Comm. Korean Math. Soc. **16** (2001), No. 3, pp. 333–369

초청논문

역전도체 문제와 전기 임피던스 영상기법

강 현 배, 서 진 근

ABSTRACT. 칼데론 문제와 유한번 측정 역전도체 문제에 대한 중요한 결과들을 설명하고, 그 응용으로서 전기임피던스 영상기법에 대하여 설명한다.

1. 서론

편미분 방정식과 관련된 역문제는 역산란 문제, 역전도체 문제, 의료영상기법, 지질탐사, 부식 및 균열탐사 등, 실로 다양한 과학 및 응용 분야에서 나타나고 있으며, 그 연구와 응용 범위를 확대해 가는 것이 현재의 추세이다. 이 논문에서는 이러한 역문제 중에서 역전도체 문제와 그 응용으로서 전기 임피던스 영상 기법에 대한 현재의 상태를 살펴보고 앞으로의 방향을 점검한다. 역전도체 문제에 대하여 필자들의 지식의 범위 내에서 가능한 모든 중요한 결과들을 설명하고자 하며, 미해결 문제의 소개와 아울러 미래의 연구방향을 모색하고자 한다.

역전도체 문제는 전도체의 표면에 전류를 가하고 그로 인하여 발생되는 전압을 역시 전도체의 표면에서 측정함으로서 전기 전도체 내부의 전도율의 분포를 탐사하고자 하는 문제이다. 이 문제를 수학적으로 모델링하면 다음과 같이 표현된다.

$$NP[\gamma, g]: \begin{cases} L_\gamma u := \nabla\cdot(\gamma\nabla u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{on } \partial\Omega, & \displaystyle\int_{\partial\Omega} u\,d\sigma = 0. \end{cases}$$

여기서 γ 는 전도체 Ω 에서 전도율 분포를 나타내고, 노이만 데이터 g 는 표면에 가해진 전류를 나타낸다. Ω 의 표면에서 전압을 측정한다는 것은 해 u 의 경계값 즉, $u|_{\partial\Omega}$ 를 구하는 것이다. 주어진 노이만 데이터 g 에 대하여 $u|_{\partial\Omega}$ 를

Received May 18, 2001.
2000 Mathematics Subject Classification: 35R30.
Key words and phrases: inverse conductivity problem and electrical impedance tomography.
이 연구는 KOSEF 98-0701-03-5와 2000-1-10300-001-1에 의하여 지원되었다.

대응시키는 사상을 노이만-디리클레 사상이라 하고, 약칭으로 NtD, 기호로는 Λ_γ 로 쓰기로 한다. 즉,

$$\Lambda_\gamma(g) = u|_{\partial\Omega}.$$

전류를 가하고 전압을 가하는 것이 현실에 더 가깝기 때문에 노이만-디리클레 사상을 다루지만, 때때로 디리클레-노이만 사상을 다루기도 한다. 디리클레-노이만 사상이란 노이만 경계조건 대신에 디리클레 경계조건을 주고 그것에 노이만 경계값을 대응시키는 사상이다.

역전도체 문제란 $\partial\Omega$ 에서 획득한 정보의 쌍 $(\Lambda_\gamma(g), g)$ 로 부터 전도율 분포 γ 를 탐사하는 문제이다. 여기서 경계에 가할 수 있는 모든 노이만 데이터와 그에 대응되는 디리클레 데이터, 다시 말하여 NtD 사상 Λ_γ 로 부터 γ 를 찾는 문제를 무한번 측정 문제라 하고, 유한개의 노이만 데이터, 즉 $(\Lambda_\gamma(g_i), g_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ 만을 이용하여 γ 를 찾는 문제를 유한번 측정 문제라 한다. 무한번 측정 문제는 1980년대 초에 칼데론(A.P. Calderón)에 의하여 처음 제안되었기 때문에 칼데론 문제라고도 한다 [12]. 유한번 측정 문제의 경우 일반적인 전도율 함수 γ 를 찾는 것은 불가능하다. 따라서 탐사 대상이 되는 γ 를 제한하게 되는데, 대표적인 현실적 함수가

$$\gamma(x) = \chi(\Omega \setminus \cup_{j=1}^N D_j) + \sum_{j=1}^N k_j \chi(D_j)$$

의 꼴이다. 여기서 $\chi(D)$ 는 영역 D 의 특성함수이다. 예를 들어, Ω 는 우리의 신체를 나타내고 D_j 는 신체 내부의 장기, 즉 허파 등을 나타낸다고 생각하면 이해에 도움이 될 것이다.

역전도체 문제는 다른 역문제와 마찬가지로 고도의 비선형성과 부적절성(ill-posedness)를 내포하고 있어 다루기가 매우 어려운 특징을 가지고 있다. 하지만 여전히 유일성, 안정성, 탐사 알고리즘의 개발 등 여러 가지 중요한 질문이 제기되었고 괄목할 만한 진전을 보고 있다. 이 논문의 제 2 절에서 무한번 측정 문제에 대한 중요한 결과들을 소개하고, 제 3 절에서 유한번 측정 문제에 대한 결과들을 살펴본다. 마지막 절에서는 최근에 큰 진전을 보이고 있는 MREIT에 대하여 살펴볼 것이다.

이제 앞으로 논의해 나가는데 꼭 필요한 단층 및 중층 포텐셜 이론[1]에 대하여 간단히 설명하기로 하자.

포텐셜 이론. 층 포텐셜 이론은 지난 수십년 동안 리프쉬츠 경계를 갖는 영역 위에서 타원형 방정식의 경계값 문제와 관련하여 발전해 왔던 중요한 이론이

[1]single and double layer potentials

다. D 를 리프쉬츠 경계를 갖는 $\mathbb{R}^n$ 상의 유계영역 이라 하자. $\Gamma(x)$ 를 라플라스 작용소 Δ 의 기본해, 즉

$$(1) \qquad \Gamma(x-y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|x-y|, & n=2, \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

이라 하자. 여기서 ω_n 은 $(n-1)$ 차원 단위구의 표면적이다. 영역 D 상에서 밀도함수 ϕ 의 단층 및 중층 포텐셜은 다음과 같이 정의된다.

$$(2) \qquad \mathcal{S}_D\phi(x) = \int_{\partial D} \Gamma(x-y)\phi(y)d\sigma_y,$$

$$(3) \qquad \mathcal{D}_D\phi(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y}\Gamma(x-y)\phi(y)d\sigma_y, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial D.$$

$\mathbb{R}^n \setminus \partial D$ 에서 정의된 함수 u 에 대하여,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}u^{\pm}(x) = \lim_{t \to 0^+} \langle \nu_x, \nabla u(x \pm t\nu_x)\rangle, \quad x \in \partial D$$

로 나타내기로 하자. 여기서 ν_x 는 x 에서 $\partial\Omega$ 의 외향 법선 단위벡터를 뜻한다.

여기서는 역문제에 대한 결과를 설명하는데 필요한 몇가지 중요한 사실들을 그 증명을 찾아볼 수 있는 참고자료와 함께 나열한다.

- 자국정리(Trace Theorem) [18, 22, 58]:

$$\mathcal{K}_D\phi(x) = \frac{1}{\omega_n}\text{p.v.} \int_{\partial D} \frac{\langle \nu_y, x-y\rangle}{|x-y|^n}\phi(y)d\sigma_y$$

  라 하고 $\mathcal{K}_D^*$ 를 $\mathcal{K}_D$ 의 L^2-동반 작용소라 하면, 다음 관계가 성립한다.

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{S}_D^{\pm}\phi(x) = (\pm\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_D^*)\phi(x),$$

$$(5) \qquad \mathcal{D}_D^{\pm}\phi(x) = (\mp\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_D)\phi(x), \qquad x \in \partial D.$$

- 작용소 $\mathcal{K}_D$ 는 칼데론-지그문드 형의 특이적분작용소이며 $L^p(\partial D)$ $(1 < p < \infty)$ 상에서 유계이다 [14, 16]. 특히 D 가 $C^{1,\alpha}$ 영역이면 $\mathcal{K}_D$ 는 $L^p(\partial D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 에서 콤팩트 작용소이다 [18, 22].
- $-\frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{1}{2}$ 을 만족하는 λ 에 대하여, $\lambda I - \mathcal{K}_D^*$ 는 $L^2(\partial D)$ 상에서 가역이다. $|\lambda| \geq \frac{1}{2}$ 이면, $\lambda I - \mathcal{K}_D^*$ 는 $L_0^2(\partial D)$ 상에서 가역이다 [17, 58].

2. 칼데론 문제

이 절에서는 무한번 측정 문제에 대한 중요한 결과들을 살펴본다. 무한번 측정 문제의 경우 디리클레-노이만 사상을 이용하여 γ 를 찾는 문제와 노이만-디리클레 사상을 이용하여 γ 를 찾는 문제가 동치이므로 보통 쓰이는 데로 디리클레-노이만 사상 DtN을 이용하도록 한다. 즉, 주어진 $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 에 대하여 디리클레 문제

$$DP[\gamma, f]: \begin{cases} L_\gamma u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

의 해를 u 라 하면, Λ_γ 는

$$\Lambda_\gamma(f) := \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$$

로 정의한다. 그러면 Λ_γ 는 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 에서 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 로의 연속사상이다.

우리가 다루는 역문제는 Λ_γ 로 부터 γ 를 찾으라는 것이다. 즉,

$$\Lambda_\gamma \to \gamma.$$

이 문제에 대한 자연스럽고 중요한 질문을 나열하면 다음과 같다.

(1) 유일성: $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ 이면, $\gamma_1 = \gamma_2$ 인가?

(2) 안정성: $\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}$ 가 적당한 의미로 작으면, $\gamma_1 - \gamma_2$ 도 작은가?

(3) γ 를 탐사하는 알고리듬의 개발과 구현.

우선 DtN 사상 Λ_γ 의 적분 표현을 살펴보자. $x \in \Omega$ 를 고정하고, 사상

$$f \in C(\partial\Omega) \to u(x)$$

을 살펴보자. 여기서 u 는 경계조건 $u|_{\partial\Omega} = f$ 를 만족하는 Ω 에서 $L_\gamma u = 0$ 의 해이다. 최대값 원리에 의하여 이 사상은 양의 선형 범함수(positive linear functional)이 된다. 따라서 리스 표현정리에 의하여 라돈측도 ω_γ^x[2] 가 존재하여

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) d\omega_\gamma^x(y)$$

를 만족한다. 이 라돈측도가 $\partial\Omega$ 에서의 면적측도(surface measure) $d\sigma$ 에 대하여 절대 연속이라는 것은 잘 알려진 사실이다. 이 측도 ω_γ^x 의 라돈-니코딤 도함수 $K_\gamma(x, y)$ 를 포아송 핵이라 부른다. 즉

$$K_\gamma(x, y) = \lim_{r \to 0} \frac{\omega_\gamma^x(B_r(y) \cap \partial\Omega)}{\sigma(B_r(y) \cap \partial\Omega)}.$$

---

[2]이 측도를 Ω 에서의 elliptic measure 라 부른다.

또한,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K_\gamma(x,y)f(y)d\sigma(y)$$

를 만족한다. 이제 u 의 법선 방향 도함수를 택하면,

$$\Lambda_\gamma f(x) = \int_{\partial\Omega} \gamma(x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}K_\gamma(x,y)f(y)d\sigma(y) \quad (x \in \partial\Omega)$$

가 된다. 따라서 우리의 역문제는 DtN 사상 Λ_γ 의 적분핵

$$\Lambda_\gamma(x,y) := \gamma(x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}K_\gamma(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$$

로 부터 γ 를 결정하라는 문제이다.

Ω 가 n 차원 영역이라면 $\Lambda_\gamma(x,y)$ 은 $(n-1)\times(n-1)$ 차원에서 정의된 함수인 반면에 결정해야 하는 전도율 $\gamma(x)$ 는 n 차원에서 정의된 함수이다. 3 차원 공간에서는 $\Lambda_\gamma(x,y)$ 의 자유도가 $2+2=4$ 인 반면에 $\gamma(x)$ 의 자유도는 3이다. 이는 $\Lambda_\gamma(x,y)$ 가 가지는 정보량이 결정해야할 것보다 많다는 것을 의미한다. 2 차원에서는 그들의 자유도가 각각 $1+1=2$와 2가 된다, 즉 정보량의 크기가 같아서 $\gamma(x)$ 를 결정하기가 더 어려울 것이라는 것을 의미한다. 이러한 설명은 비록 거친 것이지만, 현재의 상황은 이러한 설명과 맞아들고 있다. 이 논문에서 설명하겠지만 역전도체 문제의 유일성에 대해서 3 차원에서는 완전히 해결되었지만, 2 차원은 완전히 해결된 것은 아니다. 끝으로 다루기가 가장 쉬운 1 차원의 경우를 살펴보자. 위에서 살펴본 자유도는 각각 0과 1이 된다. 즉 $\gamma(x)$ 를 결정할 수 없다는 뜻이다. 일차원의 경우 영역 Ω 는 구간 (a,b) 로 주어지는데, 경계 a,b 에서의 데이타로 부터 측정될 수 있는 값은 $\int_a^b \frac{1}{\gamma(x)}dx$ 밖에 없다 [57].

