 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$ 이 항상 존재한다. 따라서 (17)을 만족하는 $M = \text{diag}(M_1, M_2) \geq 0$ 가 항상 존재한다. 다음으로 (18)을 만족하는 N 의 존재를 증명하기 위해 $N_1 = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix}$ 로 두고 M 에서와 같은 방법으로 전개하면 된다. ■

이제 저차의 제어기를 구했을 때 ∞ -노움 오차한계치와 이러한 Lyapunov 부등식의 해를 어떻게 구하는가 하는 문제에 대해 살펴본다.

먼저 (17) 및 (18)의 해 M 과 N 을 구했다고 가정할 때 (8)을 만족하는 유사변환행렬 T_2 로부터 (9)와 같이 균형 구현을 얻을 수 있고 축소모델 $K_{dr}(s)$ 및 $K_{sr}(s)$ 를 (10)과 (11)처럼 구할 수 있다. 따라서 정리 1의 i)과 ii)로부터 $K_{dr}(s) \in RH^\infty$, $W_o(s)K_{dr}(s)W_i(s) \in RH^\infty$ 와 $K_{sr}(s) \in RH^\infty$, $W_o(s) \times K_{sr}(s)W_i(s) \in RH^\infty$ 를 만족하여 안정성이 보장되고 ∞ -노움 오차한계치는

$$\|W_o(K - K_{dr})W_i\|_\infty \leq 2\text{tr}(A_{c2}) \quad (26)$$

$$\|W_o(K - K_{sr})W_i\|_\infty \leq 2\text{tr}(A_{c2}) \quad (27)$$

와 같다. 다음으로 Lyapunov 부등식의 해를 구하는 방법에 살펴본다. (17) 및 (18)과 같은 LMI의 해는 유일하지 않으며 MATLAB의 LMI-LAB를 이용하여 최적화를 위한 조건을 가지고 해를 구할 수 있다. ∞ -노움 오차한계치를 고려할 때 $\sum_{i=r+1}^m \lambda_i^{1/2}(M_2 N_2)$ 가 최소화되도록 M 과 N 을 선택하여야 하나, 이러한 문제는 볼록최적화(convex optimization)가 아니므로 풀기가 어렵다. 따라서 안정한 하중함수 $W_i(s)$ 와 $W_o(s)$ 및 제어기 $K(s)$ 에 대하여 다음의 준최적 방법을 제시한다.

가중적 차수축소 알고리즘 :

i) (17)을 만족하면서 $\sum_{i=1}^m \lambda_i(M_2) = \text{tr}(M_2)$ 를 최소화 하는 해 $M = \text{diag}(M_1, M_2)$ 와 (18)을 만족하면서 $\sum_{i=1}^m \lambda_i(N_2) = \text{tr}(N_2)$ 를 최소화하는 해 $N = \text{diag}(N_1, N_2)$ 를 구한다.

ii) 균형화 알고리즘을 이용하여 (8)를 만족하는 T_2 를 구한다.

iii) T_2 에 의한 원래 제어기의 균형화구현에 대해 DT와 SPA를 적용하여 (10), (11)과 같은 축소모델을 구한다.

위의 알고리즘의 i)에서 사실상 $\sum_{i=1}^m \lambda_i(M_2) = \text{tr}(M_2)$ 를 최소화하는 해를 구하는 것보다 오차한계치에 관계가 있는 고유치들의 합을 최소화하는 것이 바람직할 것이다. 그러나 실제 그러한 고유치들의 합에 대한 식을 도출하기가 어렵기 때문에 M_2 행렬의 부행렬에 대한 고유치의 합을 최소화하므로써 어느정도는 그런 효과를 얻을 수 있으리라 여겨진다.

한편 이산시간시스템에 대해서도 비슷한 방법으로 안정성과 오차의 한계치를 보장하는 가중된 축소기법이 성립될 수 있을 것이다.

