

강인 내부루프 보상기를 이용한 슬라이딩 모드 제어기의 구조적 설계

Structural Design of Sliding Mode Controllers Using Robust Internal-Loop Compensator

김 봉 근, 정 완 균
(Bong Keun Kim and Wan Kyun Chung)

Abstract : In this paper, a generalized framework called as robust internal-loop compensator(RIC) is presented, and by using this, a structural design method of sliding mode controller is proposed. First, a general sliding mode controller is derived and a stabilizing control input is designed based on Lyapunov redesign for the system in the presence of uncertainty and disturbance. And adopting the internal model following control, RIC is proposed. Next, using the structural characteristics of the proposed RIC, disturbance attenuation characteristics are analyzed and the performance of the closed-loop system is predicted. Through this analysis, it is shown that if the control gain of RIC is increased by N times, the magnitude of error is reduced to its $1/N$. The proposed method is verified through experiments using a high-precision positioning system and the performance is evaluated.

Keywords : sliding mode control, structural design, Lyapunov redesign, robust internal-loop compensator, performance predictable control

I. 서론

슬라이딩 모드(sliding mode) 제어는 가변 구조(variable structure) 시스템에 이론적인 기초를 두고, 상태공간(state space)에서 시스템의 상태궤적을 스위칭 표면(switching surface) 위로 유도하여 이 표면 위에 궤적이 계속해서 머물도록 하는 것에 그 목적이 있다[1][2]. 따라서 슬라이딩 모드는 단지 선택된 스위칭 표면에 의해서만 영향을 받으므로 불확실성에 대하여 시스템의 상태궤적은 강건한 특성을 가진다. 하지만 불확실성을 극복하기 위한 제어입력은 chattering 현상과 같은 문제를 발생시키므로 이러한 문제점을 해결하기 위한 많은 방법들이 제안되었다[3][4].

본 논문은 슬라이딩 모드 제어기를 설계하는 방법으로 제어기의 구조 분석을 통한 접근법에 초점을 두고 있다. 따라서 본 논문의 목적은 불확실성과 외란이 존재하는 시스템을 안정화시킬 수 있는 슬라이딩 모드 제어입력의 체계적인 설계방법을 제안하는 것이다. 이를 위하여, 강인 내부루프 보상기(Robust Internal-loop Compensator, RIC)라는 일반화된 외란 억제 제어구조를 내부모델 추종제어(internal model following control)의 개념으로부터 유도하고 슬라이딩 모드 제어기의 설계에 포함시킨다. 그리고 RIC의 구조적인 특성을 이용하여 제안된 제어기의 외란 억제 특성과 성능을 분석하고, RIC의 제어 이득을 N 배만큼 크게 하면 오차의 크기는 $1/N$ 배로 줄어드는 것을 보인다.

2장에서는 슬라이딩 모드 제어의 기본 개념을 소개하고, Lyapunov 재설계(redesign)에 기초하여 시스템을 안정화시킬 수 있는 슬라이딩 모드 제어입력을 설계한다. 3장에

서는 RIC를 유도하고 RIC를 가지는 슬라이딩 모드 제어 시스템의 외란 억제 특성과 성능을 구조적 관점에서 분석하고, 제어기 이득의 변화에 따른 시스템의 성능을 예측한다. 다음으로 4장에서는 정밀 이송 시스템에 대하여 제안한 슬라이딩 모드 제어기의 설계방법을 적용하고, 전체 시스템의 외란 억제 특성과 성능을 예측한다. 그리고 실험 결과를 5장에 보이고, 마지막으로 결론을 맺는다.

II. Lyapunov 재설계에 기초한 슬라이딩 모드 제어
다음과 같이 표현할 수 있는 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어를 고려해보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1(t)x \\ \dot{x}_2 &= A_2(t)x + B_2(t)[u + d(t, x, u)] \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$ 는 $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ 과 $x_2 \in \mathbb{R}^m$ 로 구성되는 상태 벡터이고, $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $u \in \mathbb{R}^m$ 은 제어입력, $d \in \mathbb{R}^m$ 는 알려지지 않은 제한된 크기를 가지는 외란이다. 불확실한 외란 d 는 상태변수 식에서 제어입력 변수가 들어가는 위치로 정확히 들어가는 matching 조건을 만족한다[5]-[7]. 슬라이딩 모드 제어의 목적은 시스템의 상태변수를 다음과 같이 정의되는 집합 S 에 포함되도록 하는 것이다.

$$S = \{x: \phi(t) - \sigma_a(x) = \sigma(t, x) = 0\} \quad (2)$$

여기서 $\phi(t)$ 는 슬라이딩 함수 $\sigma(x, t)$ 에서 시간에 관련된 부분이고 제어되는 플랜트에 대한 기준입력을 포함하고 있다. $\sigma_a(x)$ 는 $\sigma(x, t)$ 의 상태변수에 관련된 부분으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_a = G_1 x_1 + G_2 x_2 \quad (3)$$

여기서 G_1 과 G_2 는 적당한 차원을 가진다.

제어 알고리즘을 유도해내기 위하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 고려해보자.

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (4)$$

(4)를 시간에 대하여 미분하면 다음의 식이 얻어지고

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma}, \quad (5)$$

이 식을 다음과 같이 되도록 만들어 주자.

$$\dot{V} = -\sigma^T D \sigma \quad (6)$$

여기서 D 는 positive-definite 행렬이다. 따라서 (6)은 negative-definite이 되고, 이것은 Lyapunov 안정성에 기초하여 시스템의 안정성을 보장한다. (5)와 (6)으로부터 다음과 같은 식을 생각할 수 있다.

$$\sigma^T (D\sigma + \dot{\sigma}) = 0 \quad (7)$$

위의 식에 대한 해는 다음 식으로부터 얻어질 수 있다.

$$D\sigma + \dot{\sigma} = 0 \quad (8)$$

(2)와 (3)으로부터 슬라이딩 함수의 미분은

$$\dot{\sigma} = \dot{\phi} - G_1 A_1 x - G_2 (A_2 x + B_2 u + B_2 d) \quad (9)$$

로 표현된다. 따라서 $\dot{\sigma}$ 을 0으로 만들기 위하여 (9)로부터 등가(equivalent) 제어입력은

$$u_{eq} = -d + (G_2 B_2)^{-1} [\dot{\phi} - G_1 A_1 x - G_2 A_2 x] \quad (10)$$

로 얻어지고, (8)을 (9)에 대입함으로써 (6)을 만족시키는 제어입력은

$$u = u_{eq} + (G_2 B_2)^{-1} D \sigma \quad (11)$$

로 구해진다. 그러나 실제 시스템의 매개변수와 시스템에 인가되는 외란을 정확히 알 수 없으므로, (10)과 같은 등가 제어입력을 만들어 낼 수는 없다. 따라서 (4)의 Lyapunov 함수에 기초하여 설계된 슬라이딩 모드 제어입력에 대한 전체 시스템의 안정성은 보장되지 않는다. 그러므로 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Lyapunov 재설계에 기초한 슬라이딩 모드 제어기의 설계 방법을 다음에 제안한다.