기본적 등식. $u_j \in H^1(\Omega)$ 를 디리클레 문제 $DP[\gamma_j, f_j]$ 의 해라 하자 $(j = 1,2)$. 발산정리에 따르면,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\gamma_1-\gamma_2)\nabla u_1\cdot\nabla u_2 dx &= \int_{\partial\Omega}\left(\gamma_1\frac{\partial u_1}{\partial\nu}u_2 - \gamma_2\frac{\partial u_2}{\partial\nu}u_1\right)d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega}(\Lambda_{\gamma_1}(f_1)f_2 - \Lambda_{\gamma_2}(f_2)f_1)d\sigma.\end{aligned}$$

어렵지 않게 DtN 사상 $\Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 가 자기쌍대사상임을 보일 수 있다. 따라서 우리는 다음과 같은 기본적 등식을 얻을 수 있다.

$$(6) \qquad \int_\Omega (\gamma_1-\gamma_2)\nabla u_1\cdot\nabla u_2 dx = \int_{\partial\Omega}(\Lambda_{\gamma_1}(f_1) - \Lambda_{\gamma_2}(f_1))f_2 d\sigma.$$

이 기본적 등식은 유일성이나 조건부 안정성을 유도하는데 출발점의 역할을 하게 된다.

예를 들어, $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ 라면, 등식 (6) 에 의하여

$$\int_\Omega (\gamma_1 - \gamma_2)\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx = 0$$

이 되어, 유일성 즉, $\gamma_1 = \gamma_2$ 를 보이기 위해서는 집합 $\{\nabla u_1 \cdot \nabla u_2\}$ 가 완비임을 보이면 된다. 뒤에서 살펴 보겠지만, 3 차원에서는 이 집합이 완비임이 증명되었고, 2 차원에서는 여전히 미해결로 남아 있다.

2.1. 경계에서 결정과 리우빌 변환

우선 DtN 사상 Λ_γ 로 부터 경계에서 γ 와 그 도함수들의 값을 결정할 수 있는가를 살펴보자. 이 문제는 거의 완전히 해결되었으며 다음과 같은 결과가 있다.

정리 2.1. $\gamma_1, \gamma_2 \in C^k(\overline{\Omega})$ 이고, $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ 이면,

$$\partial^\alpha \gamma_1(x) = \partial^\alpha \gamma_2(x), \quad x \in \partial\Omega \ (|\alpha| \le k).$$

위 정리는 특별히 $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ 이면, 경계 $\partial\Omega$ 에서

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial \nu} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \nu} \tag{7}$$

가 성립한다는 것이다. 법선 방향도함수를 찾기 위해서는 γ 의 경계 주변에서의 값을 알아야 한다는 면에서 이 결과도 내부의 정보를 어느 정도 담고 있다고 할 수 있다.

이 정리는 Kohn-Vogelius에 의하여 처음 증명되었다 [37]. 그 논문에서는 디리클레 데이터로 아주 심하게 진동하는 함수를 줌으로서 해의 미분값이 대부분 $\partial\Omega$ 에 집중되도록 하는 방법을 취하고 있으며, γ_j 가 C^∞ 라고 가정하고 있다. 이 결과를 위와 같은 형태로 개선한 것은 Alessandrini 인데, 그의 증명은 특이해를 이용하고 있다 [3]. 즉 x_* 가 $\partial\Omega$ 에 있는 점이라면

$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2(x) \ge C|x - x_*|^{2-2n}$$

을 만족하도록 u_1 과 u_2 를 선택하여 정리 2.1 을 증명하였다. 이러한 특이해를 이용하는 방법은 역문제의 유일성을 증명하는데 많이 이용되고 있다.

Kohn-Vogelius 의 방법이나 Alessandrini 의 방법에 기초하여 조건부 안정성이 얻어졌는데, 그 결과들은 논문 [55, 3]을 참고하기 바란다.

이와 같은 경계에서의 결정문제는 그 자체로서도 중요하지만, Ω 내부에서 γ 를 결정하는데에도 중요하게 쓰인다. u 를 전도체 문제 $DP[\gamma, f]$ 의 해라 하자. $w := \sqrt{\gamma}u$ 라 두면 w 는 슈레징거 방정식

$$DP[q,g] : \begin{cases} L_q w := \Delta w - qw = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

를 만족한다. 여기서

$$q = \frac{\Delta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}$$

이고, $g = \sqrt{\gamma}f$ 이다. 이 때, 미분작용소 L_q 의 DtN 사상을 Λ_q, 즉

$$\Lambda_q(g) = \frac{\partial \nu}{\partial w}|_{\partial\Omega}$$

라 두면 Λ_γ 와 Λ_q 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\Lambda_q(g) = \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}g + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Lambda_\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}g\right). \tag{8}$$

이제 γ_1 과 γ_2 가 두 개의 전도율로서 $C^2(\overline{\Omega})$ 함수라 하자. $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ 라면 (7) 과 (8) 에 의하여, $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ 가 성립한다. 단, $q_j = \gamma_j^{-1/2}\Delta\gamma_j^{1/2}$. 그러므로 전도체 역문제의 유일성을 해결하기 위해서는, 슈레징거 방정식의 역문제의 유일성, 즉

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \Rightarrow q_1 = q_2$$

를 해결하면 된다.

역전도체 문제를 슈레징거 방정식의 역문제로 변환하여 다루는 것의 장점은 방정식 $\Delta u - qu = 0$ 를 라플라스 방정식 $\Delta u = 0$ 의 섭동(perturbation)으로 이해할 수 있어서 그 해를 구하기가 쉽다는데 있다. 여기에 대해서는 다음 절에 다룬다.

2.2. 3 차원 유일성

이 절에서는 역문제의 이론적 발전과정에서 가장 괄목할만한 결과인 3 차원에서 칼데론 문제의 해결에 대하여 설명한다. 여기서 설명하는 이론은 대부분 Sylvester-Uhlmann 에 의한 것이다 [54]. 우선 결과부터 설명하자면 다음과 같다. 슈레징거 방정식에 대해서는

정리 2.2. Ω 는 3 차원 영역이다. $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ 이고, $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ 가 성립하면, Ω 에서 $q_1 = q_2$ 가 성립한다.

이 정리와 앞 절의 논의에 따라 다음 정리가 나온다.

정리 2.3. Ω 는 3 차원 영역이다. $\gamma_1, \gamma_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ 이고, $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ 가 성립하면, Ω 에서 $\gamma_1 = \gamma_2$ 가 성립한다.

이제 정리 2.2 의 증명에 대하여 설명하도록 하자. 우선 기본적 등식을 구한 방법과 똑같은 방법으로 다음의 등식을 유도할 수 있다. u_j 를 $DP[q_j, f_j]$ 의 해라 하자. 그러면

$$\int_\Omega (q_2 - q_1) u_1 u_2 = \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{q_2}(f_1) - \Lambda_{q_1}(f_1)) f_2. \tag{9}$$

따라서 $\Lambda_{q_2} = \Lambda_{q_1}$ 이면, $\Delta u_j - q_j u_j = 0$ 를 만족하는 모든 u_1 와 u_2 에 대하여

$$\int_\Omega (q_2 - q_1) u_1 u_2 = 0$$

가 성립한다. 따라서 앞에서도 설명했듯이, 질문은 집합 $\{u_1 u_2 | \Delta u_j - q_j u_j = 0 \text{ in } \Omega\}$ 이 $L^2(\Omega)$ 공간에서 조밀한가하는 것이다. 물론 3 차원에서의 답은 '예'이다. 이것을 증명하기 위해서는 무한히 많은 해를 구성할 필요가 있는데, 여기에 슈레징거 방정식을 라플라스 방정식의 섭동으로 이해하는 것이 결정적인 역할을 한다.

이해를 돕기 위하여 $q_1 = q_2 = 0$ 인 경우를 우선 살펴보자. 라플라스 방정식 $\Delta u = 0$ 의 해를 구하는 것은 쉽다. 즉 $\zeta \in \mathbb{C}^n$ 가 $\zeta \cdot \zeta = 0$ 을 만족하면 $e^{ix\cdot\zeta}$ 는 라플라스 방정식의 해가 된다. $k \in \mathbb{R}^n$ 을 고정하고 $m \in \mathbb{R}^n$ 을 $k \cdot m = 0$ 와 $|k| = |m|$ 을 만족하는 벡터라 하자. 그러면 $\zeta_1 = k/2 + im$ 과 $\zeta_2 = k/2 - im$ 은 $\zeta_j \cdot \zeta_j = 0$ 을 만족한다. 그런데 $e^{ix\cdot\zeta_1} e^{ix\cdot\zeta_2} = e^{ix\cdot k}$ 가 되므로, 집합 $\{u_1 u_2 | \Delta u_j = 0 \text{ in } \Omega\}$ 은 $\{e^{ix\cdot k} | k \in \mathbb{R}^n\}$ 을 포함한다. 집합 $\{e^{ix\cdot k} | k \in \mathbb{R}^n\}$ 이 L^2-공간에서 조밀하므로, 집합 $\{u_1 u_2 | \Delta u_j = 0 \text{ in } \Omega\}$ 도 L^2-공간에서 조밀하다. 이 방법은 칼데론이 [12]에서 처음 사용하였는데, 그는 이것을 이용하여 선형화된 역전도체 문제의 유일성을 증명하였다.

지수적으로 증가하는 해. 방정식 $\Delta u - qu = 0$ 을 라플라스 방정식의 섭동으로 이해하면 다음 정리를 얻을 수 있다. 이 정리가 역전도체 문제의 유일성을 증명하는데 핵심적인 것이다. 여기서는 이 정리의 증명과 그것이 정리 2.2 을 증명하는데 어떻게 이용되는지를 설명한다. 논의의 과정 중에 2 차원에서 이 증명 방법이 통하지 않는 이유가 분명히 드러날 것이다. 정확한 증명은 논문 [54]를 참고하기 바란다.

우선 실수 δ 에 대하여 L^2_δ 를 $(1 + |x|^2)^\delta dx$ 를 측도로 하는 L^2-공간이라 하자. 이 공간 위의 노름은

$$\|f\|^2_{L^2_\delta} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^\delta |f(x)|^2 dx$$

로 주어진다.

보조정리 2.4. q 는 $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(n \geq 2)$ 로서 옹골받침을 가지고 있다. $\zeta \in \mathbb{C}^n$ 는 $\zeta \cdot \zeta = \zeta_1\zeta_1 + \cdots + \zeta_n\zeta_n = 0$ 를 만족한다. 충분히 큰 $|\zeta|$ 에 대하여, 방정식

$$\Delta u - qu = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

을 만족하고,

$$u(x) = e^{ix\cdot\zeta}[1 + \psi_\zeta(x)]$$

의 꼴을 갖는 해가 $L^2_\delta(\mathbb{R}^n)$ 에서 유일하게 존재한다. 뿐만 아니라, ζ 에 무관한 상수 C 가 존재하여

$$\|\psi_\zeta\|_{L^2_\delta} \leq \frac{C}{|\zeta|}\|q\|_{L^\infty}$$

를 만족한다.

먼저 정리 2.2 가 보조정리 2.4 로 부터 어떻게 유도되는지 살펴보자. 주어진 $k \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $\eta, \omega \in \mathbb{R}^n$ 을 $\eta \perp \omega$, $\eta \perp k$, $\omega \perp k$, $|\omega| = r$, 그리고 $|\eta|^2 = r^2 + |k|^2$ 을 만족하도록 고른다. 여기서 r 은 무한히 크게 할 파라메타이다. 이러한 세개의 벡터를 찾기 위해서는 공간의 차원이 3 이상이어야 한다. 이것이 2 차원에서는 여기서 설명하는 증명방법이 통하지 않는 이유이다. 2 차원에서 역전도체 문제의 대역적 유일성은 함수 γ 가 실수라는 조건하에서 Nachman [45] 과 Brown-Uhlmann [11] 에 의하여 증명되었지만, 일반적 복소수 함수 γ 의 유일성과 슈레징거 방정식의 포텐셜 q 의 유일성은 아직 미해결로 남아 있다. 여기에 대해서는 뒤에서 다시 다루기로 한다. 이제

$$\zeta_1 := i\eta - (r\omega + \frac{k}{2}), \qquad \zeta_2 := -i\eta - (-r\omega + \frac{k}{2})$$

라 두자. 그러면 $\zeta_1 + \zeta_2 = -k$, $\zeta_j \cdot \zeta_j = 0$ $(j = 1, 2)$ 만족한다. q_j 를 Ω 의 바깥에서 0 으로 확장하고, u_j 를 q_j 에 대응되는 보조정리 2.4 에서 다룬 지수적으로 증가하는 해라 하자. 즉,

$$u_j = e^{ix\cdot\zeta_j}[1 + \psi_{\zeta_j}(x)].$$

그러면, $r \to \infty$ 에 따라

$$u_1u_2 = e^{-2ik\cdot x}[1 + \psi_{\zeta_1} + \psi_{\zeta_2} + \psi_{\zeta_1}\psi_{\zeta_2}] \to e^{-2ik\cdot x} \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

따라서,

$$0 = \int_\Omega (q_2 - q_1)u_1u_2 \to \int_\Omega (q_2 - q_1)e^{-2ik\cdot x} = (\widehat{q_2 - q_1})(k).$$

그러므로, $q_1 = q_2$ 가 얻어진다.

보다 일반적으로는 등식 (9) 와 자국정리(Trace Theorem)으로 부터

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{(q_2 - q_1)}(k)| \\
&= \left| \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2})(u_1|_{\partial\Omega}) u_2|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} e^{-2ik\cdot x}(\psi_{\zeta_1} + \psi_{\zeta_2} + \psi_{\zeta_1}\psi_{\zeta_2}) \right| \\
&\le \|\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}\| \|u_1\|_{H^1(\Omega)} \|u_1\|_{H^1(\Omega)} + C(\|\psi_{\zeta_1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_{\zeta_2}\|_{L^2(\Omega)}) \\
&\le C\left(\|\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}\| e^{R(|k|+r)} + \frac{1}{|k|+r} \right)
\end{aligned}
$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $\|\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}\|$ 는 $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 인 작용소 노름을 나타내고, C, R 은 상수이다. 이 부등식에서 마지막 줄에 있는 항을 r 에 대하여 최소화하면 조건부 안정성 측정을 얻을 수 있는데, 자세한 내용은 [1]를 참고하기 바란다.