IV. 예제

이 장에서는 Enns[6]과 Kim[7] 및 Wang[9] 등의 논문에 쓰여졌던 예제를 가지고 제안된 방법의 타당성을 보인다. 예제 1 : 이 예제는 Enns 논문의 예제로써 $K(s)$ 와 $W_i(s)$ 및 $W_o(s)$ 가 다음과 같이 주어진다.

$$K(s) = \frac{s^2 + 2.8s + 1.6}{s^3 + 2.9s^2 + 3.1s + 1.5}$$

$$W_i(s) = \frac{s^3 + 2.9s^2 + 3.1s + 1.5}{s^3 + 3.8s^2 + 4.4s + 1.6}, \quad W_o(s) = 1$$

여기서 Enns의 방법으로 구해진 저차모델과 제안된 저차모델을 보이고 실제오차와 Kim 등의 방법에 의해 구한 오차한계치를 비교한다. 또한 표 1에서 각 차수에 대해 DT와 SPA의 경우로 나누어 축소모델의 전달함수를 비교하였다. 표 2에서는 Enns의 방법과 제안된 방법에 의한 축소모델들에 대해 실제오차와 오차한계치를 나타내었다. 1차의 DT 축소모델인 경우에는 Enns방법에 비해 더 작은

표 1. 축소모델의 전달함수.

Table 1. Transfer functions of reduced models.

방법 차수	축소모델(Enns[6])	축소모델(Proposed)
1차	$\frac{1.1694}{s+0.83068}$	$\frac{1.176}{s+0.84179}$ (DT)
		$\frac{-0.33041s+2.3509}{s+2.204}$ (SPA)
2차	$\frac{1.0135s+1.1526}{s^2+1.3384s+1.0715}$	$\frac{1.0166s+1.1483}{s^2+1.3404s+1.0659}$ (DT)
		$\frac{-0.010651s^2+1.059s+1.0259}{s^2+1.3042s+0.96177}$ (SPA)

실제오차가 나왔고 Kim에 의해 구해진 것보다 작은 오차한계치가 나왔으나, 1차의 SPA인 경우는 실제오차는 Enns방법보다 다소 크고 오차한계치는 Kim에 의해 구해진 것보다 작음을 알 수 있다. 또한 2차인 경우는 DT와 SPA의 모든 경우에 대해 오차한계치는 작으나 오차는 다소 큼을 알 수 있다. 따라서 제안된 방법이 항상 Enns의 방법보다 더 작은 실제오차를 가지는 것은 아니나 경우에 따라 작은 오차를 가질 수도 있으며 안정성 및 오차한계치가 보장되는 방법이라는 측면에서 장점을 가진다고 할 수 있다.

그림 2는 Enns방법에 의한 1차 축소모델과 제안된 DT와 SPA에 의한 1차의 축소모델오차에 대해 서로 다른

표 2. 예제 1에 대한 오차와 오차한계치.

Table 2. Error and error bound for example 1.

분류 차수	실제오차 (Enns[6])	오차한계치 (Kim[7])	실제오차 (Proposed)	오차한계치 (Proposed)
1차	0.31977	0.33290	DT 0.30975	0.33041
			SPA 0.33040	
2차	0.00850	0.01179	DT 0.00998	0.01065
			SPA 0.01065	

주파수특성을 보이고 있다. 즉 실제오차가 나타나는 주파수범위가 DT인 경우는 저주파이고 SPA인 경우는 고주파수인 것이다. 이는 DT가 '∞'주파수에서 원래 모델과 일치하는 축소모델을 구해주며 SPA가 '0'주파수에서 원래 모델과 일치하는 축소모델을 구해주기 때문이다.