1. Lyapunov 재설계를 이용한 외란억제

시스템 (1)에 대한 기준모델(reference model)은

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{m1}(t)x \\ \dot{x}_2 &= A_{m2}(t)x + B_{m2}(t)u \end{aligned} \quad (12)$$

로 표현할 수 있다. 이 기준모델을 이용하여 시스템을 안정화시키는 되먹임 제어를 설계하여보자. 먼저, (1)은 기준모델의 매개변수 A_{m1} , A_{m2} , B_{m2} 에 대한 항으로 다음과 같이 다시 표현될 수 있다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{m1}(t)x \\ \dot{x}_2 &= A_{m2}(t)x + B_{m2}(t)[u + d_{eq}(t, x, u)] \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 등가외란(equivalent disturbance) d_{eq} 는

$$d_{eq}(t, x, u) = B_{m2}^{-1}(t) [\widetilde{A}_2(t)x + \widetilde{B}_2(t)u + B_2(t)d(t, x, u)] \quad (14)$$

로 주어지고, $A_{m1} = A_1$, $\widetilde{A}_2 = A_2 - A_{m2}$, $\widetilde{B}_2 = B_2 - B_{m2}$ 이다. A_{m1} , A_{m2} , B_{m2} , d_{eq} 는 시간 t 에서 piecewise 연속이며 x 와 u 에 대해 locally Lipschitz이고, 시간 t 에서 piecewise 연속이며 x 에 대해 locally Lipschitz인 어떠한 되먹임 제어입력

$$u = u_r(t, x) \quad (15)$$

를 가지고도 페루프 시스템이 모든 점 $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbf{D}$ 에 대해 유일한 해를 가진다고 가정한다. 여기서 $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ 는 원점을 포함하는 영역이다. 함수 A_{m1} , A_{m2} 와 B_{m2} 는 정확히 알려진 반면에 함수 d_{eq} 는 모델 단순화로 인한 다양한 불확실한 항과 매개변수 불확실성, 외부에서 들어오는 외란 등을 포함하는 알려지지 않은 함수이다. 다음으로, 기준 페루프 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{m1}(t)x \\ \dot{x}_2 &= A_{m2}(t)x + B_{m2}(t)u_r(t, x) \end{aligned} \quad (16)$$

의 원점이 uniformly asymptotically stable하도록 되먹임 제어입력 (15)를 설계하여 보자. (16)에 대한 슬라이딩 함수의 미분은 다음과 같이 얻어지고

$$\dot{\sigma} = \dot{\phi} - G_1 A_{m1} x - G_2 (A_{m2} x + B_{m2} u_r), \quad (17)$$

따라서 (16)을 안정화시키는 슬라이딩 모드 제어입력은

$$u_r = (G_2 B_{m2})^{-1} [\dot{\phi} - G_1 A_{m1} x - G_2 A_{m2} x] + (G_2 B_{m2})^{-1} D \sigma \quad (18)$$

로 주어진다. 그리고 $u = u_r(t, x) + v$ 를 이용해 불확실 항 d_{eq} 가 부등식

$$\|d_{eq}(t, x, u_r(t, x) + v)\| \leq \rho(t, x) + k\|v\| \quad (19)$$

을 만족한다고 가정하자. 여기서 $\rho \in [0, \infty) \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ 는 nonnegative 연속함수이고, 상수 k 는 $0 \leq k < 1$ 를 만족하고, v 는 부가적인 제어입력이다. 추정치 (19)는 불확실 항 d_{eq} 에 대하여 알아야 할 유일한 정보이다. 함수 ρ 는 불확실성의 크기를 나타내는 기준으로, 크기가 작아야 되는 것이 아니라 단지 알려진 값이어야 한다. 설계의 목적은 Lyapunov 함수 V , 함수 ρ , (19)의 상수 k 에 대한 정보를 가지고, 전체 제어입력

$$u = u_r(t, x) + \gamma(t, x) \quad (20)$$

이 불확실성이 존재하는 실제 시스템 (13)을 안정화시킬 수 있도록 부가적인 제어입력 $v = \gamma(t, x)$ 를 설계하는 Lyapunov 재설계를 할 수 있음을 보이는 것이다.

이제, (13)에 제어 $u = u_r(t, x) + v$ 를 적용하여보자. 그러면 페루프 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{m1}(t)x \\ \dot{x}_2 &= A_{m2}(t)x + B_{m2}(t)u_r(t,x) \\ &\quad + B_{m2}(t)[v + d_{eq}(t,x,u_r(t,x)+v)] \end{aligned} \quad (21)$$

는 기준 페루프 시스템 (16)의 섭동(perturbation)이 된다. 따라서 (21)의 궤적을 따라서 V 의 미분은

$$\dot{V} = -\sigma^T D\sigma + w^T v + w^T d_{eq} \quad (22)$$

가 되고, 여기서 $w^T = -\sigma^T G_2 B_{m2}$ 이다. 오른편의 첫째 항은 기준 페루프 시스템 때문에 생기는 항이고, 두 번째와 세 번째 항은 각각 \dot{V} 에 대한 제어 v 와 불확실 항 d_{eq} 의 영향을 나타낸다. Matching 조건으로 인하여 불확실 항 d_{eq} 는 v 가 나타나는 오른편의 같은 위치에 정확히 나타난다. 결국 \dot{V} 에 대한 d_{eq} 의 영향을 상쇄시킬 수 있는 v 의 선택이 가능하다. 그러나 일반적으로 이렇게 유도된 제어 법칙은 상태변수 x 에 대한 불연속 함수가 될 것이다. 이러한 불연속성은 chattering 현상 같은 문제점을 야기한다. 지금부터 내부적인 동적 보상을 이용하여 $w^T v + w^T d_{eq} \rightarrow 0$ 이 만족되도록 하는 v 를 설계함에 있어서 chattering이 발생하지 않고 체계적으로 최적화시킬 수 있는 제어 방법을 내부모델 추종제어의 개념을 도입하여 제안한다.

2. 내부모델 추종제어

(16)은 제어입력 (15)를 가지는 기준모델 (12)의 페루프 식이므로, 이 식을 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{r1} &= A_{m1}(t)x_r \\ \dot{x}_{r2} &= A_{m2}(t)x_r + B_{m2}(t)u_r(t,x) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $x_r = [x_{r1}^T \ x_{r2}^T]^T$ 은 실제 상태변수와 구별하기 위한 가상의 변수로서, 기준입력 u_r 에 의해 내부적으로 생성되는 기준 상태변수로 정의한다. 플랜트 상태변수와 기준 상태변수의 차이는 모델 추종오차

$$e_r = x_r - x \quad (24)$$

로 정의하고, e_r 에 대하여 미분 방정식 (21)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{r1} &= A_{m1}(t)e_r \\ \dot{e}_{r2} &= A_{m2}(t)e_r - B_{m2}(t)(v + d_{eq}) \end{aligned} \quad (25)$$

로 주어진다.

내부모델 추종제어는 모델 추종오차 e_r 이 주어진 주파수에서 제한된 값을 가지도록 되먹임 제어기 v 를 설계하는 것이다. 이것은 제어기 K 의 설계에 의해 이루어지고, 따라서 v 는

$$v = Ke_r \quad (26)$$

로 설계되고, 여기서 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 이다. (26)을 (25)에 대입하여 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{r1} &= A_{m1}(t)e_r \\ \dot{e}_{r2} &= (A_{m2}(t) - B_{m2}(t)K)e_r - B_{m2}d_{eq} \end{aligned} \quad (27)$$

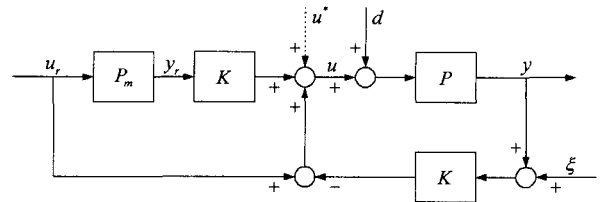


그림 1. 강인 내부루프 보상기의 구조.