이제 보조정리 2.4의 증명을 살펴보기로 하자. 방정식 $\Delta u - qu = 0$ 의 해가 $u(x) = e^{ix\cdot\zeta}[1 + \psi_\zeta(x)]$ 의 꼴을 가졌다면, ψ_ζ 는 다음 방정식을 만족한다.

$$\Delta_\zeta \psi_\zeta := \Delta\psi_\zeta + 2i\zeta \cdot \nabla\psi_\zeta = q(1 + \psi_\zeta).$$

Δ_ζ 의 표상(symbol)은 $-|\xi|^2 - 2\zeta \cdot \xi$ 로 주어지므로, Δ_ζ 의 하나의 그린함수는

$$g_\zeta(x) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2 + 2\zeta \cdot \xi} d\xi$$

로 주어진다. 이 적분은 절대수렴하지 않으므로, 진동적분(oscillatory integral)로 이해해야 한다. 즉 피적분 함수를 옹골받침을 갖는 매끄러운 함수로 자르고 그 받침을 점점 늘일 때 그 수렴하는 값이 이 적분값이란 뜻이다. 이 그린함수를 Faddeev의 그린함수라 한다. 이제

$$G_\zeta(x) := e^{ix\cdot\zeta} g_\zeta(x)$$

라 두자. 그러면

$$\Delta G_\zeta = \delta$$

를 만족한다. 따라서 그린함수 G_ζ 는 라플라스 작용소의 표준적 기본해 Γ 와 조화함수 만큼의 차이를 가지고 있다.

작용소 T_ζ 를 다음과 같이 정의하자.

$$T_\zeta f = g_\zeta * f.$$

방정식 $\Delta_\zeta\psi_\zeta - q\psi_\zeta = q$ 를 풀기 위해서는 다음 적분방정식을 풀면 된다.

$$\psi_\zeta - T_\zeta(q\psi_\zeta) = T_\zeta(q). \tag{10}$$

그린함수 g_ζ 의 측정을 통하여 다음과 같은 T_ζ 의 연속성을 증명할 수 있다. $-1 < \delta < 0$ 일 때,

$$\|T_\zeta f\|_{L^2_\delta} \le \frac{C}{|\zeta|}\|f\|_{L^2_{\delta+1}}. \tag{11}$$

$|\zeta|$ 가 충분히 크다면, (11) 에 의하여, $I - T_\zeta(q\cdot)$ 가 $L^2_{\delta+1}$ 에서 L^2_δ 로 가는 작용소로서 가역임을 알 수 있다. 뿐만 아니라 $(I - T_\zeta(q\cdot))^{-1}$ 을 노이만 급수로 전개하면 적분 방정식 (10) 의 해가 보조정리 2.4 의 측정을 만족한다는 것을 알 수 있다.

2.3. 3 차원 역공식

이 절에서는 역시 지수적으로 증가하는 해를 바탕으로 한 Nachman의 역공식을 살펴보자. 이 결과는 논문 [44]에 발표된 것이다. $\zeta \in \mathbb{C}^n$ 가 $\zeta\cdot\zeta = 0$ 를 만족한다고 하고, u 를 보조정리 2.4 에서 살펴본 $\Delta u - qu = 0$ 의 해라 하자. 해 u 가 q 와 ζ 에 의존할 수 있슴을 명심하자. 이제 산란이론에서의 산란진폭(scaling amplitude)와 비슷한 양을 정의하자.

$$t_q(\xi,\zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}q(x)u(x)dx. \tag{12}$$

여기서 ξ 는 $(\xi+\zeta)\cdot(\xi+\zeta) = 0$ 를 만족한다. $|\zeta| \to \infty$ 에 따라 $e^{-ix\cdot\zeta}u(x) \to 1$ 이므로

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} t_q(\xi,\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}q(x)dx = \hat{q}(\xi). \tag{13}$$

반면에 $qu = \Delta u$ 이므로, 발산정리에 의해서

$$\begin{aligned} t_q(\xi,\zeta) &= \int_\Omega e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}\Delta u(x)dx \\ &= \int_{\partial\Omega} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}\left[\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) + i(\xi+\zeta)\cdot\nu u(x)\right]d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}\left[\Lambda_q(u|_{\partial\Omega}) + i(\xi+\zeta)\cdot\nu u(x)\right]d\sigma(x). \end{aligned}$$

따라서 우리는 다음 등식을 얻는다.

$$\hat{q}(\xi) = \lim_{|\zeta|\to\infty}\int_{\partial\Omega} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}\left[\Lambda_q(u|_{\partial\Omega}) + i(\xi+\zeta)\cdot\nu u(x)\right]d\sigma(x). \tag{14}$$

이것이 Nachman의 역공식이다. 하지만 우리는 $u|_{\partial\Omega}$ 가 q 에 어떻게 의존하는지를 살펴보아야 한다. 만약 $u|_{\partial\Omega}$ 가 q 의 내부값을 알아야만 알 수 있는 해라면 이 역공식은 무용지물이기 때문이다. 우리는 $u|_{\partial\Omega}$ 가 Λ_q 에 의하여 완전히 결정됨을 볼 것이다.

식 (10)에 의하여, 다음 등식을 알고 있다:

$$\psi_\zeta = T_\zeta(q(1+\psi_\zeta)) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\zeta(x-y)q(y)(1+\psi_\zeta(y))dy.$$

따라서 해 $u = e^{ix\cdot\zeta}[1+\psi_\zeta]$ 는 적분방정식

$$u(x) = e^{ix\cdot\zeta} - \int_{\mathbb{R}^n} G_\zeta(x-y)q(y)u(y)dy \tag{15}$$

를 만족한다.

B 는 Ω 를 포함하는 큰 공이라 하자. 그린정리를 이용하면, $x \in B \setminus \overline{\Omega}$ 에 대하여

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\partial B} - \int_{\partial\Omega}\right)\Big[G_\zeta(x-y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}(u(y)-e^{iy\cdot\zeta})\\&\qquad\qquad - \frac{\partial G_\zeta}{\partial\nu_y}(x-y)(u(y)-e^{iy\cdot\zeta})\Big]d\sigma(y)\\&= \int_{B\setminus\overline{\Omega}}\left[G_\zeta(x-y)\Delta_y(u(y)-e^{iy\cdot\zeta}) - \Delta_y G_\zeta(x-y)(u(y)-e^{iy\cdot\zeta})\right]dy\end{aligned}$$

가 성립한다. $\Delta_y G_\zeta = \delta$ 이고,

$$\Delta_y(u(y)-e^{iy\cdot\zeta}) = q(y)u(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$

가 성립하며, 관계식 (15) 에 의하여, $x \in B$ 에 대하여

$$\int_{\partial B}\left[G_\zeta(x-y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}(u(y)-e^{iy\cdot\zeta}) - \frac{\partial G_\zeta}{\partial\nu_y}(x-y)(u(y)-e^{iy\cdot\zeta})\right]d\sigma(y) = 0$$

가 성립한다. 그러므로,

$$\begin{aligned}&u(x) - e^{ix\cdot\zeta}\\&= \int_{\partial\Omega}\left[G_\zeta(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu_y}(y) - \frac{\partial G_\zeta}{\partial\nu_y}(x-y)u(y)\right]d\sigma(y),\ x \in B\setminus\overline{\Omega}\end{aligned} \tag{16}$$

가 성립한다. $\Delta_y G_\zeta = \delta$ 이므로, $G_\zeta = \Gamma + h$ 가 성립한다. 단, Γ 는 Δ 의 기본해이며 h 는 $\mathbb{R}^n$ 상에서 조화함수이다. 이 조화함수 h 에 대하여

$$H_1 f(x) = \int_{\partial\Omega} h(x-y) f(y) d\sigma(y)$$
$$H_2 f(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial \nu_y}(x-y) f(y) d\sigma(y)$$

로 정의하면 H_1 와 H_2 모두 정칙화 작용소(regularizing operator)이며, 따라서 임의의 실수 s 에 대하여 $H^s(\partial\Omega)$ 상의 콤팩트 작용소가 된다. 등식 (16) 은

$$\begin{aligned}(17)\quad & u(x) - e^{ix\cdot\zeta} \\ = \quad & \mathcal{S}_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}\right)(x) - \mathcal{D}_\Omega(u|_{\partial\Omega})(x) + H_1\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}\right)(x) - H_2(u|_{\partial\Omega})(x)\end{aligned}$$

로 표현되며, 이 식은 다시 중층 포텐셜의 자국정리 (4), (5)를 이용하면,

$$(18)\qquad \left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_\Omega - \mathcal{S}_\Omega\Lambda_q - H_1\Lambda_q + H_2\right)(u|_{\partial\Omega}) = e^{ix\cdot\zeta}.$$

만약 $\partial\Omega$ 가 $C^{1,1}$ 이면, 작용소 $\mathcal{K}_\Omega$, $I + \mathcal{S}\Lambda_q$, $H_1\Lambda_q$, H_2 가 모두 $H^{3/2}(\partial\Omega)$ 상에서 콤팩트이다. 어렵지 않게 작용소 $(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_\Omega - \mathcal{S}\Lambda_q - H_1\Lambda_q + H_2)$ 가 $L^2(\partial\Omega)$ 상에서 일대일임을 보일 수 있고 따라서 프레드홈 이분법에 의하여 이 작용소는 가역이다. 결론적으로

$$(19)\qquad u|_{\partial\Omega} = \left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_\Omega - \mathcal{S}_\Omega\Lambda_q - H_1\Lambda_q + H_2\right)^{-1}(e^{ix\cdot\zeta}|_{\partial\Omega}).$$

이 공식에서 지수적으로 증가하는 해 u 가 q 가 아니라 Λ_q 에 의하여 완전히 결정됨을 알 수 있다.

2.4. 2 차원 역공식

2 차원에서 전도체 방정식의 DtN 사상 Λ_γ 로부터 전도율 γ 를 찾는 역공식은 Nachman에 의하여 처음 얻어졌다 [45]. 그 결과에서는 γ 가 실수값을 갖는 함수이며 $W^{2,p}$ 정도의 미분가능성을 갖는다고 가정하고 있는데, 최근에 Brown-Uhlmann이 그 미분가능성의 가정을 $W^{1,p}$ $(p > 2)$ 까지 떨어뜨렸다 [11]. 두 결과를 얻는 방법상의 차이는 [45]에서는 2 차 슈레징거 방정식을 다루는데 반해서, [11]에서는 1차 연립 슈레징거 방정식을 다룬다는데 있다. 하지만 이 두가지 방법은 본질적으로는 큰 차이가 없으며 역산란문제를 다루는 방법과 비슷하다 [7]. 여기서는 [11]의 방법을 설명한다. 한가지 언급해야 할 것은 [45] 이나 [11] 의 증명방법에서 γ 가 실수값 함수라는 것이 매우 중요하

게 이용되고 있으며 일반적으로 복소수 값을 갖는 γ 의 유일성이 성립하는지는 아직 미해결이다.

정리 2.5. γ_1, γ_2 는 실수값 함수이며, $W^{1,p}(\Omega)$ $(p > 2)$ 에 속한다. $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ 이면, Ω 에서 $\gamma_1 = \gamma_2$ 이다.

전도체 방정식 $\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0$ 에서, $q := -\frac{1}{2}\partial \log \gamma$ 라 두고,

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} := \sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} \partial u \\ \overline{\partial} u \end{bmatrix}$$

라 두면, 다음 등식이 성립한다.

$$D \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} - Q \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \overline{\partial} & 0 \\ 0 & \partial \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0.$$

3 차원에서 지수적으로 증가하는 해를 구한 것과 마찬가지로 여기서도 방정식 $(D - Q)\psi = 0$ 의 해로서

$$\psi = m(z, k) \begin{bmatrix} e^{izk} & 0 \\ 0 & e^{-i\bar{z}\bar{k}} \end{bmatrix}$$

의 형태를 가진 것을 구하고자 한다. 여기서 $m(z, k)$ 는 2×2 행렬을 값으로 하는 함수이며, k 는 복소 파라메타이다. 그리고 $|k|$ 가 클 때,

$$m(z, k) = I + O(|k|^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + O(|k|^{-1})$$

를 만족하기를 원한다. 그러면 m 은 미분방정식

$$D_k m - Qm = 0 \tag{20}$$

을 만족해야 하는데, 여기서 D_k 는

$$D_k A = E_k^{-1} D E_k A$$

정의되고, E_k 는

$$E_k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11} & e^{-i(z\bar{k}+\bar{z}k)} a_{12} \\ e^{i(zk+\bar{z}\bar{k})} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

로 정의되는 작용소이다. 따라서, μ 를 르벡측도,

$$D^{-1}A(z) = \begin{bmatrix} \overline{\partial}^{-1} & 0 \\ 0 & \partial^{-1} \end{bmatrix} A := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{bmatrix} z - \zeta & 0 \\ 0 & \bar{z} - \bar{\zeta} \end{bmatrix}^{-1} A(\zeta) d\mu(\zeta)$$

로 정의하고 $D_k^{-1} := E_k^{-1}D^{-1}E_k$ 로 정의하면,

$$m - D_k^{-1}Qm = I$$

를 만족해야 한다.

이제 유일성이나 역공식을 얻어내는 중요한 과정을 정리해 보기로 하자. 각 과정에 대한 간단한 설명이 뒤따를 것이다. 다음 과정은 $Q^* = Q$ 일 때에만 성립한다. 우리의 경우에는 γ 가 실수값을 가지기 때문에 이 조건이 만족된다.