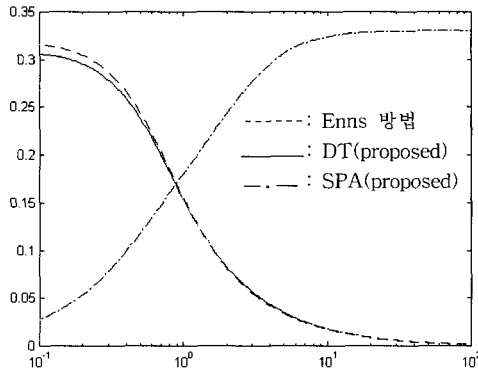


그림 2. 모델축소 오차의 주파수특성.
Fig. 2. Frequency response of the model reduction error.

예제 2 : 이 예제는 Wang 등의 논문의 예제로써 $W_o(s) = 1$ 이고 $K(s) = (A_K, B_K, C_K, D_K)$ 와 $W_i(s) = (A_{wi}, B_{wi}, C_{wi}, D_{wi})$ 가 다음과 같이 주어진다.

$$A_K = \begin{bmatrix} -0.6503 & -0.2734 & 0.0030 & -0.1815 \\ 0.2883 & -1.0171 & 0.0102 & -1.2651 \\ 0.0377 & 0.1087 & -0.0011 & -3.2129 \\ 0.8699 & -4.6643 & 16.1671 & -18.3349 \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 3.3317 & 3.2155 \\ -1.9209 & -0.0978 \\ -4.5402 & 2.6599 \\ -17.4882 & 6.0988 \end{bmatrix}$$

$$C_K = [31.5142 \quad 6.4374 \quad -0.0750 \quad 4.3834]$$

$$D_K = [0 \quad 0]$$

$$A_{wi} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_{wi} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C_{wi} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{wi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.17 \end{bmatrix}$$

표 3에서는 Enns의 방법과 Wang 등의 방법 그리고 제안된 방법에 따른 축소모델에 대해 오차와 오차한계치를 나타내었다.

표 3. 예제 2에 대한 오차와 오차한계치.
Table 3. Error and error bound for example 2.

분류 차수	실제오차 (Enns[6])	오차한계치 (Kim[7])	실제오차 (Wang[9])	오차한계치 (Wang)	실제오차 (Proposed)	오차한계치 (Proposed)
1차	39.5692	5479.8	38.4689	96.5676	DT	45.5450
					SPA	39.3075
2차	1.3787	5427.7	3.4582	19.9932	DT	4.8944
					SPA	5.0723
3차	594.7	5414.5	6.2949	8.4325	DT	5.3514
					SPA	3.9478

위의 표 3을 보면 이 예제에 대해서는 Enns의 방법이 비교적 큰 오차를 가지고 오차한계치 또한 크다. 또한 Wang의 방법은 그 과정이 매우 복잡하기는 하나 실제오차와 오차한계치는 비교적 작음을 알 수 있다. 1차와 2차의 축소모델인 경우에는 Wang의 방법이 더 작은 실제오차를 보이고 3차인 경우는 제안된 방법이 더 작은 실제오차를 보이고 있다. 오차한계치의 측면에서는 모든 차수에 대해 제안된 방법이 가장 작음을 알 수 있다. 여기서 Lyapunov 부등식의 해 $\sum \lambda_i(M_2) = \text{tr}(M_2)$ 와 $\sum \lambda_i(N_2) = \text{tr}(N_2)$ 를 최소화하는 해 M 과 N 을 구했다. 오차한계치에 관계가 있는 고유치들을 잘 알 수는 없지만 행렬 M_2 와 N_2 의 부행렬들에 대해 Trace의 합을 최소화하는 M 과 N 으로부터 축소모델을 구할 수도 있다는 것이다. 예를 들어 표 3의 2차 축소모델을 구할 때 M_2 와 N_2 의 3행 3열 이후의 부행렬에 대한 Trace의 합을 최소화하는 M 과 N 을 구하여 축소모델을 구할 경우에 실제오차는 각각 3.2475(DT)와 4.7392(SPA)로 더욱 작아졌고, 오차한계치도 14.6439로 더 작은 값이 나왔다.