Fig. 1. Robust internal-loop compensator structure.

를 얻을 수 있다. (19)의 가정 하에서, K 가 충분히 크게 선택되면 $e_r \rightarrow 0$ 이 됨으로써 $w^T v + w^T d_{eq} \rightarrow 0$ 이 만족될 수 있다. 그러나 K 의 높은 이득 특성이 페루프 시스템 (27)의 대역폭(bandwidth)을 증가시킬 수는 있지만 이러한 높은 이득은 성능과 강인성을 고려할 때 제한될 수밖에 없으므로 시스템의 성능 한계에 적합하게 최적화 시켜야 한다. 이를 위하여, 내부모델 추종제어를 이용하는 강인 내부루프 보상기(RIC)라는 일반화된 외란 억제 구조를 다음 장에 제안한다.

III. RIC를 이용한 성능분석

1. RIC의 구조 및 외란억제 특성 분석

일반성의 손실 없이 제안된 제어방법은 단일 입출력을 가지는 시스템에 대하여 기술된다. 그림 1은 RIC를 이용하여 Lyapunov 재설계에 기초한 제어입력 $v = \gamma(t, y)$ 를 유도할 제어 구조를 보여주고 있다[8]-[10]. 플랜트는 전달함수 P 로 표현하고 출력신호는 y 로 표현한다. u_r 은 기준 제어입력 신호를 나타내고 u 는 제어입력 신호이다. d 는 외란 신호를 나타내고 ξ 는 측정잡음을 나타낸다. P_m 과 K 는 설계되는 동적 모델로서 각각 기준모델과 RIC의 제어기를 나타낸다. 플랜트 출력과 기준모델 출력의 차이는 모델 추종오차

$$e_r = y_r - y \quad (28)$$

로 정의한다. 여기서 y_r 은 기준모델 P_m 의 출력변수이다. 따라서 RIC에 기초한 제어입력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u = u(s) = u_r(s) + K(s)e_r(s) \quad (29)$$

여기서 오른편의 두 번째 항은 (26)에 의해 주어졌다. 또한 비선형 외란을 보상하기 위해 다음과 같이 (29)에 추가적인 제어입력을 첨가할 수도 있다.

$$u = u_r + Ke_r + u^* \quad (30)$$

여기서 u^* 은 비선형 외란을 억제하기 위한 강인 또는 적응제어 알고리즘이 된다.

그림 1의 블록선도에서 기준 제어입력 u_r , 외란 d , 측정잡음 ξ 로부터 플랜트 출력 y 까지의 입출력 관계로부터 모델 추종오차에 대한 다음과 같은 식이 유도되고,

$$e_r = S[(P_m - P)u_r - Pd] + T\xi \quad (31)$$

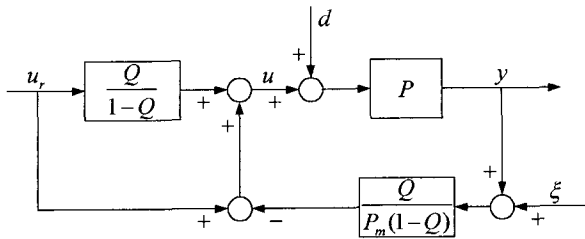


그림 2. Q를 이용한 RIC의 등가 구조.
Fig. 2. Equivalent structure of RIC using Q.

여기서 $S = 1/(1 + PK)$ 와 $T = PK/(1 + PK)$ 는 전형적인 되먹임 시스템의 감도함수(sensitivity function)와 보강도함수(complementary sensitivity function)로 각각 주어진다. 따라서 e_r 을 최소화시키기 위해서는 K 를 S 와 T 가 최적의 값을 가지도록 설계하여야 한다. 그러나 실제 플랜트 P 의 정확한 수학적 모델을 알 수 없기 때문에 S 와 T 를 이용하여 직접적으로 K 를 설계하기는 어렵다. 그러므로 P 대신에 P_m 을 제어기 K 를 이용하여 되먹임 제어하는 가상의 전달함수 Q 를 생각해보자. 따라서 Q 는 다음과 같이 표현된다.

$$Q = \frac{P_m K}{1 + P_m K} \tag{32}$$

이 방정식을 K 에 대해 다시 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$K = \frac{Q}{P_m(1-Q)} \tag{33}$$

여기서 구해진 K 를 그림 1에 대입하면, 그림 2와 같이 RIC의 등가 구조를 얻게 되고, 다시 이 그림은 외란관측기(Disturbance Observer, DOB)의 잘 알려진 형태로 표현할 수 있다[11]. 그러므로 K 를 (33)처럼 선택하면 RIC는 DOB의 특성을 가지게 되어 RIC에 기초한 제어 시스템의 외란 억제 특성을 DOB의 Q 를 이용하여 분석할 수 있게 된다.

2. 강인 안정성 조건

Lyapunov 재설계에 기초한 강인 안정성이 만족되기 위해서는 먼저 (19)의 등가외란에 대한 부등식이 만족되어야 한다. 그러므로 주어진 시스템을 기준모델 P_m 과 등가외란 d_{eq} 에 대한 시스템으로 다시 표현할 필요가 있다. 따라서 그림 3에 보인 것과 같이 제어입력과 외부에서 인가되는 외란이 플랜트로 들어가는 부분을 등가외란에 대한 플랜트로 다시 표현해보자. 입출력에 대한 등가관계로부터 d_{eq} 는 다음과 같이 구해진다.

$$d_{eq} = \left(\frac{P}{P_m} - 1\right)u + \frac{P}{P_m}d \tag{34}$$

그리고 모델링 불확실성을 포함하는 플랜트가 다음과 같이 주어졌다고 가정하자.

$$P = P_m(1 + \Delta_P) \tag{35}$$

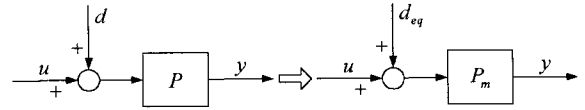


그림 3. 등가외란을 이용한 플랜트의 재구성.
Fig. 3. Reconstruction of plant using equivalent disturbance.

여기서 Δ_P 는 허용 가능한(allowable) 곱셈 불확실성(multiplicative uncertainty)이다. 따라서 (35)로부터 (34)는 다시 다음과 같이 표현되고

$$d_{eq} = \Delta_P u + (1 + \Delta_P)d, \tag{36}$$

이 식을 (19)에 대입하면 다음의 부등식이 성립한다.

$$\|\Delta_P u + (1 + \Delta_P)d\| \leq \rho(t, x) + k\|v\| \tag{37}$$

여기서 d 는 제한된 크기를 가지는 변수이고 $u = u_r + v$ 로 주어진다. 그리고 (16)과 (18)로부터 u_r 은 제한된 값을 가진다는 것을 알 수 있다. 따라서 (37)의 부등식으로부터

$$|\Delta_P| < 1 \tag{38}$$

이 되도록 P_m 을 선택하면 전체 시스템은 Lyapunov 재설계에 기초한 강인 안정성을 만족하게 된다.