1. 임의의 복소수 k 에 대하여 $(I - D_k^{-1}Q) : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ 은 유계이며 가역이다 [45, 11].
2.

$$m(z,k) := (I - D_k^{-1}Q)^{-1}(I) \tag{21}$$

라 두면, 고정된 $z \in \Omega$ 에 대하여, $k \to m(z,k)$ 가 미분가능하며 다음 관계를 만족한다 [7, 45, 11].

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} m(z,k) = m(z,\bar{k}) \begin{bmatrix} e^{i(z\bar{k}+\bar{z}k)} & 0 \\ 0 & e^{-i(zk+\bar{z}\bar{k})} \end{bmatrix} S(k), \quad k \in \mathbb{C}. \tag{22}$$

여기서 S 는

$$S(k) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} E_k Q(z) m(z,k) d\mu(z) \tag{23}$$

로 정의되며 산란행렬이라 부른다. 여기서 눈여겨 볼 것은 식 (21)로부터 $E_kQ(z)m(z,k) = DE_km(z,k)$ 이므로 $S(k)$ 는 DtN-사상에 의하여 완전히 결정된다는 것이다.

3. $q > 2p/(p-2)$ 이면, 상수 C 가 존재하여

$$\sup_z \|m(z,\cdot) - I\|_{L^q} \le C \tag{24}$$

를 만족한다 [11].

4. 조건 (24)을 만족하는 k 에 대한 방정식 (23)의 해는 유일하다.

따라서 Λ_γ 로 부터 γ 를 재생하는 과정은 다음과 같다.

$$\Lambda_\gamma \to S(k) \to m(z,k) \to \gamma.$$

이제 각 과정에 대하여 설명한다.

1. 일변수 복소 해석학의 코시-리만 작용소의 해 작용소 $\overline{\partial}^{-1}$ 은 $L^p(\Omega)$ 에서 $C^\alpha(\Omega)$ 로의 유계작용소임은 잘 알려져 있다. 여기서 $p > 2$, $\alpha = 2/(p-2)$ 이며, Ω 는 유한 영역이다. 그러므로, $(I - D_k^{-1}Q)$ 는 $L^\infty(\Omega)$ 에서 $C^\alpha(\Omega)$ 로의 유계작용소이며, 따라서 $L^\infty(\Omega)$ 에서 $L^\infty(\Omega)$ 로의 콤팩트 작용소이다. 그러므로 $(I - D_k^{-1}Q)$ 이 가역임을 보일려면 그것이 일대일임을 보이면 된다.

이제 $(I - D_k^{-1}Q)m = 0$ 이라 가정하자. 그러면 $m = D_k^{-1}(Qm)$ 을 만족하도록 전 공간 $\mathbb{C}$ 로 확장할 수 있으며, 확장된 m 은

$$|m(z,k)| \le \frac{C}{|z|+1}$$

을 만족한다. 뿐만 아니라, 등식 $DE_k m - E_k Q m = 0$ 의 첫번째 열을 살펴보면

$$\bar{\partial} m_{11} = q m_{21}$$
$$\partial(e^{i(zk+\bar{z}\bar{k})} m_{21}) = \bar{q} e^{i(zk+\bar{z}\bar{k})} m_{11}$$

을 만족한다는 것을 알 수 있다. 따라서 $u = e^{izk} m_{11},\ v = e^{izk} m_{21}$ 라 두면,

$$\bar{\partial}(u \pm \bar{v}) = q\overline{(u \pm \bar{v})}$$

가 성립한다. 따라서 다음 보조정리에 의해 $m_{11} = m_{21} = 0$ 이 성립한다. 다음 보조정리나 그보다 일반적인 정리는 [45, 11, ,61] 등에서 얻어진 것이다.

보조정리 2.6. $1 \le p \le \infty$ 이고 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 이다. $q \in L^p \cap L^{p'}(\mathbb{R}^2)$ 이고, 어떤 q 에 대해서 $u \in L^q \cap L^2_{\mathrm{LOC}}$ 이고

$$\bar{\partial} u = q\bar{u} \quad \text{in } \mathbb{C}$$

를 만족하면, $u = 0$ 이다.

2. 파라메타 k 에 대한 미분방정식 (22)은 k 에 관하여 형식적으로 미분하고, $I - D_k^{-1}Q)$ 의 가역성을 이용하면 얻을 수 있다. 정확한 증명은 [45, 7] 를 보면 된다.

3은 적분방정식으로 만들어지는 해를 측정함으로서 얻을 수 있으며, 4의 쌍대 방정식의 해의 유일성은 보조정리 2.5 를 이용하여 증명할 수 있다.

지금까지 설명한 것은 전도체 방정식의 전도율을 찾는 것이다. 슈레징거 방정식의 포텐셜 결정 문제도 그 자체로 매우 중요한 것인데 현재로는 알려진 것이 거의 없는 상태이다. 국소적 유일성에 대해서는 다음과 같은 결과가 있다.

정리 2.7. 상수 ϵ 이 존재하여 $\|q_j\|_p \le \epsilon$ $(j = 1, 2,\ p > 2)$ 이고, $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ 이면, Ω 에서 $q_1 = q_2$ 이다.

이 결과는 [53] 에서 q 의 $W^{1,\infty}$-노름이 작다는 조건 아래서 증명되었고, [25] 에서 위와 같이 확장되었다.

2.5. 미해결 문제

앞에서도 여러 차례 설명하였지만 현재 이 분야에서 가장 잘 알려진 미해결 문제는 2 차원에서 슈레징거 방정식의 포텐셜 결정문제의 유일성일 것이다. 전도율 함수 결정문제의 경우 그것이 실수값을 가지면 유일하게 결정할 수 있다는 것이 밝혀졌지만, 그 해의 곱의 집합 즉, $\{\nabla u_1 \cdot \nabla u_2\}$ 이 L^2 에서 완비인가는 모르는 상태로 남아 있다.

다음 절에서 다룰 영역 탐사 문제와 관련하여 다음 문제도 흥미롭다. Nachman 등에 의한 2 차원과 3 차원 역공식에서는 $e^{ik\bar{z}}$ 형태의 모든 해를 이용하고 있다. 다시 말하여 고주파의 해를 모두 이용하고 있다는 것이다. 질문은 $\gamma = \chi(D)$ 일 때, 과연 일정한 주파수 대에 있는 해를 이용하여 D 를 찾는 역공식을 만들 수 있겠는가 하는 것이다.

지금까지 이 절에서 논의한 것은 γ 가 함수일 때만 다룬 것이다. 최근에는 γ 가 양의 정부호 행렬일 때 γ 의 결정 문제가 큰 관심의 대상이 되고 있다. 2 차원에서는 등열좌표계(isothermal coordinate)를 이용하여 전도율이 함수인 경우로 바꿀 수 있으므로 새로운 문제가 아니다 [52]. 3 차원의 경우에는 현재로서는 경계에서 접선 방향 성분을 결정할 수 있다는 것이 결과의 전부이다 [41]. 행렬의 결정 문제에는 일반적으로 결정을 불가능하게 하는 큰 제한 조건이 있는데 거기에 대해서는 [56] 를 참고하기 바란다.

또 하나의 큰 관심을 끌고 있는 문제는 $\partial\Omega$ 에서 제한된 영역에서만 측정된 데이터를 가지고 내부의 전도율을 결정하는 문제인데 여기에 대해서는 알려진 바가 전무하다.

3. 유한번 측정 문제

이 절에서는 유한번 측정 문제의 중요한 결과들과 그 결과를 얻어내는 기본적 아이디어를 설명한다. 여기서 부터는 다시 Λ_γ 가 노이만-디리클레 사상이라 하자. 우리가 다루는 문제는 다음과 같다.

전도체 역문제-유한측정. Ω 를 리프쉬츠 경계를 갖는 $\mathbb{R}^n$ 상의 유계 연결 영역이라 하고 D_j $(j = 1, 2, ..., l)$ 을 Ω 에 포함되어 있는 부분영역이라 하자. Ω 의 전도율 분포는 D_j 를 제외한 부분에서는 1 이고 각 D_j 에서는 k_j $(0 < k_j \neq 1)$ 로 주어진다고 하자. 유한측정 문제에서 다루는 전도율은

$$\gamma = \chi(\Omega \setminus (\cup_{j=1}^{n} D_j)) + \sum_{j=1}^{n} k_j \chi(D_j)$$

로 주어진다. 이때 역문제는 유한개의 전류 g_k $(k = 1, 2, ..., N)$ 를 Ω 의 표면에 가했을 때 발생되는 전압 $\Lambda_\gamma(g_k)$ 를 정보로 하여 γ 를 찾으라는 문제이다. 전도율 γ 를 찾는 것과 미지의 영역 D_j 찾는 것이 같으므로, 이 문제는 물체

내부의 이질 전도체를 탐사하는 문제로 볼 수 있다. 즉 비파괴 검사와 같은 종류의 문제이다. Ω 를 우리의 신체, D_j 를 신체 내부의 장기 혹은 암세포[3]라 생각하면 도움이 될 것이다.

현재 알려진 결과들은 대개 미지의 영역의 갯수가 하나이고 그것이 가지는 전도율 k 가 알려져 있을 때이므로 그러하다고 가정한다. 따라서 Λ_γ 를 Λ_D 로 나타내어도 혼란의 소지는 없겠다. 또 사용되는 전류의 갯수도 하나인 경우가 대부분이다. 여기서 다루는 문제는 다음과 같다.

1. 유일성: 경계 $\partial\Omega$ 에서 $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 가 성립하면 $D_1 = D_2$ 인가? $(D_j \subset \Omega)$. 이 질문은 D 를 탐사하는데 한번 측정으로 충분한가 하는 중요한 질문이다.
2. 안정성: $\|\Lambda_{D_1}(g) - \Lambda_{D_2}(g)\|_{L^2(\partial\Omega)}$ 가 작으면 $d(D_1, D_2)$ 도 작은가? 여기서 $d(D_1, D_2)$ 는 두 영역 D_1 과 D_2 사이의 적당한 거리, 예를 들어 Hausdorff 거리 혹은 대칭적 차집합의 면적 $|D_1 \setminus D_2| + |D_2 \setminus D_1|$ 등이 될 수 있다.
3. 크기 측정: $(\Lambda_D(g), g)$ 로 부터 D 의 크기를 측정하라.
4. 수치적 방법

이 밖에도 유한번 측정 문제의 경우 어떤 노이만 데이터를 선택해야 하는가 하는 문제도 매우 중요하다. 즉 γ 를 찾는데 어떤 형태의 노이만 데이터가 효과적인가 하는 질문이다. 예를 들어, 많이 진동하는 노이만 데이터에 의하여 생기는 전압 포텐셜 u 의 에너지는 대부분 Ω 의 경계에 모여 있어서 Ω 내부로 확산이 미미하고, 따라서 경계에서 멀리 있는 이질 전도체를 탐사하기에는 적절하지 못하다.

이 장을 통틀어서 $\Omega \setminus \overline{D}$ 가 연결되어 있다고 가정하는데, 이 가정은 다음에서 볼 수 있듯이 필요한 가정이다. 편의상 D 의 전도율이 2 라 가정하자. $\Omega = B_5(0)$ 라 두고, $\partial\Omega$ 에서 $g(\theta) = \cos n\theta$ 라 두면, 두 개의 서로 다른 영역 $D_1 = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ 과 $D_2 = B_{r_n}(0)$ $(r_n^{2n} = \frac{9(2^{2n}-1)}{9-2^{-2n}})$ 이 같은 디리클레 데이터를 생성한다. 이것은 $NP[D_j, g]$ 의 해를 구체적으로 계산하여 확인 할 수 있다 [32]. 즉 $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 가 성립하지만, D_1 과 D_2 는 서로 다른 영역이다. 앞에서 보았듯이 1 차원에서는 유일성이 성립하지 않는데, 이 경우에도 $\Omega \setminus D$ 는 연결되어 있지 않다.

3.1. 해의 표현식

여기서는 방정식 $\nabla \cdot ((1 + (k-1)\chi_D)\nabla u) = 0$ 의 해를 영역 D 와 측정된 데이터 $(\Lambda_D(g), g)$ 만 가지고 표현하는 표현식을 설명한다. 이 표현식은 역문제를 다루는데 아주 유용하다.

---

[3]암세포는 정상세포에 비해서 네 배 또는 다섯 배의 전도율을 갖는다.

노이만 문제 $NP[D,g] = NP[\gamma,g]$ 의 해를 u 라 하고

$$u^e := u|_{\Omega\setminus D}, \qquad u^i := u|_{\overline{D}}$$

라 하면, D 의 경계 ∂D 를 따라서 다음과 같은 꺾임 현상이 발생한다.

$$u^e = u^i, \qquad \frac{\partial u^e}{\partial \nu} = k\frac{\partial u^i}{\partial \nu} \quad \text{on } \partial D. \tag{25}$$

다시 말하면 $NP[D,g]$ 의 해의 법선방향미분은 ∂D 를 따라 불연속성을 갖는다. 이러한 불연속성을 표현하기 위해서는 층 포텐셜을 이용하는 것이 효과적일 것이라고 짐작할 수 있다. 실제로 우리는 다음과 같은 표현식을 얻을 수 있다. 이 절을 통해서 $\mu := k-1$ 로 두자.