V. 결론

본 논문에서는 입출력으로 가중된 모델에 대해 Lyapunov 부등식에서 블럭대각해가 항상 존재함을 보이고, 이를 이용하여 가중적 차수축소를 제안하였다. 가중된 모델에 대해 MATLAB을 이용하여 LMI의 블럭대각해를 구하고, 이로부터 균형구현을 구하여 DT와 SPA에 의한 축소모델을 구하였다. 따라서 기존의 구조적 차수축소법의 결과를 이용하여 안정성을 보이고 오차한계치를 구할 수 있었다. 마지막으로 두가지 예제를 통하여 제안된 방법의 타당성을 보였다.

참고문헌

- [1] B. D. O. Anderson and Y. Liu, "Controller reduction: Concepts and approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, pp. 802-812, Aug., 1989.
- [2] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model reduction via balancedstate space representations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 27, no. 2, pp. 382-387, April, 1982.
- [3] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ error bounds," *Int. J. of Control* vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, June, 1984.
- [4] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," *Int. J. of Control*, vol. 50, no. 4, pp. 1379-1405, April, 1989.
- [5] A. Helmersson, "Model reduction from an H_∞ / LMI perspective," *Europ. Cont. Conf.*, pp. 232-238, Oct., 1995.
- [6] D. Enns, "Model reduction for control systems design," Ph. D. dissertation, Stanford Univ., 1984.

- [7] S. W. Kim and B. D. O. Anderson, and A. G. Madiovski, "Error bound for transfer function order reduction using frequency weighted balanced truncation," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 24, pp. 183-192, 1995.
- [8] V. Sreeram, B. D. O. Anderson, and A. G. Madiovski, "New results on frequency weighted balanced reduction technique," *Proc. of Amer. Contr. Conf.*, Washington, pp. 4004-4009, 1995.
- [9] G. Wang, V. Sreeram, and W. Q. Liu, "A new frequency-weighted balanced truncation and error bound," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 44, no. 9, pp. 1734-1737, Sept., 1999.
- [10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [11] K. Zhou, C. D'Souza, and J. R. Cloutier, "Structurally balanced controller order reduction with guaranteed closed loop performance," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 24, pp. 235-242, 1995.
- [12] D. C. Oh, K. H. Bang, and H. B. Park, "Controller order reduction using singular perturbation approximation," *Automatica*, vol 33, no. 6, pp. 1203-1207, 1997.



오도창

1991년 경북대 전자공학과 졸업. 동대학원 석사(1993), 박사(1997). 1997.3~1997.8 창원대학교 국책초빙교수. 1997.8~현재 건양대학교 조교수. 관심분야는 H^∞ 제어, 시간지연제어, 대규모시스템제어, 통신시스템제어.



이갈래

1987년 경북대 전자공학과 졸업. 동대학원 석사(1990), 박사(1999). 1990 ~ 1995 국방과학연구소 연구원. 1997 ~ 현재 두원공과대학 컴퓨터응용제어과 조교수. 관심분야는 견실제어, H^2/H^∞ 제어, 퍼지제어, 필드버스.

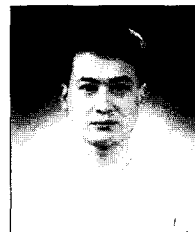


이상경

1986년 경북대 전자공학과 졸업. 동대학 산업대학원 석사(1993), 박사(1999). 1998 ~ 현재 두원공과대학 공장자동화과 조교수. 주관심분야는 견실제어, RTP제어.

정은태

제어·자동화·시스템공학 논문지 제3권, 제2호, 참조.



김종해

1993년 경북대 전자공학과 졸업. 동대학원 석사(1995), 박사(1998). 2000 ~ 2001 오사카대학 객원연구원. 현재 경북대 센서기술연구소 전임연구원. 관심분야는 혼합 H^2/H^∞ 제어, 시간지연제어, 비선형제어, 비약성(non-fragile)제어, 신뢰성제어, 산업제어응용.