3. 구조분석을 이용한 성능예측

(31)부터 RIC의 설계는 기본적으로 플랜트와 되먹임 제어기를 가지는 전형적인 되먹임 제어 문제이고, (32)의 함수 Q 를 이용하여 RIC의 K 를 설계할 수 있고, 또한 K 를 이용하여 Q 를 최적화시킬 수 있음을 알았다. 따라서 Q 의 절점주파수 이하에서는 u_r 로부터 y 까지의 전달함수가 근사하게 P_m 이 되므로, 외부루프 제어기 C 는 그림 4에서 보인 것처럼 기준모델에 기초하여 쉽게 설계될 수 있다. RIC에 기초한 제어 시스템의 성능 분석을 위하여, 먼저 그림 5에 보여지는 전형적인 되먹임 제어 시스템을 생각해보자. 이 그림의 d 로부터 y 까지의 전달함수는

$$G_{dy}^* = \frac{P}{1 + PC} \tag{39}$$

로 얻어진다. 따라서 등가외란을 (34)처럼 정의하고 그림 5의 제어입력이 들어가는 플랜트 부분을 그림 3처럼 재정의 하면 (39)의 전달함수는 다음과 같이 d_{eq} 로부터 y 까지의 전달함수로 다시 표현할 수 있다.

$$G_{d_{eq}y}^* = \frac{P_m}{1 + P_m C} \tag{40}$$

반면에, 그림 4에서 보여지는 RIC에 기초한 제어 시스템의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$G_{dy} = \frac{P}{1 + PK + (1 + P_m K)PC} \tag{41}$$

(40)에서처럼 d_{eq} 에 대하여 이 식을 다시 표현하면

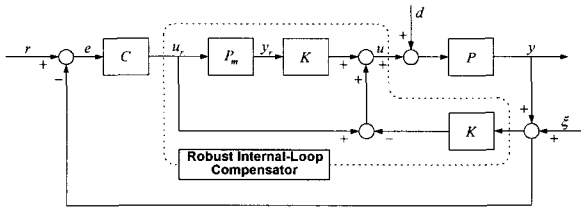


그림 4. RIC에 기초한 강인제어 시스템.
Fig. 4. RIC based robust control system.

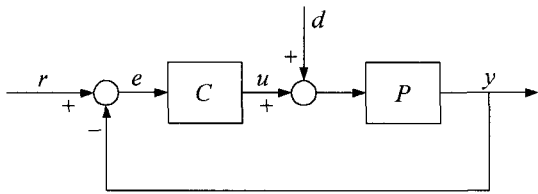


그림 5. 전형적인 피드백 제어 시스템.
Fig. 5. Typical feedback control system.

$$G_{d,y} = \frac{P_m}{(1 + P_m C)(1 + P_m K)} \quad (42)$$

가 되고, 이것은 외란의 영향이 (40)과 비교하여 $1/(1 + P_m K)$ 만큼 근사적으로 줄어드는 것을 의미한다.

이제 입출력 사이의 관련성을 이용하여 RIC를 가지는 제어 시스템의 성능을 분석하여 보자. 추종오차를 $e = r - y$ 로 정의하면, 그림 5와 그림 3으로부터 전형적인 피드백 시스템의 오차는 r 과 d_{eq} 의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$e^* = \frac{1}{1 + P_m C} (r - P_m d_{eq}) \quad (43)$$

반면에 그림 4로부터, e 와 r 과 d_{eq} 사이의 관계식은

$$e = \frac{1}{1 + P_m C} \left(r - \frac{P_m}{1 + P_m K} d_{eq} \right) \quad (44)$$

로 표현할 수 있다. 그러므로 오차에 대한 외란의 영향이 (42)와 마찬가지로 (43)과 비교하여 $1/(1 + P_m K)$ 만큼 근사적으로 줄어든다는 것을 알 수 있다. 그러나 r 의 영향이 여전히 e 에 미치고 있으므로 그 성능을 예측하기는 어렵다. 따라서 앞먹임 보상을 이용하여 e 에 대한 r 의 영향을 상쇄시킬 필요가 있다.

그림 6에 보여지는 앞먹임(feedforward) 보상을 가지는 RIC에 기초한 제어 시스템을 생각해 보자. 그림 3을 이용하면, 오차는

$$e = \frac{1}{1 + P_m C} \left((1 - P_m C_f) r - \frac{P_m}{1 + P_m K} d_{eq} \right) \quad (45)$$

처럼 등가의 외란에 대한 식으로 표현할 수 있다. 만약 앞먹임 제어기 C_f 를 기준모델의 역으로 선택하면, 즉 $C_f = 1/P_m$ 이 되면 (45)는

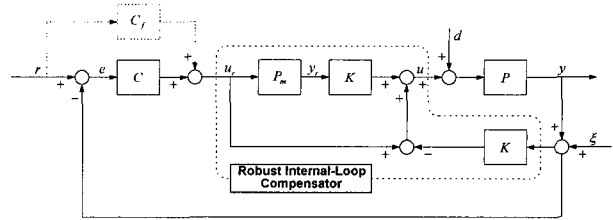


그림 6. 앞먹임 보상을 가지는 제어 구조.
Fig. 6. Control structure with feedforward compensation.

$$e = \frac{1}{1 + P_m C} \left(- \frac{P_m}{1 + P_m K} d_{eq} \right) \quad (46)$$

가 된다. 앞먹임 보상덕분에 (46)은 (45)와는 다르게 기준 입력 r 의 함수가 아니다. 따라서 오차 (46)의 놈(norm)에 대한 부등식은 (47)로 얻어진다. 여기서 W 는 다음과 같이 주어진다.

$$|e| \leq |W| \times \frac{1}{|1 + P_m K|} \quad (47)$$

$$W = \frac{P_m d_{eq}}{1 + P_m C} \quad (48)$$

성능예측을 위하여 다음과 같은 P_m 과 K 를 생각해 보자.

$$P_m = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s}, \quad K = (J_m s + B_m) D \quad (49)$$

따라서 (47)은 다음과 같이 표현된다.

$$|e| \leq |W| \times \frac{1}{\left| 1 + \frac{D}{j\omega} \right|} \quad (50)$$

그러므로 W 의 이득을 고정하고 이득 D 를 N 배만큼 크게 하면, $|e|$ 는 $\left| \left(1 + \frac{D}{j\omega} \right) / \left(1 + \frac{N \times D}{j\omega} \right) \right|$ 의 크기만큼 대략적으로 줄어든다는 것을 알 수 있다. 특히 D 가 충분히 크거나 시스템이 저주파수 영역에서 거동되는 경우, D 가 N 배가 되면 오차의 크기는 $1/N$ 만큼 근사적으로 줄어든다는 것을 예측할 수 있다. 물론 이러한 분석이 엄밀하지는 못하지만, 위의 결과는 RIC에 기초하여 설계된 제어 시스템의 정성적인 외란억제 특성을 보여줄 수 있음에 주목하자.

IV. 슬라이딩 모드 제어기의 구조적 설계

이번 절에서는 반도체 칩 마운팅(mounting) 장치로 사용되는 고정밀 이송 시스템을 구체적 응용 예의 하나로 생각해 보자. 정밀 이송 시스템의 동작방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$J\ddot{x} + B\dot{x} + F_r(x) - d_{ex} = u \quad (51)$$

여기서 J 는 관성(inertia), B 는 감쇠계수, u 는 제어입력, x 는 출력, $F_r(x)$ 는 정지마찰력(stiction)과 Coulomb 마찰력을 포함하는 비선형 마찰력, d_{ex} 는 알려지지 않은 제한된 값을 가지는 외란이다. 추종오차를 $e = x_d - x$ 로 두고, 스

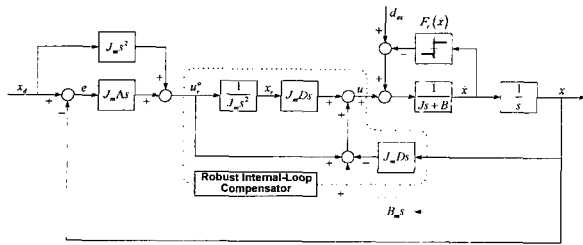


그림 7. RIC에 기초한 슬라이딩 모드 제어 구조.
Fig. 7. RIC based sliding mode control structure.