정리 3.1 (표현식). u 가 노이만 문제 $NP[D,g]$ 의 해라 하자. 그러면 조화함수 $H \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega)$ 와 함수 $\Phi_D \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n \setminus \partial D)$ 가 유일하게 존재하여, u 가 Ω 에서 다음과 같이 분해된다.

$$u = H + \Phi_D. \tag{26}$$

$f = \Lambda_D(g) = u|_{\partial\Omega}$ 라면,

$$H = -\mathcal{S}_\Omega g + \mathcal{D}_\Omega f, \qquad \Phi_D = \mathcal{S}_D\varphi_D \tag{27}$$

로 표현되는데, 여기서 $\varphi_D \in L^2_0(\partial D)$ 는 ∂D 에서 적분방정식

$$\left(\frac{k+1}{2(k-1)}I - \mathcal{K}_D^*\right)\varphi_D = \frac{\partial H}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} \tag{28}$$

를 만족한다. 뿐만 아니라, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ 에서

$$H + \Phi_D = 0 \tag{29}$$

을 만족한다.

이 결과는 [27] 에서 처음 얻어졌고, 위와 같은 형태로 기술되고 증명된 것은 [32] 에서 찾을 수 있다.

정리 3.1 에 나타난 함수 H 를 해의 조화부분, Φ_D 를 꺾임부분이라 부르기로 하자. 실제로 $\Phi_D = \mathcal{S}_D\varphi_D$ 는 ∂D 에서 발생하는 꺾임에 대한 정보를 모두 가지고 있다. 예를 들어,

$$\varphi_D = (k-1)\frac{\partial u^i}{\partial \nu} = \frac{k-1}{k}\frac{\partial u^e}{\partial \nu} \tag{30}$$

가 성립한다.

뿐만 아니라, $H \in W^{1,2}(\Omega)$ 인 조화함수 H 에 대하여 (28) 을 만족하도록 φ_D 를 정의하면, $u = H + \mathcal{S}_D\varphi_D$ 는 전이조건 (25) 를 만족하므로, 방정식

$\nabla \cdot ((1+\mu\chi_D)\nabla v) = 0$ 의 해가 된다. 이러한 사실은 $\nabla \cdot ((1+\mu\chi_D)\ \nabla v) = 0$ 의 해를 만들 때 쓸모 있다.

3.2. 유일성

이 절에서는 유한번 측정문제의 대역적 유일성에 대한 결과들을 정리한다. D_j $(j=1,2)$ 가 Ω 의 부분영역일 때, 유일성 문제란 적당한 노이만 데이터 (전류) g 에 대하여 $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 이면, $D_1 = D_2$ 인가 하는 것이다.

간단한 관찰에서 시작하기로 하자. $\Lambda_{D_1}(g)$ 과 $\Lambda_{D_2}(g)$ 가 같다면, 조화함수의 유일성 성질 때문에 $\partial\Omega$ 와 연결된 $\Omega \setminus \overline{D_1 \cup D_2}$ 의 연결부분집합에서 $u_1 = u_2$ 가 성립한다. 그러므로 $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 = \emptyset$ 이라면, 최대값 원리에 의하여 Ω 에서 $u_1 = u_2$ 가 성립한다. 이는 u_1 이 ∂D_1 에서 꺾임현상을 갖지 않는다는 의미 즉, $k=1$ 임을 의미하므로 모순이다. 따라서 우리는 다음의 쉬운 정리를 얻을 수 있다.

보조정리 3.2. $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 이면, $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \neq \emptyset$.

이제 간단하지만 아주 쓸모있는 등식을 하나 유도하기로 하자. u_j 가 $NP[D_j, g]$ 의 해라면 $(j=1,2)$, 그들은 같은 노이만 데이터 g 를 가지므로, 임의의 함수 $\eta \in W^{1,2}(\Omega)$ 에 대하여, 다음 등식을 만족하게 된다.

$$\int_\Omega (1+\mu\chi_{D_1})\nabla u_1 \nabla\eta dx = \int_\Omega (1+\mu\chi_{D_2})\nabla u_2 \nabla\eta dx.$$

따라서

$$\int_\Omega (1+\mu\chi_{D_1})\nabla(u_1-u_2)\nabla\eta dx = \mu\int_\Omega (\chi_{D_2}-\chi_{D_1})\nabla u_2 \nabla\eta dx. \tag{31}$$

이제 등식 (31) 에 $\eta = u_1$ 과 $\eta = u_1 - u_2$ 를 차례로 대입하면, 다음의 등식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (1+\mu\chi_{D_1})|\nabla(u_1-u_2)|^2 dx + \mu\int_{D_2\setminus D_1} |\nabla u_2|^2 dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{D_1}(g) - \Lambda_{D_2}(g)) g d\sigma + \mu\int_{D_1\setminus D_2} |\nabla u_2|^2 dx. \end{aligned} \tag{32}$$

이 등식은 여러 측면에서 쓸모가 있는데, 예를 들어 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다. 만약 $D_1 \subset D_2$, $\mu > 0$ 이고 $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_1}(g)$ 라면, Ω 에서

$$u_1 = u_2.$$

(만약 $\mu < 0$ 이면, 위 등식에서 D_1 과 D_2 의 역할을 바꾸어 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.) 따라서 앞에서와 같은 방법으로 다음 정리를 얻는다.

정리 3.3. $D_1 \subset D_2$ 이고 $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_1}(g)$ 이면, $D_1 = D_2$.

이 정리는 [9] 와 [2] 에서 얻어졌다.

유한번 측정 문제의 대역적 유일성을 연구하는 사람들의 꿈은 일반적 (볼록)영역에 대한 유일성을 증명하는 것이다. 하지만 이는 대단히 어려운 일이고, 대개는 제한된 집합 내에서 유일성 문제를 다루게 된다. 지금까지 유일성이 증명된 영역의 집합은 2 차원 다각형의 집합, 제한적이지만 3 차원 볼록다면체의 집합, 2 차원과 3 차원 공의 집합 등이다. 이제 그 결과들을 살펴보기로 한다.

Friedman 과 Isakov [20] 는 D_j 가 볼록다각형이고 거리 조건

$$\mathrm{diam}(D_j) < \mathrm{dist}(D_j, \partial\Omega), \quad j = 1, 2 \tag{33}$$

을 만족할 때, 임의의 노이만 데이터 $g \neq 0$ 에 대하여 $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_1}(g)$ 이면 $D_1 = D_2$ 임을 증명하였다. 그들이 관찰한 것은 $NP[D, g]$ 의 해의 바깥부분 u^e 가 다각형 D 의 꼭지점 P 근방으로 조화함수로서 확장이 된다면 점 P 에서 다각형의 각이 π 의 유리수 배가 되어야 한다는 것이다. 이제 점 P 를 중심으로 영역 D 와 해 u 를 회전하여 원하는 유일성을 얻었는데, 그 과정 중에 D 의 회전이 영역 Ω 에 들어 있어야 한다는 것이 필요하여 위와 같은 거리조건을 두게 되었다.

서진근은 [50] 에서 위의 거리조건을 제거하고 유일성을 증명하였으며, 더 나아가 일반적인 볼록일 필요가 없는 일반적인 다각형에 대해서는 두 번의 측정을 통하여 유일성을 규명하였다. 그의 방법은 기하적 지표이론(geometric index theory)에 근거하고 있는데, 이는 다양한 분야에서 이용되고 있는 중요한 방법이므로 간단히 그 정신을 살펴보자. u 가 영역 Ω 에서 조화함수라 하자. Ω 의 내부에 있는 점 x 에서 $\nabla u(x) = 0$ 이라면, x 에서 출발한 u 의 등위선이 Ω 를 적어도 4 개의 부분영역으로 쪼개야 한다. 그러므로 집합 $\{x \in \partial\Omega : \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) > 0\}$ 가 연결되어 있지 않다. 따라서 노이만 경계 데이터 g 를 $\{x \in \partial\Omega : g(x) > 0\}$ 가 연결되도록 잡으면 $\nabla u(x) \neq 0$ 임을 알 수 있다. 이것이 가장 초보적인 형태의 기하적 지표이론이다. 이러한 이론은 2 차원에서만 성립하는 현상이므로 응용되는 결과들도 2 차원의 결과들이다.

정리 3.4. D_1 과 D_2 가 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 에 포함되는 다각형이라 하고 $g (g \neq 0)$ 를 $\partial\Omega$ 에서 조각적으로 연속인 함수로서 $\{x \in \partial\Omega : g(x) > 0\}$ 가 연결되어 있다고 하자. $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 이면

$$D_1 \text{ 의 최소볼록집합} = D_2 \text{ 의 최소볼록집합}.$$

증명개요. 0 이 D_1 의 최소볼록집합의 꼭지점으로 $0 \notin \overline{D}_2$ 라 가정하자. 그러면 $NP[D_2, g]$ 의 해 u_2 는 0 근방에서 조화함수이다. 꼭지점 0 근방에서 ∂D_1 의 변에 수직인 벡터 $\{N^1, N^2\}$ 와 접선벡터 $\{T^1, T^2\}$ 는 각각 $\mathbb{R}^2$ 의 기저가 된다. u_1 은 ∂D_1 에서 연속이므로 $\langle T^j, \nabla u_1^i(0)\rangle = \langle T^j, \nabla u_2(0)\rangle$, $j = 1,2$ 이고 따라서 $\nabla u_1^i(0) = \nabla u_2(0)$. 적당한 $r > 0$ 에 대하여 $\partial D_1 \cap B_r(0)$ 에서 $\frac{\partial u_1^e}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}$ 가 성립하므로, ∂D_1 에서 발생하는 u_1 의 꺾임현상 때문에 $k\langle \nabla u_1^i(0), N_j\rangle = \langle \nabla u_2(0), N_j\rangle$, $j = 1,2$ 가 성립한다. 즉, $k\nabla u_1^i(0) = \nabla u_2(0)$. 그러므로 $\nabla u_2(0) = 0$. 이제 기하적 지표이론을 적용하면 $\{x \in \partial\Omega : g(x) > 0\}$ 가 비연결 집합이므로 모순이다. □

같은 논문에서 비볼록 다각형에 대해서는 다음과 같은 결과를 얻었다.

정리 3.5. D_1 과 D_2 가 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 에 포함되는 다각형이라 하고, g_1 과 $g_2 (g_j \neq 0)$ 를 $\partial\Omega$ 에서 조각적으로 연속인 함수로서 임의의 실수 α 에 대하여 집합 $\{z \in \partial\Omega : g_1(z) - \alpha g_2(z) \geq 0\}$ 가 연결되어 있다고 하자 $(g_1 \neq g_2)$. $\Lambda_{D_1}(g_j) = \Lambda_{D_2}(g_j)$ $(j = 1, 2)$ 이면

$$D_1 = D_2.$$

최근에는 Ikehata가 지수적으로 증가하는 해를 이용하여 볼록다각형의 꼭지점을 찾는 방법을 제안하였다.

3차원 볼록다면체의 경우 Barcelo, Fabes, 서진근이 논문 [8] 에서 유일성을 증명하였지만 그때 사용된 노이만 데이터 g 가 매우 제한적이고 특별하여 아직 미해결이라 보는 것이 타당하다.

이제 2 차원과 3 차원 공의 유일성에 대한 결과를 살펴보자. 원반의 경우, Friedman과 Isakov가 Ω 가 반공간일 때 원반의 유일성을 규명하였으며 [20], Isakov와 Powell은 [24]에서 약간의 제한 조건하에서 여러개의 원반으로 구성된 영역의 유일성을 규명하였다. 이들의 방법은 조화함수의 확장의 유일성과 반공간의 경계에 대한 반사를 이용하고 있다.

저자들은 [27] 에서 Ω 가 반공간이라는 조건을 제거하고 임의의 리프쉬츠 영역에 들어 있는 원반의 유일성을 규명하였고, [29] 에서는 3 차원 공의 유일성을 규명하였다. 이 유일성 결과는 임의의 노이만 데이터에 대하여 성립하는 것이다.

정리 3.6. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 는 단순연결된 리프쉬츠 영역이고, D_1 과 D_2 는 Ω 에 포함되는 원반이며, g 는 0 이 아닌 노이만 데이터일 때, $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 이면, $D_1 = D_2$.

D 가 원반일 때,

$$\mathcal{K}_D^* f = \frac{1}{2|\partial D|} \int_{\partial D} f d\sigma \tag{34}$$

이므로, 표현식 (26)-(28) 으로 부터 $u_j^i = (1 - \frac{1}{\lambda})H +$ 상수 임을 알 수 있다. 그런데 $D_1 \cap D_2$ 이 $\Omega \setminus D_1 \cup D_2$ 와 연결되어 있으므로, $D_1 \cap D_2$ 에서 $u_1^i = u_2^i$ 임을 알 수 있다. 이 사실과 최대값 원리로 부터 쉽게 $D_1 = D_2$ 임을 알 수 있다. 이 모든 논의가 가능한 이유는 원반에서는 (34)이 성립하기 때문인데, 불행하게도 이러한 성질을 만족하는 영역은 2 차원 원반 밖에는 없다. 이는 정전기의 분포와 밀접한 관계가 있는데 여기에 대해서는 [42, 43, 46, 51] 등을 참고하라.

이제 3 차원의 결과를 설명한다.

정리 3.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 는 단순연결된 리프쉬츠 영역이고, D_1 과 D_2 는 Ω 에 포함되는 공이며, g 는 0 이 아닌 노이만 데이터일 때, $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 이면, $D_1 = D_2$.

위 정리의 증명을 간단히 설명하자. 표현식에 따라 $NP[D, g]$ 의 해는 $u = H + \mathcal{S}_D\varphi_D$ 로 표현된다. 이 표현식의 각 항 H 와 $\mathcal{S}_D\varphi_D$ 는 다음과 같은 특별한 반사 성질을 갖는다. 즉, 다음 세 문장이 동치이다.

- H 가 점 x 근방으로 조화함수로서 확장된다.
- $(\mathcal{S}_D\varphi_D)^i$ 가 점 x 근방으로 조화함수로서 확장된다.
- $(\mathcal{S}_D\varphi_D)^e$ 가 점 $x^*(D)$ 근방으로 조화함수로서 확장된다.