칼라 식 $\sigma(x, t) = 0$ 으로 정의되는 상태공간 \mathbb{R}^n 에서의 시 변(time-varying) 집합 $S(t)$ 를 정의하자. 여기서

$$\sigma = \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right)^{n-1} e \quad (52)$$

이고, Λ 는 strictly positive 상수이다. 즉, (51)로부터 시스템의 차수 n 이 2이므로 슬라이딩 함수는

$$\sigma = \dot{e} + \Lambda e \quad (53)$$

가 되고, 따라서 ϕ 와 σ_a 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi &= \dot{x}_d + \Lambda x_d \\ \sigma_a &= x_2 + \Lambda x_1 \end{aligned} \quad (54)$$

먼저, 슬라이딩 모드 제어기의 RIC에 기초한 구조적 설계를 위해 다음과 같은 (51)에 대한 기준모델을 생각하여 보자.

$$J_m \ddot{x} + B_m \dot{x} = u \quad (55)$$

여기서 J_m 과 B_m 은 각각 J 와 B 의 공칭값이다. 따라서 등가의외란의 정의로부터 (51)은 기준모델의 매개변수 J_m 과 B_m 의 항으로 다음과 같이 다시 표현될 수 있다.

$$J_m \ddot{x} + B_m \dot{x} = u + d_{eq} \quad (56)$$

여기서 등가의외란은

$$d_{eq} = (J_m - J) \ddot{x} + (B_m - B) \dot{x} - F_r(\dot{x}) + d_{ex} \quad (57)$$

로 주어지고 제한된 값을 가진다고 가정한다. 그러므로 (56)의 시스템에 대하여 RIC에 기초한 슬라이딩 모드 제어 입력은 (18)과 (29)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$u = J_m (\ddot{x}_d + \Lambda \dot{e}) + B_m \dot{x} + (J_m D) \sigma + K e_r \quad (58)$$

다음으로, 내부모델 추종제어의 개념을 이용하여 기준 상태변수를 다음과 같이 선택하여보자.

$$x_r = x_d + \Lambda \int_0^t e dt \quad (59)$$

따라서 모델 추종오차의 정의와 (53)의 슬라이딩 함수로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} e_r &= x_r - x \\ &= e + \Lambda \int_0^t e d\tau = \int_0^t \sigma d\tau \end{aligned} \quad (60)$$

여기서 Lyapunov 재설계에 기초하여 설계되는 $v = K e_r$ 을 슬라이딩 함수 σ 를 이용하여 표현할 수 있다는 점에 주목하자. 즉, 다음의 식이 성립함으로써

$$(J_m D) \sigma = (J_m D) \dot{e}_r, \quad (61)$$

v 의 설계가 (61)의 설계에 포함되어질 수 있다. 그러므로 RIC의 구조적 관점에서 슬라이딩 모드 제어입력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= u_r^* + K e_r + u^* \\ &= J_m \ddot{x}_r + (J_m D) \dot{e}_r + B_m \dot{x} \end{aligned} \quad (62)$$

여기서 u_r^* 은 u 에서 기준 상태변수에 관련된 항이고, 마지막 항은 (30)에서와 같이 알려지지 않은 불확실성을 동적 보상하기 위한 추가적인 제어입력이다. 그림 7은 RIC의 구조적 관점에서 제안된 슬라이딩 모드 제어기의 구조를 보여주고 있다.

1. 외란 억제 특성 분석

(62)로부터 P_m 과 K 는 다음과 같이 주어진다.

$$P_m = \frac{1}{J_m s^2}, \quad K = (J_m D) s \quad (63)$$

따라서 Q 는 (32)로부터 다음과 같은 형태를 취한다.

$$Q = \frac{D}{s + D} \quad (64)$$

그러므로 Q 함수 (64)의 절점주파수($\omega_c = D \text{ rad/s}$) 내의 영역에서는 외란이 억제된다는 것을 알 수 있다.

2. 성능 분석

(62)로부터 외부루프 제어기와 앞먹임 보상은 그림 7에 보여지듯이 다음과 같이 주어진다.

$$C = (J_m \Lambda) s \quad (65)$$

$$C_f = J_m s^2 \quad (66)$$

위의 식으로부터 앞먹임 보상은 $C_f = 1/P_m$ 의 조건을 만족하므로, (47)로부터 다음과 같은 부등식이 만족된다.

$$|e| \leq |W| \times \frac{1}{\left| 1 + \frac{D}{j\omega} \right|} \quad (67)$$

여기서 W 는 (48)로 주어진다. 그러므로 (65)에서 Λ 를 고정하고, (63)에서 D 를 N 배만큼 크게 하면, $|e|$ 는 $\left| \left(1 + \frac{D}{j\omega} \right) \left(1 + \frac{N \times D}{j\omega} \right) \right|$ 의 크기만큼 근사적으로 줄어드는 것이다. 특히 D 가 충분히 크거나 시스템이 저주파수 영역에서 거동되는 경우, D 가 N 배가 되면 오차는 $1/N$ 만큼 근사적으로 줄어드는 것을 예측할 수 있다.

주 1: RIC의 제어기 K 의 이득 D 에 따라서 성능이 변화하는 것은 그만큼 외란에 대한 시스템의 강인성이 변화한다는 것을 (64)로부터 잘 알 수 있다. 즉, (67)과 같이 D 의 크기에 따라 오차의 크기가 달라지며, 동시에 (64)에서 Q 함수의 절점주파수가 D 이므로 D 가 증가하면 외란 억제 특성을 나타내는 절점주파수가 또한 증가하게 된다.

3. RIC 구조에서의 적분 제어

적분제어가 포함되어 있는 슬라이딩 모드 제어기를 설계하기 위하여 관심있는 변수를 $\int_0^t e(\tau) d\tau$ 로 선택하여보자. 그러면, (56)의 시스템은 이 변수에 대하여 상대적으로 3차 시스템이 된다. 따라서 슬라이딩 함수는

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{t}{dt} + \Lambda\right)^2 \int_0^t e d\tau \\ &= \dot{e} + 2\Lambda e + \Lambda^2 \int_0^t e d\tau \end{aligned} \quad (68)$$

로 얻어지고, ϕ 와 σ_a 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi &= \dot{x}_d + 2\Lambda x_d + \Lambda^2 \int_0^t x_d d\tau \\ \sigma_a &= x_2 + 2\Lambda x_1 + \Lambda^2 \int_0^t x_1 d\tau \end{aligned} \quad (69)$$

따라서 (56)의 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어입력은

$$u = J_m(\ddot{x}_d + 2\Lambda \dot{e} + \Lambda^2 e) + B_m \dot{x} + (J_m D)\sigma \quad (70)$$

와 같이 표현된다. 그리고 내부모델 추종제어의 개념을 이용하여 기준 상태변수를 다음과 같이 선택하자.

$$\dot{x}_r = \dot{x}_d + 2\Lambda e + \Lambda^2 \int_0^t e d\tau \quad (71)$$

그러면 (70)을 RIC의 구조적 관점에서 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$u = J_m \ddot{x}_r + (J_m D)\dot{e}_r + B_m \dot{x} \quad (72)$$

결과적으로, 적분제어가 포함되어 있는 슬라이딩 모드 제어기와 앞 절에서 얻어진 적분 제어가 포함되어 있지 않은 슬라이딩 모드 제어기가 구조적으로는 일치함을 알 수 있다. 즉 (64)로 표현되는 외란 억제 특성과 (67)로 표현되는 오차에 대한 부등식은 적분제어와는 상관없이 성립한다. 단지 기준 상태변수에 적분항과 (65)의 되먹임 제어기에 비례항이 첨가됨으로써 내부적인 오차 동역학식이 적분제어가 없는 경우와 비교하여 다르게 표현된다. 그러므로 RIC 제어기 K 의 이득 D 를 N 배만큼 크게 하고, 이때 D 가 충분히 크거나 시스템이 저주파수 영역에서 거동되는 경우, $|e|$ 가 $1/N$ 만큼 근사적으로 줄어드는 특성은 변하지 않는다.

주 2: 만약 Λ 가 B_m/J_m 으로 주어진다면, x_r 을 (59)로 정의하여 (70)을 RIC의 구조적 관점에서 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= u_r + Ke_r \\ &= J_m \ddot{x}_r + B_m \dot{x}_r + J_m D \dot{e}_r + B_m De_r \end{aligned} \quad (73)$$

따라서 P_m 과 K 는 다음과 같이 주어지고

$$P_m = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s}, \quad K = (J_m s + B_m)D, \quad (74)$$

Q 는 앞에서와 같이 다음과 같은 형태를 취한다.

$$Q = \frac{D}{s + D} \quad (75)$$

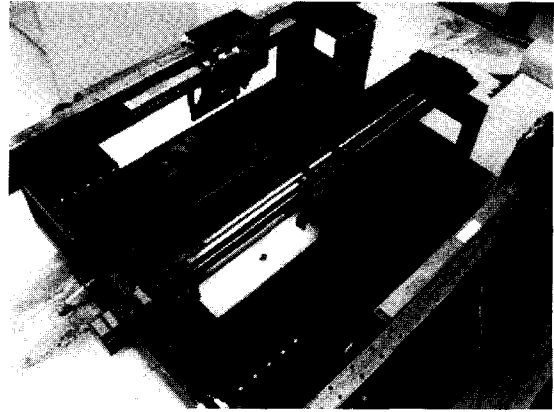


그림 8. 정밀 선형 모터 시스템.

Fig. 8. Precision linear motor system.

기준모델이 다른 형태로 선택되었지만, 제안된 제어기의 구조적인 특성덕분에 (75)의 Q 는 (64)와 같음을 알 수 있다. 그리고 (73)으로부터 외부루프 제어기와 앞먹임 보상은 다음과 같이 주어진다.

$$C = (J_m s + B_m)\Lambda, \quad C_f = J_m s^2 + B_m s \quad (76)$$

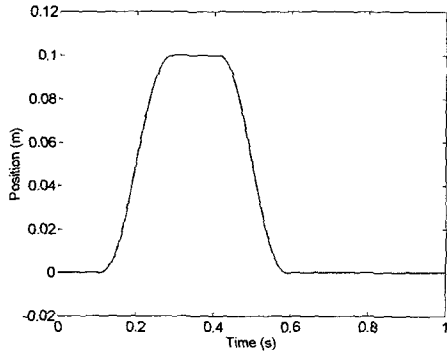
위의 식으로부터 앞먹임 보상은 $C_f = 1/P_m$ 의 조건을 만족하므로, 이 경우에도 역시 (67)의 부등식은 여전히 만족된다. 이것은 제어기가 가지는 고유한 특성을 구조적인 관점에서 분석하고 이에 기초하여 제어기를 설계하였기 때문이다. 여기서 알 수 있듯이, 본 논문에서 제안한 구조적인 설계와 분석방법은 제어기의 기본적인 구조에는 전혀 변화를 주지 않으므로, 제어기가 가지고 있는 고유한 특성을 그대로 유지하면서 이득의 변화에 따른 전체 시스템의 외란억제 특성과 성능 특성을 쉽게 예측하고 분석할 수 있는 장점을 가지고 있다.

V. 실험 결과

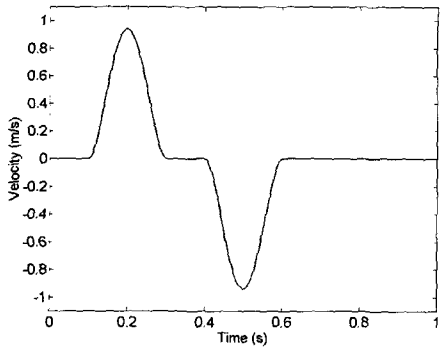
본 논문에서 다루는 시스템은 반도체 칩 마운터(chip mounter)로 이용되는 고정밀 위치제어 시스템이다. 그림 8은 실험장비를 보여주고 있다. (72)에 제안된 RIC에 기초한 추적 제어기가 전체 시스템을 안정화시키고 원하는 위치를 정확히 추적하기 위하여 사용된다.

$$\begin{aligned} u &= J_m(\ddot{x}_d + 2\Lambda \dot{e} + \Lambda^2 e) + B_m \dot{x} \\ &\quad + (J_m D)\left(\dot{e} + 2\Lambda e + \Lambda^2 \int_0^t e d\tau\right) \end{aligned} \quad (77)$$

여기서 J_m 은 0.01, B_m 은 0.5, Λ 는 150이고 D 는 주어진 성능조건을 만족시키기 위하여 설계되어지는 이득이다. 5차 다항식이 경로의 시작과 끝에서의 위치, 속도, 가속도를 지정하기 위하여 사용된다. 그림 9는 원하는 궤적과 속도 그래프를 보여주고 있다. 제어주기는 1000 Hz이고, 위치신호는 직선운동에서 3.125 μ m의 분해능을 가지는 모터에 부착된 회전식 엔코더에 의해 측정된다. 속도는 위치신호를 단순히 뒤쪽미분하여 얻어지고, 모든 제어기는 쌍일차변환을 이용하여 이산화 된다.



(a) 원하는 궤적



(b) 원하는 속도

그림 9. 실험에 이용된 궤적과 속도 그래프.
Fig. 9. Trajectory and velocity graph.

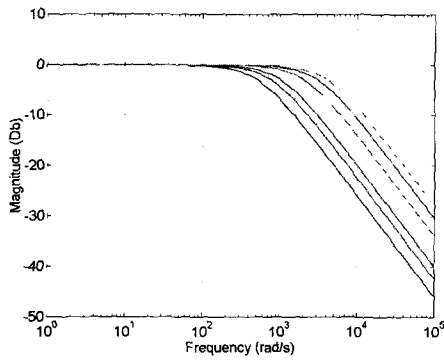
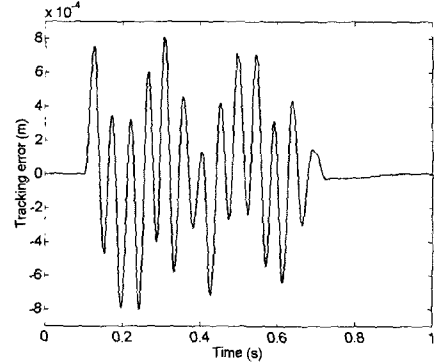
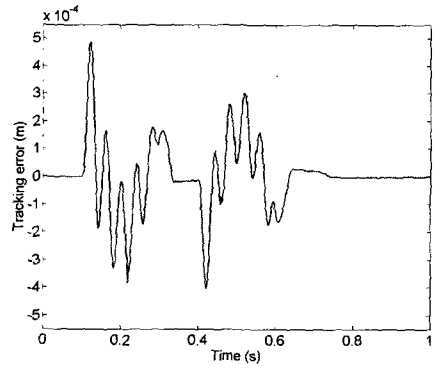


그림 10. 이득 D 의 변화에 따른 Q 함수.
Fig. 10. Q function determined by the various D .