여기서 $x^*(D)$ 는 x 의 ∂D 에 대한 대칭점 즉, $D = B(a, d)$ 일 때

$$x^*(D) := a + \frac{d^2(x-a)}{|x-a|^2}$$

이다. 이러한 성질은 단층 포텐셜의 반사성질

$$\mathcal{S}_D\varphi_D(x) = \frac{d}{|x-a|}\mathcal{S}_D\varphi_D(x^*(D)), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

과 구면조화함수로 표현되는 H 와 $\mathcal{S}_D\varphi_D$ 사이의 관계로 부터 나온다. H 와 $\mathcal{S}_D\varphi_D$ 는

$$\mathcal{S}_D\varphi_D(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} \sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha H(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha, \quad x \in D$$

의 관계를 만족한다. 여기서는 편의상 $k = 2$ 라 가정하고 있다. 이러한 반사성질은 $(\mathcal{S}_D\varphi_D)^e$ 가 확장되는 정도에 따라 H 가 확장되는 정도를 알 수 있게 해

주며, 여기에 초보적이지만 복잡한 기하적 논의를 거쳐 원하는 정리가 증명되었다. 이 방법은 일반적인 차원 $n \geq 2$ 에서 성립한다. 이 증명 방법은 [26] 에서도 매우 중요한 아이디어로 쓰이고 있는데, 위에서 설명한 것은 그 논문에서 약간 다듬어진 형태이다.

영역 D 뿐만 아니라 전도율 k 도 미지일 때는 위와 같은 임의의 노이만 데이터로 부터 유일성을 증명할 수는 없다. 사실 어떤 노이만 데이터 g 에 대해서는 무한히 많은 영역과 전도율의 쌍 (D, k) 가 존재하여 같은 디리클레 데이터를 생성한다. 이는 어렵지 않은 계산으로 확인할 수 있는데, 여기에 대해서는 [31] 를 보라.

이제 마지막으로 유일성에 대한 미해결 문제를 살펴보자. 물론 꿈은 일반적인 영역 혹은 볼록영역의 유일성을 규명하는 것이다. 하지만 이는 매우 어려운 문제이며 현재로서는 타원반의 유일성 조차 규명되어 있지 않으며 새로운 아이디어가 필요할 것으로 보인다. 또 유한개의 원반의 합집합의 유일성 문제도 매우 어렵고 중요한 문제로 보인다. 수치적으로도 가까이 있는 두개의 원반을 경계에서의 측정만으로 찾는 것이 매우 어려워 보이기 때문이다.

여기서 설명한 대역적 유일성에 대비하여 국소적 유일성의 문제가 있는데 2 차원의 국소적 유일성은 [4] 에서 리이만-힐버트 문제를 이용하여 증명되었다. 하지만 3 차원 영역의 국소적 유일성 문제는 미해결로 남아 있다.

3.3. 안정성과 오차 측정

유일성의 결과 조차 미미한 상태에서 안정성의 질문은 무모한 듯이 보인다. 하지만 원반의 경우 대역적 안정성이 규명되었다. 또한 역문제의 유일성과 미분 방정식(정문제)의 해의 안정성을 이용하면 여기서 설명하는 오차 측정의 결과를 얻을 수 있다. 여기서는 원반의 대역적 안정성과 원반과 타원의 섭동의 오차측정에 대하여 설명한다. 이러한 결과의 의미를 이해하려면 탐사 대상이 되는 미지의 영역이 원반은 아니지만 원반과 비슷한 경우를 상정하면 된다.

우선 안정성을 얻는 한가지 일반적 방법을 설명하자. D_j $(j = 1, 2)$ 를 Ω 의 부분영역이고 u_j 를 $NP[D_j, g]$ 의 해라 하자. 두 개의 양 E_1 과 E_2 를 다음과 같이 정의한다.

$$E_1 := \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\partial D_1 \cup \partial D_2)}, \qquad E_2 := \left\| \frac{\partial}{\partial \nu}(u_1 - u_2) \right\|_{L^\infty(\partial D_1 \cup \partial D_2)}$$

편의상 $k = 2$ 로 두자. 그러면 발산정리에 의해

$$\int_{D_1 \setminus D_2} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 = \int_{\partial(D_1 \setminus D_2)} \frac{\partial}{\partial \nu}(u_1^i - u_2^e)(u_1 - u_2) = O(E_1).$$

한편으로 ∂D_1 에서는 $2\frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1^e}{\partial \nu}$ 이므로,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_1^i - u_2^e) = \frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} - \frac{\partial u_1^e}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \nu}(u_1^e - u_2^e)$$
$$= -\frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} + O(E_2) \quad \text{on } \partial D_1 \setminus D_2,$$

또

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_1^i - u_2^e) = -\frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} + 2\frac{\partial}{\partial \nu}(u_1^i - u_2^i)$$
$$= -\frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} + O(E_2) \quad \text{on } \partial D_2 \cap D_1$$

가 성립한다. 여기서 ν 는 $\partial(D_1 \setminus D_2)$ 에 외향법선벡터이다. 따라서 다음 식을 얻는다.

$$\int_{D_1\setminus D_2} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 = -\int_{\partial(D_1\setminus D_2)} \frac{\partial u_1^i}{\partial \nu}(u_1 - u_2) + O(E_2).$$

다시 두번째 항에 발산정리를 적용하면

$$\int_{D_1\setminus D_2} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 = -\int_{\partial(D_1\setminus D_2)} u_1 \frac{\partial}{\partial \nu}(u_1^i - u_2^e) + O(E_2)$$
$$= \int_{\partial(D_1\setminus D_2)} u_1 \frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} + O(E_2)$$
$$= \int_{D_1\setminus D_2} |\nabla u_1|^2 + O(E_2).$$

이제 D_1 과 D_2 의 역할을 맞바꾸어 나타나는 식과 위 식을 더하면,

$$\int_{D_1\setminus D_2} |\nabla u_1|^2 + \int_{D_2\setminus D_1} |\nabla u_2|^2 = O(E_1) + O(E_2)$$

를 얻는다. 따라서, 안정성 부등식을 얻으려면 다음 부등식을 얻으면 된다:

$$\int_{D_1\setminus D_2} |\nabla u_1|^2 + \int_{D_2\setminus D_1} |\nabla u_2|^2 \geq C|D_1 \Delta D_2| \tag{35}$$

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\partial D_1 \cup \partial D_2)} + \left\|\frac{\partial}{\partial \nu}(u_1 - u_2)\right\|_{L^\infty(\partial D_1 \cup \partial D_2)} \tag{36}$$
$$\leq \psi(\|\Lambda_{D_1}(g) - \Lambda_{D_2}(g)\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

여기서 ψ 는 $\psi(t) \to 0$ $(t \to 0^+)$ 를 만족하는 적당한 함수이다. 다시 말하여, 부등식 (35)와 (36)이 성립하면,

$$|D_1 \Delta D_2| \leq C\psi(\|\Lambda_{D_1}(g) - \Lambda_{D_2}(g)\|_{L^2(\partial\Omega)}) \tag{37}$$

즉, 안정성 부등식을 얻을 수 있다.

부등식 (35) 와 부등식 (36) 을 좀 더 자세히 살펴보기로 하자. 부등식 (35) 을 얻는 것은 크게 어렵지 않다. 즉 노이만 데이터를 조정하여 해의 경도가 0 이 되지 않도록 할 수 있다. 예를 들어 D 가 원반일 때에는 노이만 데이타 g 가 다음 조건을 만족하면 $|\nabla u|$ 가 D 와 무관한 하계를 갖는다는 것이 증명되었다 [34].

(N1) 양수 M 이 존재해서 $|g(P)| < M$ 이면 $|g'(P)| > M$ 이다. 이때, $P \in \partial\Omega$ 이고, g'은 $\partial\Omega$ 에서 접선 방향의 미분을 나타낸다.

(N2) 집합 $\{P \in \partial\Omega : g(P) \geq 0\}$ 와 $\{P \in \partial\Omega : g(P) \leq 0\}$ 는 공집합이 아니며 연결되어 있다.

앞에서 보았듯이 조건 (N2) 때문에 해 u 는 Ω 에서 임계점을 갖지 않으며, 조건 (N1) 이 의미하는 바는 ∇u 가 $\partial\Omega$ 에서 하한을 갖는다는 것이다. 이러한 두가지 조건을 가하면 부등식 (35) 을 얻는다.

이제 문제는 부등식 (36) 이다. $\partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial(D_1 \cup D_2) \cup \partial(D_1 \cap D_2)$ 이므로, (36) 의 왼쪽에 있는 최대값 노름을 $\partial(D_1 \cup D_2)$ 과 $\partial(D_1 \cap D_2)$ 위에서의 노름으로 분리할 수 있다. D_1 과 D_2 가 볼록이라면, $\partial(D_1 \cup D_2)$ 는 $\Omega \setminus \overline{D_1 \cup D_2}$ 의 연결된 부분영역의 경계이다. 따라서, 쉬운 일은 아니지만 $\partial(D_1 \cup D_2)$ 상의 최대값 노름이 조화함수가 가지는 프라그만-린될레프 형[4]의 측정을 통하여 얻을 수 있을 것이다. 하지만 $\partial(D_1 \cap D_2)$ 에 대해서는 이러한 논의가 통하지 않는데 여기에서 모든 어려움이 출발한다. 이러한 어려움을 극복하고 $\partial(D_1 \cap D_2)$ 상의 정보를 끌어낼 수 있었던 유일한 경우가 원반의 경우인데, 이것도 모두 표현식과 식 (34) 의 덕분이다. D 가 원반이고 $\psi(t) = |\log t|^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ 인 경우 부등식 (36) 은 [34] 에서 증명되었다. [19] 에서는 해의 확장 가능성을 이용하여 부등식이 $\psi(t) = t^\alpha$ $(\alpha > 0)$ 인 경우로 확장되었다. 같은 논문에서 안정성 결과는 원반의 섭동으로 확장되었는데, 그 결과는 다음과 같다.

정리 3.8. D_1 과 D_2 가 원반의 $\epsilon-$섭동이다. 노이만 데이터 g 가 조건 (N1) 와 (N2) 를 만족하면, D_j 와 무관한 상수 C 가 존재하여

$$|D_1 \Delta D_2| \leq C\left(\epsilon + \|\Lambda_{D_1}(g) - \Lambda_{D_2}(g)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right)^\alpha$$

[4]혹은 unique continuation

이 성립한다.

정리 3.8에서, ϵ 는 섭동의 정도를 나타내는 양이다. 보다 정확하게 말하자면, C^2 영역 D 가 영역 B 의 $\epsilon-$섭동 이라는 것은 ∂D 가 $\|\omega\|_{C^1(\partial B)} \leq 1$ 을 만족하는 ω 에 대하여

$$\partial D : x + \epsilon\omega(x)\nu(x), \quad x \in \partial B$$

로 표현된다는 의미이다. 이 정리는 원반에 대한 역문제의 안정성 측정과 미분방정식 $P[D, g]$ 의 해의 영역 D 의 변동에 따른 안정성으로 부터 나온다. 또한 다음 정리도 증명되었다.

정리 3.9. D_j 와 ϵ 은 앞 정리와 같다고 하자. $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$ 이면, 상수 C 가 존재하여 부등식

$$|D\Delta D_0| \leq C\sqrt{\epsilon}$$

가 성립한다.

이 정리를 근사적 탐사정리라 불러도 좋을 것인데, 부등식이 나타내는 것은 측정된 전압의 분포가 같다면 두개의 원반의 섭동은 서로 가까워야 한다는 것이다. 다시 말하여, 오차를 내포하고 있는 측정치로 부터 원반의 섭동 모양을 가진 이질 전도체를 근사적으로 찾을 수 있다는 것이다. 정리 3.9 가 모든 0 이 아닌 노이만 데이터 g 에 대하여 성립함을 주목하기 바란다. 이 정리는 Rellich 항등식에 근거한 방법으로 증명되었는데 같은 아이디어를 확장하여 다음과 같은 결과를 얻었다 [30].

정리 3.10. D_1 과 D_2 는 타원형의 ϵ-섭동이다. 그러면 상수 C 가 존재하여

(38)

$$|D_1\Delta D_2| \leq C\left(\|\Lambda_{D_1}(g) - \Lambda_{D_2}(g)\|_{L^2(\partial\Omega)} + (\epsilon + \frac{k}{k^2+1})\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)^\alpha$$

가 만족된다.

k 가 0 이거나 ∞[5] 이고 $\epsilon = 0$ 이면, 부등식 (38) 은 타원형에 대한 대역적 횔더 안정성 측정이다. ϵ 이 작고 k 가 아주 크거나 작다면, (38) 은 오차측정을 나타낸다. 증명은 논문 [30] 을 참고하기 바란다.

[5] $k = 0$ 이란 뜻은 ∂D 가 절연되어 있는 비전도체란 뜻이며, $k = \infty$ 라는 것은 D 가 완전 전도체라는 뜻이다. 이것에 대한 수학적 논의에 대해서는 [30]를 참조하기 바란다. 이러한 극단의 경우에는 최대값 원리로 인하여 역문제의 유일성은 쉽게 증명된다.

3.4. 크기 측정

유한번 측정을 통한 역전도체 문제에서 아주 흥미로운 문제 중의 하나가 크기 측정 문제이다. 여기서는 크기 측정에 대한 그 동안의 이론적 발전과정을 설명하고, 다음 절에서 수치적 방법에 대하여 설명한다.