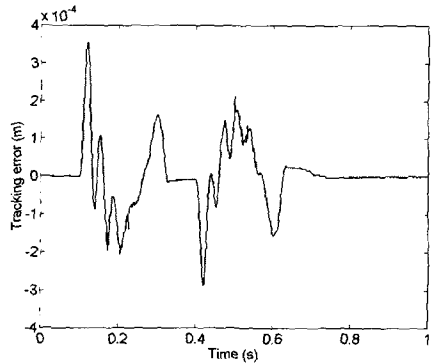
(77)로부터, RIC의 기준모델과 제어기는 (63)으로 주어지고 Q 는 (64)로 얻어진다. 성능예측을 위하여 D 만을 500, 750, 1000, 2000, 3000, 4000으로 변화시킨다. D 에 대한 Q 함수의 변화가 그림 10에 보여지고, 결과로 얻어진 궤적오차가 그림 11에 보여진다. 그림 11(a)는 $D=500$ 에 대한 최초의 결과를 나타낸다. D 를 750으로 증가시킴으로써 그림 11(b)에 보여지는 결과가 얻어지고, D 를 지속적으로 증가시키면 오차의 최대크기가 예측된 성능범칙을 가지고 줄어드는 것을 알 수 있다.



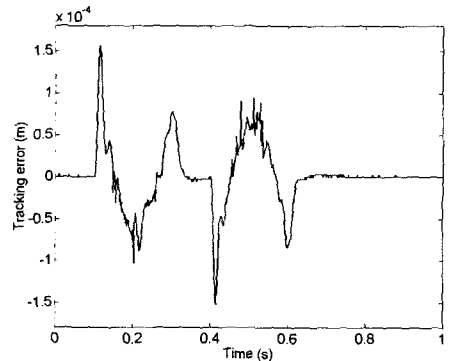
(a) $D=500$



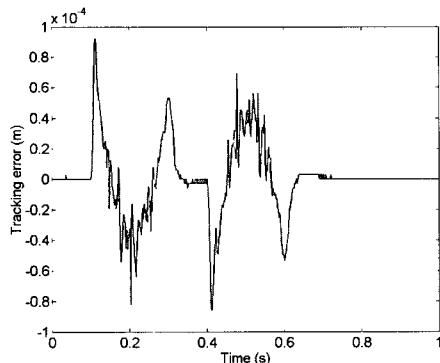
(b) $D=750$



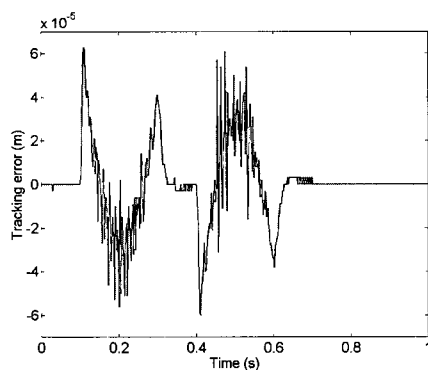
(c) $D=1000$



(d) $D=2000$



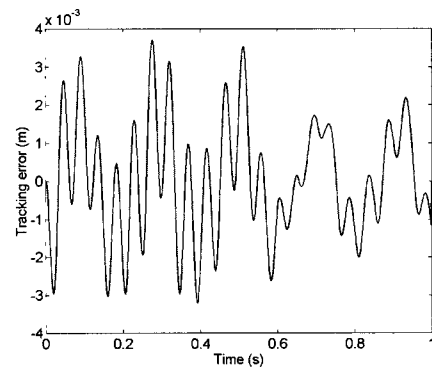
(e) $D = 3000$



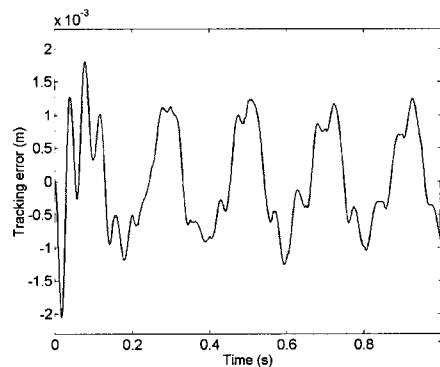
(f) $D = 4000$

그림 11. 이득 D 의 변화에 의한 추종오차.
Fig. 11. Tracking error by D gain.

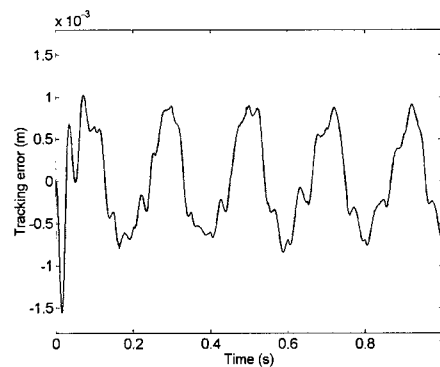
외란이 존재하는 경우의 시스템에 대한 오차 감소율을 검증하기 위하여, 그림 12에 보여지는 것처럼 정현파 (sinusoid) 신호, 반정현파 (half-sinusoid) 신호, 상수, 층



(a) $D = 500$



(b) $D = 750$



(c) $D = 1000$

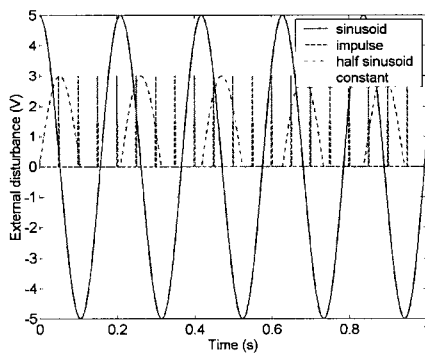
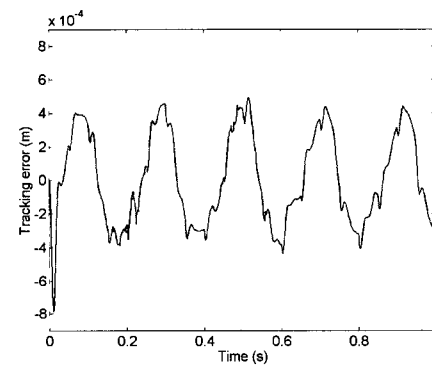


그림 12. 외부에서 들어오는 외란.
Fig. 12. External disturbance.

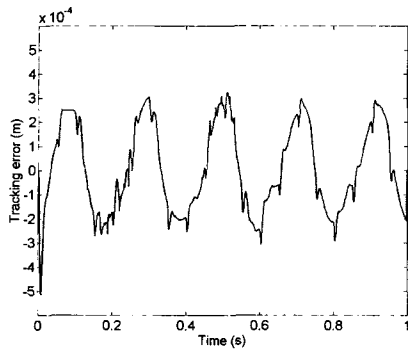


(d) $D = 2000$

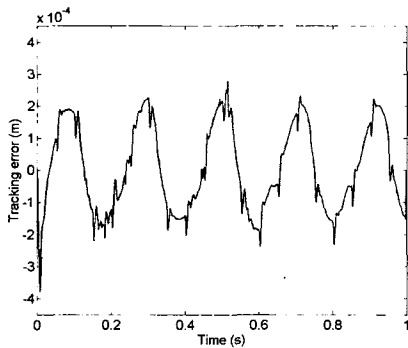
표 1. 이득 D 에 의한 추종오차의 최대크기.