크기 측정에서 가장 중심이 되는 아이디어는 다음과 같다: h 를 문제 $NP[\emptyset, g]$ 의 해 즉, $\frac{\partial h}{\partial \nu} = g$ 를 만족하면서 Ω 에서 조화로운 함수라 하자. 기본 아이디어는 $\partial\Omega$ 에서 $\Lambda_D(g)$ 와 h 를 비교하는 것이다. D 의 경계에서 발생하는 꺾임을 생각할 때, 이 아이디어는 아주 자연스러운 것이다. 일차원에서는 $\Lambda_D(g)$ 와 h 를 비교하여 D 의 크기를 실제로 쉽게 계산해 낼 수 있다. 이 아이디어를 이용하여, 논문 [34] 과 [5] 에서 서로 독립적으로 크기 측정에 대한 결과를 얻었으며, 논문 [6] 에서는 이러한 결과들을 크게 확장하였다.

u 를 문제 $NP[D, g]$ 의 해라 하자. 항등식 (32) 는 D_1 이나 D_2 가 공집합일 때에도 성립하므로, (32) 에 $D_1 = D$, $D_2 = \emptyset$ 와 $D_1 = \emptyset$, $D_2 = D$ 를 대입하면,

(39)
$$\int_\Omega (1 + \mu\chi_D)|\nabla(u_D - h)|^2 dx - \mu \int_D |\nabla h|^2 dx = -\int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma,$$

$$\int_\Omega |\nabla(u_D - h)|^2 dx + \mu \int_D |\nabla u_D|^2 dx = \int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma \tag{40}$$

을 각각 얻게 된다.

편의상 $k > 1$ 라 하자. 그러면 (40) 에 의하여

$$\int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma > 0.$$

따라서 (39) 에 의하여

$$\int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma \le \mu \int_D |\nabla h|^2 dx.$$

반면에, (40) 에 의하여,

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla h|^2 dx &\le C_1 \left[\int_D |\nabla(u_D - h)|^2 dx + \int_D |\nabla u_D|^2 dx \right] \\ &\le C_2 \int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma. \end{aligned} \tag{41}$$

그러므로 상수 C_1, C_2 가 존재하여

$$
\begin{aligned}
(42) \qquad & C_1 \left| \int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma \right| \\
\leq \quad & \int_D |\nabla h|^2 dx \leq C_2 \left| \int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma \right|
\end{aligned}
$$

를 만족한다. [6] 에서는 ∇h 의 두배성질(doubling property)을 이용하여

$$K|D|^p \leq \int_D |\nabla h|^2 dx$$

를 만족하는 상수 K 와 $p \geq 1$ 가 존재하며, p 는 노이만 데이터 g 에만 의존한다는 것이 증명되었다. 결론적으로 다음 정리가 증명되었다 [6].

정리 3.11. 상수 C_1, C_2 가 존재하여

$$C_1 \left| \int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma \right| \leq |D| \leq C_2 \left| \int_{\partial\Omega} (h - \Lambda_D(g)) g d\sigma \right|^{1/p}$$

를 만족한다.

이 정리는 임의의 측정가능 집합 D 에 대하여 성립한다.

3.5. 수치적 방법

미지의 전도체 D 를 탐사하는 여러가지 수치적 방법이 제안되고 컴퓨터로 구현되었는데, 그러한 방법에 대하여 간단히 살펴보자.

앞에서 설명한 표현식을 이용한 가장 단순한 수치적 계산 알고리즘은 다음과 같다.

1. 측정된 전압-전류 쌍 (g, f) 로 부터

$$H(x) = -\mathcal{S}_\Omega g(x) + \mathcal{D}_\Omega f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$

를 계산한다.

2. 다음 식을 만족하는 D 를 구한다.

$$\|H + \mathcal{S}_D \varphi_D\|_{L^2(S)} = 0.$$

여기서 S 는 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 의 부분집합인데, $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 에 속하는 열린 집합, 혹은 $\partial\Omega$ 등 자유롭게 택할 수 있다.

이 알고리즘은 [33] 에서 제안되었고, D 가 원반일 때 수치모의실험을 하였다. 이 알고리즘의 문제점은 표현식에 나타나는 φ_D 를 구하기가 매우 어렵다는데 있다. 기억해 둘 것은 이 역문제는 불안정성을 가진 것이며 계산상의 약간의 오차가 심각한 문제를 야기할 수 있다는 것이다.

전도체 방정식의 해의 표현식은 탐사 대상 전도체의 위치와 크기를 찾는데 중요하게 쓰이는데, 여기서 최근의 논문 [39, 40] 에서 개발된 위치검출 알고리즘과 크기측정 알고리즘을 설명한다.

위치검출 알고리즘. 다음은 위치검출 알고리즘을 3 차원에서 설명한 것이다. 여기서 주입될 전류값 g 는 상수 벡터 $\vec{a}$ 의 법선 성분값을 준다. 즉 전도체 방정식의 노이만 데이터는

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = g := \vec{a}\cdot\nu \quad \text{on } \partial\Omega$$

이다. $\partial\Omega$ 에서 측정된 전압-전류의 쌍 (f, g) 로 부터 $H = H(x; g, f)$ 를 앞의 1 에서 처럼 구한다.

영역 Ω 밖에 벡터 $\vec{a}$ 와 평행인 관측선 Σ_1 과 $\vec{a}$ 에 수직인 관측면 Σ_2 를 적당히 설정하자. 설정된 관측선 Σ_1 위에서 $H(P_1; g, f) = 0$ 을 만족하는 점 P_1 을 구하고, 관측면 Σ_2 위에서 다음을 만족하는 점 P_2 를 구한다.

$$H(P_2; g, f) = \begin{cases} \min\limits_{x\in\Sigma_2} H(x; g, f) & \text{if } \mu > 0, \\ \max\limits_{x\in\Sigma_2} H(x; g, f) & \text{if } \mu < 0. \end{cases}$$

그 후, 점 P_1 에서 관측선 Σ_1 에 수직인 평면 $\Pi_1(P_1)$ 을 그리고, 점 P_2 에서는 관측면 Σ_2 에 수직인 선분 $\Pi_2(P_2)$ 를 그린다. 이때, 평면 $\Pi_1(P_1)$ 과 선분 $\Pi_2(P_2)$ 가 만나는 점 P 를 영역 D의 H-중심이라 부르자. 결론은 D의 H-중심은 D의 무게중심과 아주 가까이 있다는 것이다.

위에서 소개한 위치검출알고리즘은 충분한 수학적 정당성을 가지고 있다. 그리고 여러 번의 수치모의실험은 이 알고리즘이 매우 안정적임을 보였다. 이에 관한 자세한 내용은 논문 [40]을 참고바란다.

이제 논문 [39]에서 소개된 크기측정 알고리즘을 소개하자.

크기측정 알고리즘 설명을 간편하게 하기 위해, $D \subset B_R(0) \subset \Omega$ 이라 가정하자. 크기를 측정할 도구로서 다음과 같은 노이만 문제의 해 $v_r \in H^1(\Omega)$를 사용한다.

$$\operatorname{div}((1 + \mu\chi_{B_r(0)})\nabla v_r) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$
$$\frac{\partial v_r}{\partial \nu} = g = \vec{a}\cdot\nu \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \text{and } \int_{\partial\Omega} v_r = 0.$$

이때

$$\int_{\partial\Omega}(u - v_r)g = 0$$

을 만족하는 $r \in (0, R)$ 는 유일하게 존재하며 D의 크기와 구 $B_r(0)$의 크기는 근사적으로 같다.

$$|D| \approx |B_r(0)|.$$

위 크기측정 알고리즘은 수치모의실험을 통해 실제 해와 구한 해의 크기의 차이가 0에 가깝다는 것을 보였다.

위에서 설명한 방법 이외에도 여러가지 수치적 방법이 제안되었는데 여기서는 Friedman-Vogelius [21] 와 Cedio-Fengya-Moskow-Vogelius [15] 의 방법을 언급한다. D 가 아주 작은 전도체의 합집합으로 구성되어 있다고 하자. 즉, 어떤 고정된 영역 B 에 대해, $D = \cup_{j=1}^{n}(\epsilon_j B^{\theta_j} + x_j)$ 인데, 여기서 B^{θ_j} 는 B 의 θ_j-회전, ϵ_j 는 수축, x_j 는 평행이동을 나타낸다. 그들의 알고리즘은 노이만 함수를 이용한 선형화 방법인데, 수치모의실험 결과를 보면 여러개의 이질 전도체의 위치, 갯수 등을 비교적 정확히 찾아낸다. 그들의 방법은 다른 방정식에도 응용되었다 [35].

4. 자기공명 전기 임피던스 단층촬영기술(MREIT)

MREIT는 최근 국내 역문제 연구진들을 중심으로 개발한 인체내부의 전류밀도, 저항율, 온도분포의 3가지 영상을 동시에 영상화하는 복합의료영상의 신기술이다. MREIT는 EIT기술과 MRI장치를 이용한 CDI(전류밀도 영상화)기술을 동시에 이용하여 EIT의 문제점을 해결하고, 기존의 의료장비로는 측정할 수 없는 인체내의 임피던스를 영상화하는 방법 및 장치를 제공하는데 그 목적이 있다. (CDI기술에 관해서는 논문 [23, 47, 48, 49, 59, 13]을 참조하라.) EIT기술은 1980년대 초부터 많은 연구가 진행되어 왔음에도 불구하고, EIT측정법의 내부구조에 둔감한 한계성으로 인해 인체단면의 저항율의 영상복원기술은 아직 임상적인 이용이 어려운 상황에 처해 있었다. EIT의 이런 문제점을 해결하기 위해 1994년 국내 의용공학자 우응제, 이수열, 문치웅에 의해 MREIT가 논문 [60]에 소개되었다. 그러나 이 논문에서는 CDI기술을 효과적으로 이용하지 못해 EIT영상에 비해 획기적인 고해상도의 영상을 얻을 수 없었다. 2000년 권오인, 우응제, 윤정록, 서진근은 논문 [38]에서 CDI기술에 의해 얻은 내부전류밀도의 정보를 효과적으로 활용하는 $J-$대입법 알고리즘을 발표하였다. 개발된 J-대입법은 시뮬레이션 결과 자기공명영상과 비슷한 고해상도의 영상결과를 얻게 되어 임상에 실질적으로 적용될 가능성을 열었다.

논문 [38]에서 도입된 J-대입법은 새로운 MREIT 모델로부터 출발한다. 여기서 제안한 전류 주입방식 및 전극부착방식은 J-대입법에 사용될 복잡한 비선형 편미분방정식의 해의 유일성에 기반을 두고 있다. 여기서 편미분방정식의 해의 유일성이 중요한 이유는 J-대입법에 의해 컴퓨터로 디스플레이될 영상이 실제영상과 엄밀하게 일치하도록 해야하기 때문이다. 제안된 MREIT 장치는 두 쌍의 전극을 영상화 하고자 하는 인체의 단면 주위에 다음과 같이 부착한다. 각 전극쌍을 통해 주입된 전류는 인체의 단면을 가로질러 통과하도록 하며, 가능한 서로 수직방향으로 흐르도록 두 전극쌍을 인체단면의 동-서, 남-북 방향에 부착한다. 한쌍의 전극을 통해 인체내부에 주입된 전류는 MRI장치를 통해 내부전류밀도를 영상화할 수 있다. 이는 주입전류에 의해 유기된 자장이 MRI 영상의 위상을 변화시키기 때문이다. 이러한 내부 전류밀도분포는 전극의 위치 및 크기, 인체조직의 저항율 분포등에 따라 변한다. 저항율 분포를 영상화하는 알고리즘을 설명하기 위해서 먼저 다음의 기호를 설정하자.

Ω는 저항율을 영상화 하려는 인체의 단면,

ρ는 인체단면 Ω에서의 저항율 분포 $(\rho = \frac{1}{\gamma})$,

g_1, g_2는 두쌍의 전극을 통해 주입된 전류로서 경계선 $\partial\Omega$ 에서 정의된 함수,

$a_j = |\mathbf{J}_j|$ 는 주입전류 g_j로 부터 CDI 기술에 의해 측정된 인체 내부 전류밀도의 절대값,

u_j는 Ω에서 $\mathbf{J}$에 대응되는 전압분포이다.

우선 MRI장치를 이용하여 어떻게 내부전류밀도값을 구하는지 알아보자. 인체 표면에 부착된 한 쌍의 전극을 통하여 전류 g 를 주입했을 때, 인체내부에 전류밀도 $\mathbf{J} = -\frac{1}{\rho}\nabla u$ 가 형성된다. 만일 단면 Ω 위에서 자속밀도벡터 $\mathbf{J}$가 모두 단면의 방향을 향한다면, 전압 u는 다음 노이만 문제의 해로 해석된다.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\frac{1}{\rho}\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = g, \quad \int_{\partial\Omega} u = 0. \end{cases}$$

인체내부에 발생한 전류밀도 $\mathbf{J}$는 인체내부에 자속밀도벡터 $\mathbf{B}_g$를 유기시키는데, 이때 $\mathbf{B}_g$는 공식 $\nabla \times B_g = \mu_0 \mathbf{J}$ 에 의해 결정된다. (여기서 μ_0는 진공상태에서 투자율을 나타낸다.) 이때 자기공명영상의 위상에 영향을 주는 요소는 유기된 자장 $\mathbf{B}_g$의 단면 Ω에 수직인 x_3-축 방향 성분이다. 따라서 전류밀도 $\mathbf{J}$를 완벽히 복원하기 위해서는 자속밀도의 x_1, x_2-축 성분을 구하도록 MRI장치를 회전해야할 것이다. 그러나 MRI장치를 회전하는 아이디어는 연구목적으로는 수행할 수 있겠으나, 경제적인 측면에서 의료계에서 수용될 가능성은 전혀 없어 보인다. 따라서 유기된 자속밀도의 x_1, x_2-축 성분을 무시할 수 있도록 전류를 주입하도록 한다. 즉 표면전극을 길게하여 단면 Ω 위에서 전류의 대

부분이 인체의 단면 Ω 방향을 따라 흐르도록 한다. 따라서 이로 인해 유기된 자장은 단면 Ω의 수직방향성분이 주성분이 되고 x_1, x_2-성분은 상대적으로 작게되고, 다음공식에 의해 전류밀도를 근사적으로 복원할 수 있다.