Table 1. The maximum tracking error by D gain.

D	Maximum error	Max. error with d_{ex}
500	8.09×10^{-4} m	3.7×10^{-3} m
750	4.88×10^{-4} m	2.05×10^{-3} m
1000	3.55×10^{-4} m	1.56×10^{-3} m
2000	1.56×10^{-4} m	7.88×10^{-4} m
3000	9.20×10^{-5} m	5.13×10^{-4} m
4000	6.30×10^{-5} m	3.78×10^{-4} m

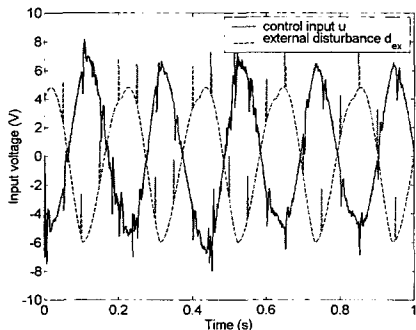


(e) $D = 3000$

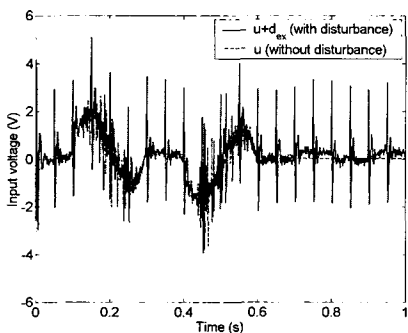


(f) $D = 4000$

그림 13. 외부에서 들어오는 외란이 있는 경우.
Fig. 13. Experimental results with d_{ex} .



(a) 제어입력과 외란



(b) $u + d_{ex}$ 와 그림 11(f)의 u

그림 14. 제어입력과 외란.
Fig. 14. Control input and external disturbance.

격 신호로 구성되는 외란신호를 제어입력에 첨가한다. 그림 13은 외란을 가지는 실험결과를 보여주고 있다. D 는 외란이 존재하지 않는 실험에서와 같은 값으로 주어졌다. 각각의 D 에 대한 외란이 있는 경우와 없는 경우에 대한 결과오차의 최대크기가 표 1에 보여지고 있고, 여기서 D 가 N 배가 되면 오차의 크기도 근사하게 $1/N$ 로 줄어들고 있다. 하지만 (67)은 부등식으로 주어지므로, 감소율이 $1/N$ 보다 약간 클 수도 있다. 그리고 D 는 (64)에서 알 수 있듯이 Q 함수의 절점주파수로 작용하고 있으므로, 4000 이상으로 커지면 오차신호에 많은 잡음이 섞여 들어오므로써 감소율을 검증하기 어려워진다 즉 D 가 커지게 되면 외란 억제 능력을 나타내는 절점주파수도 더 높아지게 되는 것이다.

그림 14(a)는 그림 13(f) 경우의 제어입력과 외란을 보여주고 있고, 그림 14(b)는 이 경우의 제어입력 신호와 외란 신호의 합과 그림 11(f) 경우의 제어입력 신호를 함께 보여주고 있다. 이를 통하여, 제안된 방법이 성공적으로 외란을 보상하고 있는 것과 고정밀의 성능을 보장하고 있음을 정확히 알 수 있다.

VI. 결론

불확실성과 외란이 존재하는 시스템을 안정화시키고 그 성능을 예측할 수 있는 슬라이딩 모드 제어기를 구조적 설계와 분석을 통하여 제안하였다. Lyapunov 재설계에 기초하여 슬라이딩 모드 시스템을 위한 내부적인 모델 추종제어기를 설계하고 RIC라는 일반화된 외란 억제 제어구조를 제시하였다. 그리고 RIC의 구조적 특성을 이용하여 시스템의 외란억제 특성을 분석하고, 앞먹임 보상을 이용하여 전체 제어 시스템이 원하는 성능을 만족시킬 수 있는 제어기 조율방법을 제안하였다. 제안된 구조적 설계방법을 이용한 슬라이딩 모드 제어기의 성능은 정밀 위치제어 시스템을 이용한 궤적 추종제어 실험을 통해 검증되었고, 결과는 다양한 비선형 마찰특성과 외란조건 하에서 RIC의 제어이득 변화에 따른 예측된 성능변화를 잘 보여주었다.

참고문헌

- [1] 박재삼, "자기동조 경계층 범위를 갖는 적응 슬라이딩 모드 제어," 제어·자동화·시스템공학 논문지, vol. 6, no. 1, pp. 8-14, 2000.
- [2] 김가규, 최봉열, "고차 시스템을 위한 근궤적을 따르는 시변 슬라이딩 모드," 제어·자동화·시스템공학 논문지, vol. 5, no. 4, pp. 379-384, 1999.
- [3] K. Erbaturo, M. O. Kaynak, and A. Sabanovic, "A study on robustness property of sliding-mode controllers: A novel design and experimental investigations," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 46, no. 5, pp. 1012-1018, 1999.
- [4] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [5] M. J. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform boundedness for

- uncertain dynamic systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 24, pp. 437-443, 1981.
- [6] S. Hui and S. H. Zak, "Robust control synthesis for uncertain/nonlinear dynamical systems," *Automatica*, vol. 28, no. 2, pp. 289-298, 1992.
- [7] Z. Qu, "Robust control of nonlinear uncertain systems under generalized matching conditions," *Automatica*, vol. 29, no. 4, pp. 985-998, 1993.
- [8] B. K. Kim, H. T. Choi, W. K. Chung, I. H. Suh, H. S. Lee, and Y. H. Chang, "Robust time optimal controller design for HDD," *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 35, no. 5, pp. 3598-3600, 1999.
- [9] B. K. Kim, W. K. Chung, H. T. Choi, I. H. Suh, and Y. H. Chang, "Robust optimal internal loop compensator design for motion control of precision linear motor," *Proc. 1999 IEEE Int. Symposium on Industrial Electronics*, pp. 1045-1050, 1999.
- [10] 김봉근, 최현택, 정완균, 서일홍, 송중호, "네트워크 표현을 이용한 트윈서보 시스템의 모델링과 강건 동기 동작 제어," *제어·자동화·시스템공학 논문지*, vol. 6, no. 10, pp. 871-880, 2000.
- [11] H. S. Lee and M. Tomizuka, "Robust motion controller design for high-accuracy positioning systems," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 43, no. 1, pp. 48-55, 1996.

김 봉 근

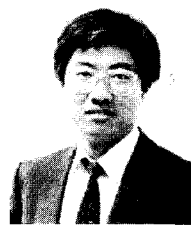
1971년 8월 20일생. 1994년 부산대학교 생산기계공학과 졸업. 포항공과대학교 대학원 기계공학 석사(1996), 1996년~현재 동대학원 기계공학과 박사과정 재학중. 관심분야는 정밀 제어 및 응용, 로봇의 동작제어와 원격제어 및 시



스템 설계.

정 완 균

1959년 2월 24일생. 1981년 서울대학교 기계설계학과 졸업. 한국과학기술원 기계공학 석사(1983), 한국과학기술원 생산공학 박사(1987), 1987년~현재 포항공과대학교 기계공학과 교수. 관심 분야는 여유자유도 로봇의 제어 와 로



봇의 힘제어 및 극작업용 원격제어기술.