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}_g) \approx (\partial_y B_z, -\partial_x B_z, 0). \tag{43}$$

따라서 복원된 전류밀도는 단면 Ω로 부터 수직방향으로 흐르는 원치않는 전류에 의해 피할 수 없는 오차를 포함하고 있다. 전극과 주입전류를 잘 조정해 오차를 줄이는 노력도 필요하지만, 손쉽게 데이터 자체를 조정해 오차를 줄일 수도 있다. 여기서 제안한 방식은 MREIT의 데이터로 $\mathbf{J}$를 쓰는 대신에 그것의 절대값 $a = |\mathbf{J}|$를 쓰는 것이다. 이 데이터를 전도체방정식에 대입하면 미지의 변수 ρ를 없앨 수 있다. 즉, $\rho = \frac{|\nabla u|}{a}$를 위 노이만 방정식에 대입하면 다음과 같은 비선형편미분방정식이 된다.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{a}{|\nabla u|}\nabla u\right) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{a}{|\nabla u|}\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{on } \partial\Omega \quad &\text{and} \int_{\partial\Omega} u = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

결과적으로 비선형적이고 부적절한(ill-posed) 역문제가 전통적으로 이론이 많이 연구된 직문제로 바뀌게 돼서 좀더 다루기 쉬워졌다. 그러나 불행히 위 비선형방정식은 편미방이론에서 가장 기본적인 존재성과 유일성을 갖추고 있지 않다. 이 존재성과 유일성에 관한 수학적 접근은 최근 논문 [36]에서 다루고 있다. 실제 응용상황에서 존재성은 큰 문제가 되지 않을 수 있으나 유일성은 디스플레이 될 영상의 유일성에 밀접히 관련되므로 중요하게 다루어져야 한다. 논문 [38]에서 저자들은 전류밀도의 절대값이 저항율의 변화에 의해 어떻게 영향받는지 깊이있게 고찰하여 다음과 같이 최종 MREIT모델을 유도해 냈다.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{a_2}{|\nabla u_2|}\nabla u_1\right) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\left(\dfrac{a_1}{|\nabla u_1|}\nabla u_2(x,y)\right) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \dfrac{a_1}{|\nabla u_1)|} = \dfrac{a_2}{|\nabla u_2|} \quad \text{in } \Omega, \\ \dfrac{a_2}{|\nabla u_2|}\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu} = g_1, \quad \dfrac{a_1}{|\nabla u_1|}\dfrac{\partial u_2}{\partial \nu} = g_2, \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} u_j = 0, \quad j = 1,2. \end{cases} \tag{45}$$

위에서 유도된 MREIT 수학모델로부터 아래와 같이 전도도분포 $\sigma = \frac{1}{\rho}$를 구하는 $J-$대입법을 자연스럽게 만들 수 있다.

$$1. \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_n \nabla u_1^n) = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_n \frac{\partial u_1^n}{\partial \nu} = g_1, & \int_{\partial\Omega} u_1^n = 0 \end{cases}$$

$$2. \quad \sigma_{n+1/2} \longleftarrow \frac{a_1}{|\nabla u_1^n|} \quad \text{in } \Omega$$

$$3. \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_{n+1/2} \nabla u_2^{n+1/2}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{n+1/2} \frac{\partial u_2^{n+1/2}}{\partial \nu} = g_2, & \int_{\partial\Omega} u_2^n = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad \sigma_{n+1} \longleftarrow \frac{a_2}{|\nabla u_2^{n+1/2}|} \quad \text{in } \Omega$$

위 $J-$대입법의 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 기존의 EIT에서는 가능해 보이지 않는 고해상도의 영상을 복원해냈다.

MREIT는 EIT에 비해 고가의 MRI장비를 이용한 단점을 지니고 있다. 그러나 요즈음 대부분 병원이 MRI장비를 보유하고 있으므로 값싼 EIT장비를 추가적으로 설치함으로써 기존의 MRI 장비가 생체 임피던스 영상이라는 새로운 기능을 얻게되므로 실용 가능성이 높다고 하겠다. 생체의 고해상도의 저항율 영상은 기존의 의료장비로는 얻을 수 없는 새로운 정보를 제공한다. 우선 생리작용에 따라 생체 임피던스가 변하는 장기를 대상으로 한 기능영상으로 새로운 진단기술을 발전시킬 수 있다. 예를들어, 호흡에 따른 폐의 용적측정, 심장에서의 심박출량의 측정, 위장 기능의 측정, 방광 잔료량의 측정, 뇌 기능의 측정에서부터 한의학에서의 경락현상을 측정하는데까지 광범위하게 이용되리라 본다.

References

[1] G. Alessandrini, *Stable Determination of Conductivity by Boundary Measurements*, Applicable Analysis **27** (1988), 153–172.

[2] ———, *Remark on a paper of Bellout and Friedman*, Boll. Unione. Mat. Ita. **3A** (1989), no. 7, 243–250.

[3] ———, *Singular Solutions of Elliptic Equations and the Determination of Conductivity by Boundary Measurements*, J. Diff. Equations **84** (1990), 252–273.

[4] G. Alessandrini, V. Isakov, and J. Powell, *Local uniqueness in the inverse problem with one measurement*, Trans. of Amer. Math. Soc. **347** (1995) 3031–3041.

[5] G. Alessandrini and E. Rosset, *The inverse conductivity problem with one measurement: bounds on the size of the unknown object*, SIAM J. of Appl. Math. **58** (1998), no. 4, 1060–1071.

[6] G. Alessandrini, E. Rosset, and J. K. Seo, *Optimal size estimates for the inverse conductivity problem with one measurement*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 53–64.

[7] R. Beals and R. R. Coifman, *Multidimensional inverse scatterings and nonlinear partial differential equations*, in *Pseudodifferential operators and applications*, Proceedings of Symposia in Pure Math. AMS **43** (1985), 45–70.

[8] B. Barcelo, E. Fabes, and J. K. Seo, *The inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for convex polyhedra*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 183–189.

[9] H. Bellout and A. Friedman, *Identification problem in potential theory*, Archive Rat. Mech. Anal. **101** (1988), 143–160.

[10] H. Bellout, A. Friedman, and V. Isakov, *Inverse problem in potential theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 271–296.

[11] R. M. Brown and G. Uhlmann, *Uniquenes in the inverse conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions*, Comm. in PDE **22** (1997), 1009–1027.

[12] A. Calderon, *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analsis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira di Matematica, Rio de Janeiro, 1980, pp. 65–73.

[13] T. Chan, G. Golub, and P. Mulet, *A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration*, SIAM J. Sci. Comput. **20** (1999), 1964–1977.

[14] R. R. Coifman, A. McIntosh, and Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy definit un opérateur bournée sur L^2 pour courbes lipschitziennes*, Ann. of Math. **116** (1982), 361–387.

[15] D. J. Cedio-Fengya, S. Moskow, and M. Vogelius, *Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction*, Inverse Problems **14** (1998), 553–595.

[16] G. David and J.-L. Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. **120** (1984), 371–397.

[17] L. Escauriaza, E. B. Fabes, and G. Verchota, *On a regularity theorem for Weak Solutions to Transmission Problems with Internal Lipschitz boundaries*, Proceedings of A.M.S. **115** (1992), 1069–1076.

[18] E. B. Fabes, M. Jodeit, and N. M. Riviére, *Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains*, Acta Math. **141** (1978), 165–186.

[19] E. Fabes, H. Kang, and J. K. Seo, *Inverse conductivity problem: error estimates and approximate identification for perturbed disks*, SIAM J. of Applied Math. **59** (1999), no. 5, 1533–1539.

[20] A. Friedman and V. Isakov, *On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 553–580.

[21] A. Friedman and M. Vogelius, *Identification of small inhomogeneities of extreme conductivity by boundary measurements: a theorem on continuous dependence*, Arch. Rat. Mech. Anal. **105** (1989), 563–579.

[22] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[23] H. R. Gamba and D. T. Delpy, *Measurement of electrical current density distribution within the tissues of the head by magnetic resonance imaging*, Med. Biol. Eng. Comp. **36** (1998), 165–170.

[24] V. Isakov and J. Powell, *On the inverse conductivity problem with one measurement*, Inverse Problems **6** (1990), 311–318.

[25] H. Kang, *A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in two dimensions*, preprint.

[26] H. Kang, K. Kwon, and K. Yun, *Recovery of an inhomogeneity in an elliptic equation*, Inverse Problems **17** (2001), 25–44.
[27] H. Kang and J. K. Seo, *Layer potential technique for the inverse conductivity problem*, Inverse Problems **12** (1996), 267–278.
[28] ______, *On stability of a transmission problem*, J. Korean Math. Soc. 1997, pp. 267–278.
[29] ______, *Inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for balls in $\mathbb{R}^3$*, SIAM J. of Applied Math. **59** (1999), no. 5, 1533–1539.
[30] ______, *Identification of domains with near-extreme conductivity: global stability and error estimates*, Inverse Problems **15** (1999), 851–867.
[31] ______, *Uniqueness and non-uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*, to appear in Jour. Korean Math. Soc.
[32] ______, *Recent Progress in the inverse conductivity problem with single measurement*, in Inverse problems and related fields, CRC Press, 2000.
[33] H. Kang, J. K. Seo, and D. Sheen, *Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients*, Inverse Problem **13** (1997), 113–123.
[34] ______, *Inverse conductivity problem with one measurement: Stability and estimations of size*, SIAM J. of Math. Anal. **28** (1997), 1389–1405.
[35] E. Kim, in preparation.
[36] S. W. Kim, O. Kwon, J. K. Seo, and J. Yoon, *On a nonlinear partial differential equation arising in MREIT*, in preparation.
[37] Kohn R and Vogelius M, *Determining conductivity by boundary measurements*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 281–298.
[38] O. Kwon, E. Woo, J. Yoon, and J. K. Seo, *Magnetic Resonance Electrical Impedance Tomography (MREIT) : Simulation Study of J-Substitution Algorithm*, submitted for publication.
[39] O. Kwon and J. K. Seo, *Total size estimation and identification of multiple anomalies in the inverse electrical impedance tomography*, to appear in Inverse Problems.
[40] O. Kwon O, J. K. Seo, and J. Yoon, *A real time algorithm for the location search of discontinuous concuctivites with one measurement*, submitted for publication.
[41] J. Lee and G. Uhlmann, *Determining anistropic real-analytic conductivities by boundary measurements*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 1097–1112.
[42] M. Lim, *Symmetry of a Boundary Integral Operator and a Characterization of a Ball*, to appear in Illinois Jour. of Math.
[43] O. Mendez and W. Reichel, *Electrostatic characterization of spheres*, Forum Math. **12** (2000), 223–245.
[44] A. Nachman, *Reconstructions from boundary measurements*, Ann. Math. **128** (1988), 531–577.
[45] ______, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. Math. **143** (1996), 71–96.
[46] W. Reichel, *Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **137** (1997), 381–394.
[47] G. C. Scott, M. L. G. Joy, R. L. Armstrong, and R. M. Henkelman, *Measurement of nonuniform current density by magnetic resonance*, IEEE Trans. Med. Imag. **10** (1991), no. 3, 362–374.
[48] ______, *Sensitivity of magnetic-resonance current density imaging*, J. Mag. Res. **97** (1992), 235–254.

[49] ———, *Electromagnetic considerations for RF current density imaging*, IEEE Trans. Med. Imag. **14** (1995), 515–524.

[50] J. K. Seo, *A uniqueness result on inverse conductivity problem with two measurements*, J. Four. Anal. Appl. **2** (1996), no. 3, 227–235.

[51] H. Shahgholian, *A characterization of the sphere in terms of single-layer potentials*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), no. 4, 1167–1168.

[52] J. Sylvester, *An anistropic inverse boundary value problem*, Comm. Pure Appl. Math. 1990, pp. 201–232.

[53] J. Sylvester and G. Uhlmann, *A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 91–112.

[54] ———, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. Math. **125** (1987), 153–169.

[55] ———, *Inverse Boundary Value Problems at the boundary-Continuous Dependence*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 197–221.

[56] ———, *The Dirichlet to Neumann map and applications*, Inverse Problems in Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia, 1990, pp. 197–221.

[57] G. Uhlmann, Lecture Note, unpublished.

[58] G. C. Verchota, *Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. of Functional Analysis **59** (1984), 572–611.

[59] Y. Z. Ider and L. T. Muftuler, *Measurement of ac magnetic field distribution using magnetic resonance imaging*, IEEE Trans. Med. Imag. **16** (1997), no. 5, 617–622.

[60] E. J. Woo, S. Y. Lee, and C. W. Mun, *Impedance tomography using internal current density distribution measured by nuclear magnetic resonance*, SPIE **2299** (1994), 377–385.

[61] I. N. Vekua, *Generalized Analytic Functions*, Pergamon Press, London, 1962.

강 현 배
서울시 관악구 신림동 산 56-1
서울대학교 자연과학대학 수리과학부
151-742
E-mail: hkang@math.snu.ac.kr

서 진 근
서울시 서대문구 신촌동 134
연세대학교 이과대학 수학과
120-749
E-mail: seoj@bubble.yonsei.ac.kr